Strategien, welche für die Kinder einsichtiger zu handhaben sind als das Teilschrittverfahren. Sie ermutigt ihre Förderkinder zum flexiblen Rechnen und stellt fest, dass diese Kinder förmlich aufblühen, „wenn sie merken, dass sie nicht einem Verfahren ausgeliefert sind, sondern dass *sie* die Zahlen ‚manipulieren' können, dass *sie* es sind, die entscheiden, wie sie Ordnung in ihrem Kopf schaffen wollen."

Peter Jansen („Zählendes Rechnen üben und überwinden") geht es darum, das Vertrauen der Kinder in ihre Rechenergebnisse und ihre verwendeten Strategien zu stärken. Deswegen sieht er die zählende Strategie als eine an, von der aus sich andere entwickeln.

Jörg Kwapis („Warum zählen Kinder, anstatt zu rechnen?") zielt auf die Vermeidung von Rechenschwäche und erläutert, warum es wichtig ist, zwei Ebenen zu beachten: die zahlen- und die rechenoperationslogische. Für beide ist das Verständnis notwendig, um erfolgreich rechnen zu lernen.

Die Autorinnen und Autoren betonen, dass der mathematische Anfangsunterricht von einer Resultatsorientierung zu einer Verstehensorientierung kommen muss. Alle richten ihren Blick darauf, dass Kinder verstehen, dass Zahlen Anzahlen beschreiben und dass die Zahlen in Beziehungen zueinander gedacht werden müssen. Rechnen ist dann kein Abarbeiten von Rechentechniken, sondern es ist Mengenhandeln, welches zum Zahlenhandeln wird. Dabei führen nichtzählende Rechenstrategien zu Beginn ihrer Nutzung nicht immer zu korrekten Resultaten, was aber kein großes Problem sein sollte. Wenn im Unterricht richtige Resultate mehr belobigt werden als nichtzählende Rechenstrategien, dann verbleiben die Lernenden lieber beim Zählen: Sie können ja nicht wissen, dass das Zählen ihnen momentan zwar Lob einbringt, dass es aber jenseits der Zahl 20 in die Sackgasse führt. Der Unterricht muss also nichtzählende Strategien nicht nur motivieren und vielfältig aufzeigen, er muss sie auch belobigen. ■

Literatur

Gaidoschik, Michael (2007): Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern. Persen Verlag.

Gerster, Hans-Dieter (1996): Vom Fingerrechnen zum Kopfrechnen – Methodische Schritte aus der Sackgasse des zählenden Rechnens. In: Eberle, G./ Kornmann, R. (Hrsg.): Lernschwierigkeiten und Vermittlungsprobleme im Mathematikunterricht an Grund- und Sonderschulen. Weinheim: Deutscher Studienverlag. S. 137–162.

Anschrift der Autoren

Prof. Dr. Wolfram Meyerhöfer, Universität Paderborn, Institut für Mathematik, Warburger Straße 100, 33098 Paderborn, E-Mail: meyerhof@math.upb.de
Prof. Dr. Regina Möller, Universität Erfurt, Mathematik und ihre Didaktik; Nordhäuser Straße 63, 99089 Erfurt, E-Mail: Regina.Moeller@uni-erfurt.de

Frühe Alternativen zum Zählen

Die ersten zehn Schulwochen

Klaus Rödler

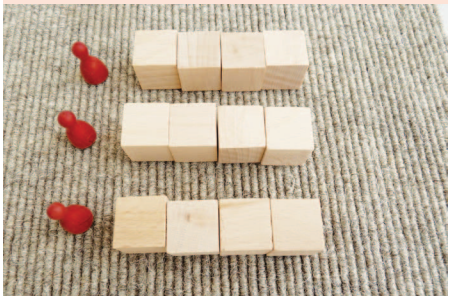
Müssen wir mit der Zahlwortreihe im Unterricht beginnen? Was können wir tun, damit Zahlen als Namen für kardinale Bausteine verstanden werden? Was sind gute Zählanlässe? Und wie sehen die ersten Schritte aus, die aus dem zählenden Rechnen in strukturierte Denkbewegungen führen?

