# Komplexe Zahlen

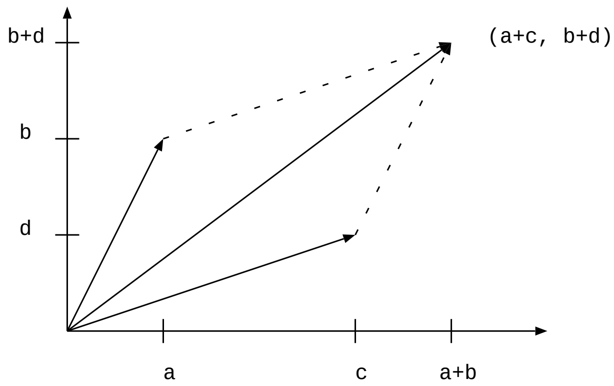
- Die bildliche Vorstellung einer komplexen Zahl $z = (a, b)$ stellt ein Punkt in der Bildebene dar.
- Die Elemente der Menge:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \quad | \quad a, b \in \mathbb{R}\}$$

heißen komplexe Zahlen wenn für die Verknüpfung ”$+$” (Addition) und ”$\cdot$” (Multiplikation) gilt:

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

- Die Menge aller komplexen Zahlen heißt $\mathbb{C}$
- Anschauung der Addition:




- Anschauung der Multiplikation: (später)
- $\mathbb{C}$ stellt einen Körper dar, wenn folgende Axiome bzgl. der Addition und Multiplikation erfüllt sind:
  - Kommutativgesetz
  - Assoziativgesetz
  - neutrale Element
  - inverse Element

# Axiome

▶ Addition

- Kommutativgesetz
$$z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) =$$
$$(c + a, d + b) = (c, d) + (a, b) = z_2 + z_1$$

- Assoziativgesetz (ohne Beweis)
$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

- neutrale Element (0,0)
$$(a, b) + (0, 0) = (a, b)$$

- inverse Element
$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$$

▶ Multiplikation

- Kommutativgesetz (Beweis s.o.)
$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

- Assoziativgesetz (ohne Beweis)
$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$$

- neutrale Element (1,0)
$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$$

- inverse Element $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}) &= (a\frac{a}{a^2+b^2} - b\frac{-b}{a^2+b^2}, a\frac{-b}{a^2+b^2} + b\frac{a}{a^2+b^2}) \\ &= (\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{-ab}{a^2+b^2}) = (1, 0) \end{aligned}$$

▶ $\mathbb{C}$ ist einen Körper

# Eigenschaften

- Definition der Differenz (Subtraktion):
  - Ist $z = (a, b)$ und $z^* = (-a, -b)$ so bezeichnen wir $z^*$ als $-z$
- Definition des Quotienten (Division):
  - Ist $z = (a, b)$ und $z^* = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$ so bezeichnen wir $z^*$ als $\frac{1}{z}$
- Definition der Potenz (analog zu den reellen Zahlen):
  - $z^0 = 1$
  - $z^1 = z$
  - $z^n = zz^{n-1}$
- $\mathbb{R}$ stellt eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ dar
  - $a = (a, 0)$
  - Die reellen Zahlen liegen auf der waagerechten Koordinatenachse
- Die Zahl (0,1) wird als $i$ bezeichnet, häufig aber als $j$ geschrieben
  - $j^2 = -1$
  - $(0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1$
- Potenzen von j
  - $j^0 = 1$
  - $j^1 = j$
  - $j^2 = j \cdot j = -1$
  - $j^3 = -1 \cdot j = -j$
  - $j^4 = -j \cdot j = 1$

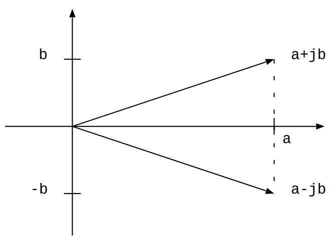
# Eigenschaften

- $j$ stellt die Einheit für den imaginären Teil einer komplexen Zahl dar, und ermöglicht eine einfachere Schreibweise für komplexe Zahlen:
  - $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{jb}$

$$\begin{aligned} a + jb &= (a, 0) + (0, 1)(b, 0) \\ &= (a, 0) + (0 - 0, 0 + b) \\ &= (a, b) \end{aligned}$$

- Sei $z = a + jb$ so ist $a$ der Real– und $b$ der Imaginärteil von $z$:
  - $a = \Re\{z\}$
  - $b = \Im\{z\}$