Die Gefahr des scheinbar natürlichen Einstiegs

Wenn die Kinder in die Schule kommen, können sie oft schon zählen. Mit dem Zählen fängt aus ihrer Sicht alles an, denn Zahlen entstehen für sie im Zählprozess. Die Schule greift dieses Vorwissen dankbar auf und bemüht sich, das noch stark an der Zahlwortreihe orientierte Konzept durch die Verknüpfung der Zahlworte und Zahlzeichen mit Mengen und Mustern kardinal zu unterlegen und nach Möglichkeit zu strukturieren (z. B. „Kraft der Fünf"). Daneben wird die Zahlwortreihe gesichert und ausgebaut. Auf diese Weise soll das Zahlverständnis so weit vertieft werden, dass nachfolgend verständig gerechnet werden kann.

Die Wirklichkeit zeigt, dass es nicht wenige Kinder sind, die sich im herkömmlichen Lehrgang *nicht* von der Zahlwortreihe lösen; für sie bleibt Rechnen dauerhaft an Zählprozesse gebunden. In größeren Zahlräumen wird diese Schwäche darüber kompensiert, dass mit den Ziffern (stellenweise vorne mit vorne und hinten mit hinten) gerechnet wird oder dass

Die Aufgabe 12 : 3 = bedeutet: Da sind drei Kinder, die teilen sich 12 Bonbons. Das soll gerecht sein. Wie viel bekommt jeder?



Kasten 1: 12 : 3 = 4; die Rechenhandlung spielt den Alltag analog nach.

die Zahlen untereinander gedacht werden. Beide Strategien erlauben es dem Kind, weiter im Zahlraum bis 20 zu bleiben, der zählend zugänglich ist. Das führt oft sogar zu richtigen Lösungen, aber die Entwicklung eines *kardinalen und auf Strukturen gerichteten Zahlkonzepts* wird dadurch verhindert. Für den Aufbau eines solchen Zahlkonzepts gibt es wichtige Bausteine:

1. Das **Teile-Ganze-Prinzip**, das die Grundlage für strukturierte Rechenwege darstellt: Zahlen bestehen nicht nur aus Einzelelementen, sondern sind auch ein Ganzes, das mit anderen Ganzen größere Zahlen baut. So bauen die 2 und die 3 eben zusammen die 5, weshalb das nicht abzählend gelöst werden muss.
2. Der **reversible Zehner**, der die Voraussetzung des Konzepts dezimaler Wertebenen darstellt: Ein Zehner ist nicht eine andere Art Einer, sondern steht mit den Einern im Zusammenhang. Er ist aus zehn Einern gebaut und kann in diese zurückgeführt werden.

Dass sich diese beiden zentralen Zahlkonzepte im Unterricht – auch bei der Verwendung von strukturierten Rechenhilfen wie Perlenkette, Rechenrahmen und Zwanzigerfeld – nicht automatisch aus den zunächst zählenden Rechenverfahren entwickeln, ist bekannt. Warum das so ist, lässt sich gut erfahren, wenn man sich durch einen Versuch auf die Perspektive des an der Zahlwortreihe orientierten Kindes einlässt. Man erfährt hier, wie wenig der Rechenvorgang von der äußeren Struktur und wie stark er vom eigenen Zahlkonzept bestimmt ist:

Löschen Sie bitte in Ihrem Kopf die Zahlworte „Eins, Zwei, Drei, …“.

Auch die Zahlzeichen 1, 2, 3, … gibt es jetzt nicht mehr.

Stattdessen zählen und rechnen Sie bitte mit einer anderen Wort- und Zeichenreihe, die ab jetzt Ihre Zahlreihe darstellt: dem Alphabet.

Ihre Zahlen heißen also: A, B, C, …

Damit können Sie – wie die Kinder – mit Fingern oder einer Zählhilfe rechnen.

Probieren Sie es aus!

Rechnen Sie bitte diese Aufgaben, bevor *Sie weiter lesen.*

E + D = _____ H – E = _____

Frühes Rechnen mit den Grundrechenarten unterstützt den Aufbau strukturierter Zahlvorstellungen.

Ich habe diesen Versuch schon in vielen Fortbildungen gemacht. Nahezu alle Teilnehmer lösen die Aufgaben, indem sie die Bausteine der Rechnung und auch das Ergebnis von vorne abzählen. Kaum einer nutzt, dass er „E“ als volle Hand vor sich sieht. Praktisch niemand zählt bei der Addition von „E“ weiter oder klappt bei der Subtraktion „minus E“ einfach die volle Hand weg. Selbst wenn die Thematik angesprochen wurde, bleiben die meisten Teilnehmer bei neuen Aufgaben spontan dabei, immer alles von vorne zu zählen.