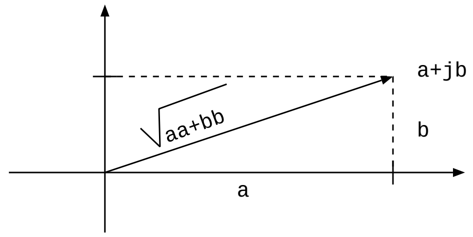
- Ist $z = a + jb$ und $z^* = a - jb$ so bezeichnen wir $z^*$ als $\bar{z}$, die konjugiert komplexe Zahl zu $z$
  - Spiegelung von z an der waagerechten Koordinatenachse




- Rechenregeln für konjugiert Komplexe
  - $\Re\{z\} = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \Im\{z\} = \frac{1}{2j}(z - \bar{z})$
  - $z \in \mathbb{R}$ wenn $z = \bar{z}$
  - $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ wenn $z = a + jb$
  - $\bar{\bar{z}} = z$
  - $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
  - $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
  - $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

# Eigenschaften

- Der Betrag einer komplexen Zahl wird mit $|z|$ bezeichnet:
  - $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
  - $|z|^2 = a^2 + b^2 = z\bar{z}$




- der Abstand zweier komplexer Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ beträgt:
  - $|z - w| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$
  - und wird auch als euklidsche Distanz bezeichnet

# Anwendung Mandelbrotmenge

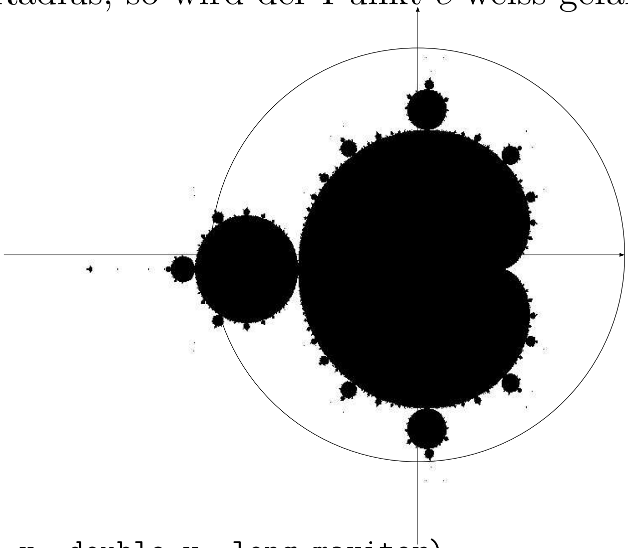
- Die Mandelbrotmenge gehöhrt zu den sog. Fliehfractalen
- Jeder Punkt $c = x + jy$ der Bildebene wird in die Iterationsfolge:

  $$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

  eingesetzt, wobei $z_0 = 0$ gesetzt wird. Nach jeder Iteration wird geprüft, ob $z$ sich innerhalb eines gegebenen Radius um den Ursprung befindet:

  $$|z_n|^2 < r$$

- Verlässt $z$ den Radius, so wird der Punkt $c$ weiss gefärbt



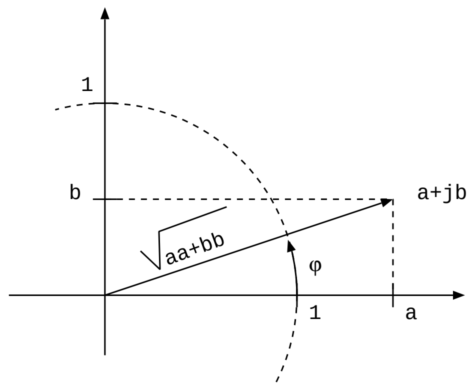
```
long lmandel(double x, double y, long maxiter)
{
    double z_re=0,z_im=0,tmp;
    long iter=0;
    while(iter++ < maxiter)
    {
        tmp=z_re*z_re-z_im*z_im+x;
        z_im=2*z_re*z_im+y;
        z_re=tmp;
        if((z_re*z_re + z_im*z_im) > 4.0) return (iter);
    }
    return(maxiter);
}
```

# Polarform

- alternative Darstellung komplexer Zahlen

  - statt Koordinaten: Länge und Winkel des Vektors

  - Winkel entspricht der Bogenlänge des Einheitskreises ($u = 2\pi$)