Auch die Verwendung von Rechenrahmen oder Perlenkette mit E-Struktur (also 5er-Struktur) ändert daran nichts. Wie in der Fachliteratur immer wieder beschrieben, bestimmt die Reife des inneren Zahlkonzepts und nicht die Struktur des Materials den Umgang mit dem Material.

Wenn wir also der Falle eines sich fixierenden Zahlwortreihenkonzepts entgehen wollen, dann dürfen wir unseren Unterricht nicht mit Aufgaben beginnen, die vor allem zu weiterem Rechnen mit Zahlwortreihen führen. Wir müssen sehr genau darauf achten, welche Aufgabe auf dem Niveau des Kindes nur durch das Aufsagen der Zahlwortreihe gelöst werden kann und welche Aufgabe andere Lösungswege erlaubt oder nahe legt.

Da didaktisch strukturiertes Material bei an der Zahlwortreihe orientierten Kindern keine Wirkung entfaltet, ist eine Konsequenz, auf äußere Strukturierung zunächst ganz zu verzichten. Besser ist ein Material, das vom Handelnden selbst strukturiert wird, das ihm also erlaubt, sein Denken sichtbar und damit der eigenen Reflexion zugänglich zu machen. Ich nehme dafür ungefärbte Holzwürfel (2 cm) auf einem Stück Teppich, also ein homogenes und vollkommen frei zu bewegendes Material. Dieses erlaubt es, bereits in den ersten Schulwochen mit dem Rechnen zu beginnen. Weil Rechnen nicht auf das zählende Lösen von Aufgaben reduziert wird, sondern als ein handelndes Nachgestalten von Grundvorstellungen des Lebensalltags eingeführt wird (dazu tun, wegnehmen, vervielfachen, verteilen), werden bereits in den ersten Schulwochen alle vier Grundrechenarten kennengelernt. Die Rechenhandlung spielt den Alltag analog nach (s. Kasten 1).

Das frühe Rechnen leistet nach meiner Erfahrung einen wesentlichen Beitrag zum Aufbau strukturierter Zahlvorstellungen.

Der Blick auf die einzelne im Zählprozess gewonnene Zahl als einem stabilen Ganzen und der Blick auf die sich durch konkrete Rechenoperationen verändernde Zahl (12, hier operativ in die Bausteine 4/4/4 zerlegt) findet vom ersten Schultag an nebeneinander statt! Beide Aspekte, Anzahlen in konkreten Zahlen festhalten und mit solchen konkreten Zahlen rechnen, befruchten sich gegenseitig. Nur aus systematischen Gründen sind diese Aspekte im Folgenden getrennt dargestellt.

Praxis Tipp

Konkrete Zahlen (Zahlen ohne Zahlwortreihe)

Jedes Schulbuch für den Anfangsunterricht bietet auf den ersten Seiten Zählanlässe. Die Kinder zählen Enten auf dem See und Ballons auf der Geburtstagsfeier. Dabei sind diese Zählanlässe so gestaltet, dass Zahlen im gerade behandelten Zahlraum gefunden werden können. Der Inhalt – scheinbar kinderfreundlich – ist beliebig. Denn um diesen Kern geht es gerade nicht. Es geht im Unterricht darum, dass die Verknüpfung Zahlwort/Zahlzeichen/Menge gefestigt wird. Man will, dass Kinder Vorstellungen entwickeln.

Wenn das kindgerecht ist, dann ist der Zählanlass auf diesem Bild erwachsenengerecht (s. Kasten 2).

Ganz offensichtlich passt es aber überhaupt nicht zum Bild, das inhaltliche Geschehen auszublenden und hier nur über 3, 4 und 5 zu sprechen. Um das zu tun, müsste man das Wichtigste an der Sache ausblenden und innerlich abspalten. Genau dasselbe verlangen wir aber von den Kindern.

Sie sollen nicht wirklich über den Zirkus oder den Geburtstag sprechen und was es da zu sehen gibt. Das ist für den Rechenunterricht völlig ohne Interesse. Es geht nur um 3 und 4 und 5. So lernen die Kinder sehr früh, dass die Zahlen etwas Kaltes sind, dass sich die Zahlen eben nicht für die wichtigen Dinge ihres Lebens interessieren.