$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$

$$a = \cos\varphi|z| \qquad b = \sin\varphi|z|$$

$$a + jb = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

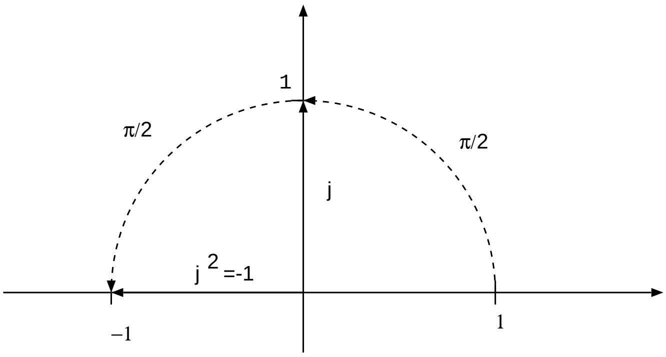
- geometrische Anschauung der Produktformel:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z||w|(\cos\varphi + j\sin\varphi)(\cos\psi + j\sin\psi) \\ &= |z||w|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + j(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)) \\ &\phantom{=} \text{nach dem Additiontheorem der sin, cos Funktion:} \\ &= |z||w|\Big(\cos(\varphi+\psi) + j\sin(\varphi+\psi)\Big) \end{aligned}$$

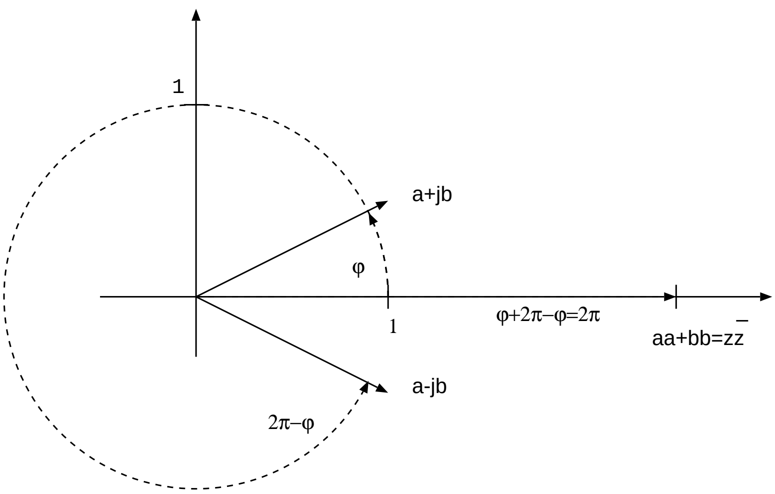
- Multiplikation komplexer Zahlen bedeutet:
  - Beträge multiplizieren
  - Winkel addieren

# Multiplikation in Polarform

- Bildung von $j^2$
  - Winkel: $2\frac{\pi}{2} = \pi$
  - Betrag: $1 * 1 = 1$




- Bildung des Betrags
  - Winkel: $\varphi + 2\pi - \varphi = 2\pi$ ist immer real(!)
  - Betrag: $|z|^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2 = a^2 + b^2 = z\bar{z}$



# Exponentialfunktion

- Reihenentwicklung der reellen Exponentialfkt.:

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Reihenentwicklung der komplexen Exponentialfkt. (komplexe Sinusfkt.):

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

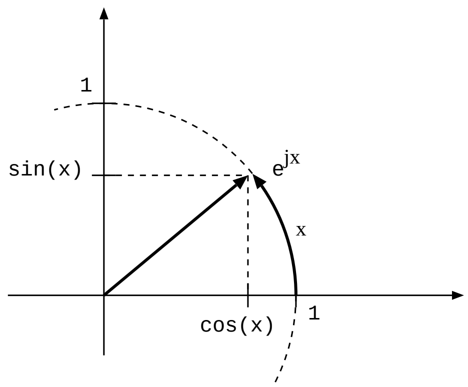
- Reihenentwicklung der komplexen Exponentialfkt. Argument ohne reellen Anteil:

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{jx^n}{n!} \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

  - Eigenschaften:

$$\begin{aligned} |e^{jx}| &= 1 \qquad \text{weil} \qquad |z|^2 = z \cdot \bar{z} \\ |e^{jx}|^2 &= e^{jx} \cdot \overline{e^{jx}} = e^{jx} \cdot e^{-jx} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

  - graphische Darstellung:




- Euler'sche Formel:

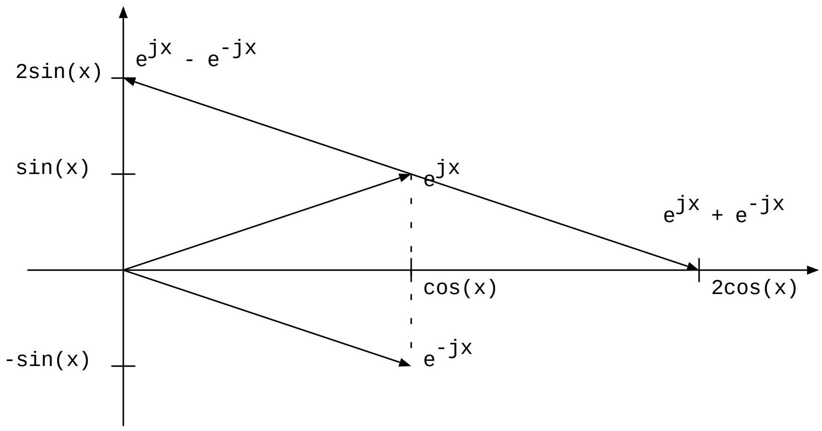
$$\begin{aligned} e^{jx} &= \cos(x) + j\sin(x) \\ \cos(x) &= \Re\{e^{jx}\} \\ \sin(x) &= \Im\{e^{jx}\} \end{aligned}$$

# Cos und Sin Funktion

- Berechnung der Cos und Sin Funktion:

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})\\ \sin(x) &= \frac{1}{2}(e^{jx} - e^{-jx})\end{aligned}$$

- graphische Darstellung:



# orthogonale Funktionen

- Aus Vektorrechnung: Vektoren heissen orthogonal zueinander, wenn das Skalarprodukt verschwindet:
$$\vec{x}\vec{y} = 0 \qquad \sum_i x_i y_i = 0$$

- Analogie zu Funktionen
  - Funktionen heissen orthogonal auf einen Wertesatz $\{x_0, x_1, \cdots, x_{N-1}\}$, wenn gilt:
  $$\sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) g(x_n) = 0$$
  - für $n \to \infty$ kontinuierliche Funktionen in $[a, b]$
  $$\int_a^b f(t) g(t) dt = 0$$

- betrachte Fkt-satz aus Sin und Cos Funktionen mit Vielfachen einer Grundfrequenz $f_0 = \frac{1}{T_0}$ $\to$ HARMONISCHE
- Alle Funktionspaare (mit Ausnahme der identischen) sind orthogonal über ein Intervall der Breite $T_0$:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sin(kt)\sin(mt) &= 0 \qquad \forall k \neq m \\
\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos(kt)\cos(mt) &= 0 \qquad \forall k \neq m \\
\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos(kt)\sin(mt) &= 0 \qquad \forall k, m \\
\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \cos^2(kt) = \int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \sin^2(kt) &= \frac{T_0}{2}
\end{aligned}$$

# Fourierreihe

- Idee: Periodische Signale durch Summe harmonischer Sin(Cos)-Funktionen approximieren
- Rückschluss auf das Frequenzspektrum und Phaseninformation
- $x(t)$: Zeitsignal ausdrücken durch $\sum \cos(\cdots t)$
- $t$ normieren auf die Grundperiode $T_0$ und den Wertebereich der Sin (Cos) Funktion $2\pi$

$$\to \cos(\frac{2\pi}{T_0}t) \quad \text{mit} \quad \frac{2\pi}{T_0} := \omega_0 \quad \to \quad \cos(\omega_0 t)$$

- Fourier–Reihe

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \underbrace{\cos(k\omega_0 t)}_{\text{Harmonische}} + \alpha_k \\ A_k &= \text{Amplitude der k-ten Harmonischen} \\ \alpha_k &= \text{Phasenverschiebung der k-ten Harmonischen} \end{aligned}$$

- $A_k$ und $\alpha_k$ sind der Parametersatz der Fourierreihe (und somit zu berechnen)
- Um die Ortogonalität zu nutzen, muss die Phasenverschiebung verschwinden. Ersetze daher

$$A\cos(\cdots) + \alpha \quad \text{durch} \quad a\cos(\cdots) + b\sin(\cdots)$$

- Alternative Darstellung

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \\ A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ \alpha_k &= -\arctan(\frac{b_k}{a_k}) \end{aligned}$$

# komplexe Darstellung

- beliebte Darstellungsform in der Elektrotechnik (kompakt)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

- Achtung: Summe startet bei $-\infty$

- negative Frequenzen, dabei gilt: $c_{-k} = \overline{c_k}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} + \overline{c_k} e^{-jk\omega_0 t}$$

- mit Hilfe der Euler'schen Formel:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\cos(k\omega_0 t) + j\sin((k\omega_0 t)) + \overline{c_k}(\cos(k\omega_0 t) - j\sin((k\omega_0 t)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(c_k + \overline{c_k})}_{a_k} \cos(k\omega_0 t) + \underbrace{j(c_k - \overline{c_k})}_{b_k} \sin((k\omega_0 t)) \\
a_k &= c_k + \overline{c_k} = 2\Re\{c_k\} \\
b_k &= \underbrace{j(\underbrace{c_k - \overline{c_k}}_{imagin\ddot{a}r})}_{real} = j^2 2\Im\{c_k\} = -2\Im\{c_k\} \\
A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2|c_k| \\
\alpha_k &= -\arctan(\frac{b_k}{a_k}) = \arctan(\frac{\Im\{c_k\}}{\Re\{c_k\}})
\end{aligned}$$

# Funktionsapproximation

- Darstellung einer Funktion durch (Linear)Kombination anderer Funktionen → Basisfunktionen
  - Bsp: Fourieranalyse durch Harmonische Funktionen

- Warum: Quellenfunktion oft unbekannt, Funktionswerte nur als Stichprobe vorhanden
  - Wasserstandsvorhersage: Wie sieht die "Funktion" des Flusses aus
  - Welche Basisfunktionen sind die richtigen
  - Wie lautet der Parametersatz

- Bekanntes Beispiel: Taylorreihen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{N-1} x^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$$

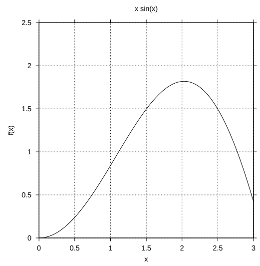
- Bestimmung des Parametersatzes $a_n, n : 0 \cdots N-1$, abhängig von der Anzahl der Funktionsbeispiele $f(x)$
  - unterbestimmtes System: Anzahl Funktionsbeispiele < Anzahl Parameter
    - ↣ Lösungsschar, welche stimmt???
    - ↣ dadurch meist unbrauchbar

  - bestimmtes System: Anzahl Funktionsbeispiele = Anzahl Parameter
    - ↣ Funktionsbeispiele werden exakt approximiert
    - ↣ aber wird die erzeugende Funktion getroffen???

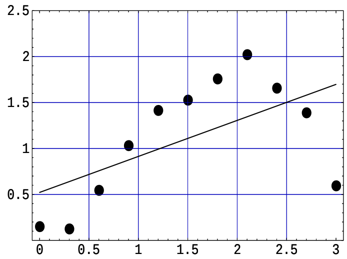
  - überbestimmtes System: Anzahl Funktionsbeispiele > Anzahl Parameter
    - ↣ Funktionsbeispiele werden nur annähernd getroffen
    - ↣ aber meist bessere Annäherung an die eigentliche Funktion

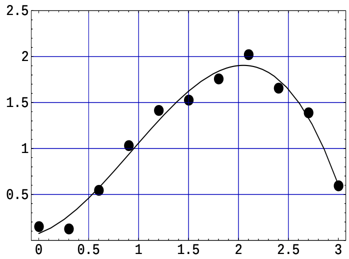
# Funktionsapproximation

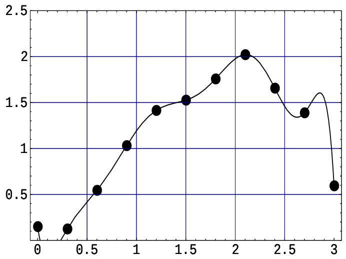
- Beispiel: Approximation der Funktion $f(x) = x\sin(x)$ durch taylorreihen




  - Funktionswerte aus der Funktion $x\sin(x)$ mit überlagertem Rauschen
  - 11 Funktionsbeispiele $\rightarrow$ mit Polynom 10-ten Grades genau approximierbar
  - Abb: Taylorreihen mit 1-ten, 3-ten und 10-ten Grad







  - Polynom 3-ten Grades (überbestimmtes System) trifft die eigentliche Funktion $x\sin(x)$ am besten
- Parameterbestimmung bei überbestimmten Systemen
  - Ziel: Minimaler Fehler über den Funktionsbeispielen
  - Definition einer Fehlerfunktion
  - Minimierung durch partielle Ableitung in Richtung der Parameter
  - Fehlermaß: quadratischer Abstand

# Bestimmung der Fourierkoeffizienten

▶ Allgemeine Form der Fourier–Analyse:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$$

- wird der n-te Funktionswert $x(t_n)$ mit K-Harmonischen approximiert, so gilt:
$$x(t_n) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \cos(k\omega_0 t_n) + b_k \sin(k\omega_0 t_n)$$
- Der Fehler für den n-ten Funktionswert bei quadratischen Fehlermaß:
$$E_n(a,b) = (x(t_n) - \sum_{k=0}^{K-1} a_k \cos(k\omega_0 t_n) + b_k \sin(k\omega_0 t_n))^2$$
- Der Gesamtfehler als Summe über alle gegebenen N Funktionswerte:
$$E(a,b) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ x(t_n) - \sum_{k=0}^{K-1} a_k \cos(k\omega_0 t_n) + b_k \sin(k\omega_0 t_n) \right]^2$$
- Durch Substitution zu einer kompakten Schreibweise

$$\begin{aligned} f_{kn} &= a_k \cos(k\omega_0 t_n) + b_k \sin(k\omega_0 t_n) \\ E(a,b) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ x(t_n) - \sum_{k=0}^{K-1} f_{kn} \right]^2 \end{aligned}$$

# Bestimmung der Fourierkoeffizienten

- Zur Parameterbestimmung minimiere E
- bilde alle partiellen Ableitungen für $a_m, b_m \quad m = 0 \cdots K-1$ und setze diese gleich Null

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial a_m} &= \frac{\partial}{\partial a_m}\sum_{n=0}^{N-1}\left[x(t_n) - \sum_{k=0}^{K-1} f_{kn}\right]^2 = 0 \qquad \text{Produktregel}\\ &= 2\sum_{n=0}^{N-1}\left[x(t_n) - \sum_{k=0}^{K-1} f_{kn}\right]\cos(m\omega_0 t_n) = 0\end{aligned}$$

  - denn es gilt für die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{K-1}\frac{\partial f_{kn}}{\partial a_m} &= \cos(m\omega_0 t_n)\\ \sum_{k=0}^{K-1}\frac{\partial f_{kn}}{\partial b_m} &= \sin(m\omega_0 t_n)\end{aligned}$$

  - Vereinfachen

$$\begin{aligned}0 &= 2\sum_{n=0}^{N-1}\left[x(t_n) - \sum_{k=0}^{K-1} f_{kn}\right]\cos(m\omega_0 t_n)\\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n)\cos(m\omega_0 t_n) - \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{K-1} f_{kn}\cos(m\omega_0 t_n)\\ \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n)\cos(m\omega_0 t_n) &= \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{K-1} f_{kn}\cos(m\omega_0 t_n)\\ \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n)\cos(m\omega_0 t_n) &= \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{K-1}(a_k\cos(k\omega_0 t_n) + b_k\sin(k\omega_0 t_n))\cos(m\omega_0 t_n)\end{aligned}$$

# Bestimmung der Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} x(t_n)\cos(m\omega_0 t_n) &= \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{K-1} a_k \cos(k\omega_0 t_n)\cos(m\omega_0 t_n) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{K-1} b_k \sin(k\omega_0 t_n)\cos(m\omega_0 t_n)\end{aligned}$$

da orthogonal:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} x(t_n)\cos(m\omega_0 t_n) &= \sum_{n=0}^{N-1} a_m \cos^2(m\omega_0 t_n) \\ \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n)\cos(m\omega_0 t_n) &= a_m \frac{T_0}{2}\end{aligned}$$

- und wir erhalten für die Parameter $a_m, m = 0 \cdots K-1$

$$a_m = \frac{2}{T_0}\sum_{n=0}^{N-1} x(t_n)\cos(m\omega_0 t_n)$$

- Analog erfolgt die Berechnung der Parameter $b_m, m = 0 \cdots K-1$

$$b_m = \frac{2}{T_0}\sum_{n=0}^{N-1} x(t_n)\sin(m\omega_0 t_n)$$

- Die Rekonstruktion der Funktion erfolgt mit Hilfe der Ausgangsformel:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$$

- Wobei $x^*(x)$ die Approximierte der ursprünglichen Funktion $x(t)$ darstellt