- *Wie viele Beine hat der Stier?*
- *Wie viele Banderillas stecken in seinem Rücken?*

Kasten 2: Zählanlass für Erwachsene
Foto: KABUGUI – Fotolia.com

Wenn wir wollen, dass die Kinder Zahlen in ihr Leben integrieren, dann müssen wir Zählanlässe finden, die für ihr wirkliches Leben interessant sind. Es muss *für sie* von Bedeutung sein, eine bestimmte Anzahl festzuhalten und unterschiedliche Anzahlen zu vergleichen. So wie der Nutzen der Buchstaben für die Kinder im modernen Schriftspracherwerb beim Vorlesen und beim frühesten Schreiben von Anfang an unmittelbar präsent ist, so muss der Nutzen der Zahlen das Geschehen bestimmen. Deshalb nenne ich mein Konzept in Analogie zu „Lesen durch Schreiben“: *Rechnen durch Handeln* (siehe: www.rechnen-durch-handeln.de).

Wir müssen Zählanlässe finden, die für das wirkliche Leben der Kinder interessant sind.

Was lohnt sich zu zählen? – Alles, was die Kinder interessiert und was in der Klasse auf ein Echo stößt:

Zunächst sind es alle Meinungsbildungen und Abstimmungen in der Klasse. Außerdem sind es Fragen, die im Unterricht entstehen (s. Kasten 3).

Zählanlässe müssen sachlich sein. Sie müssen helfen, eine in der Klasse als relevant auftauchende Frage zu beantworten. Wenn wir in der Welt der Kinder – genauer: in dem, was die Kinder einbringen und was wir in der Klasse gestalten –, wenn wir also hier keine sinnvollen Anlässe zur Zahlbildung finden, dann haben Zahlen in einem vom Kinde ausgehenden Unterricht keine Berechtigung!

„Aber“, so mögen Sie jetzt sagen, „wenn jeder Frage nachgegangen werden soll, dann geht das doch nicht. So weit können die Kinder doch noch gar nicht zählen. Sie kennen die Zahlreihe ja noch gar nicht so gut.“

Ja, genau! Sie kennen die Zahlwortreihe noch nicht so weit. Genau deshalb sind diese Aufgaben hilfreich, weil sie die Bildung von Zahlen von der Zahlwortreihe abkoppeln. Weil sie nach einer anderen Lösung verlangen. Wir zählen nicht mit der Zahlwortreihe, sondern wir bilden *konkrete Zahlen*, so wie es die frühen Menschen vor 20 000 Jahren gemacht haben. Zählen hat mit der Zahlwortreihe zunächst gar nichts zu tun!

- *Wie viele Kinder sind in der Klasse?*
- *Gibt es mehr Jungen oder Mädchen an der Schule?*
- *Welches ist der häufigste Buchstabe auf der Fibelseite?*
- *Wie viele Schultage sind wir schon in der Schule? (Ich habe einen Schultagezähler in der Klasse!)*
- *Wie viele Steckperlen hat das Bügelbild?*
- *Wie viele Sammelkarten habe ich schon?*
- *Hat jemand mehr?*
- *Welche Autofarbe ist die beliebteste?*
- *Wer wohnt am höchsten über der Erde? (Treppenstufen zählen)*
- *Wie viele Kekse waren in der Packung?*
- *Nach wie vielen Tagen keimen die Erbsen?*

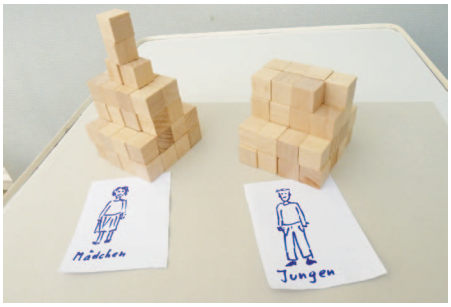
Kasten 3: Im Unterricht entstandene Zählanlässe

Zählen ist die analoge Abbildung der Wirklichkeit. So entstehen „konkrete Zahlen“.

Zählen ist die analoge Abbildung der Wirklichkeit – ob in ein Zahlwort oder in ein konkretes Material.

Die frühen Menschen haben Anzahlen in ein Zählmaterial abgebildet. „Für jede Ziege einen Stein. So viele Ziegen – so viele Steine.“ Das einzige in diesem Kontext notwendige Zahlwort heißt: „so viele“ genauso zählen wir in der Klasse. Und genauso reden wir über die Zählergebnisse. „Hier haben wir ‚so viele’. Hier haben wir ‚so viele’. Das sind , mehr’ und das sind ‚weniger’. Um unsere Fragen zu beantworten, bedarf es oft gar keiner exakten begrifflichen Bestimmung.

Unser Zählmaterial dafür sind die oben beschriebenen Naturholzwürfel.



Kasten 4: Mehr Mädchen als Jungen an der Schule

Um zum Beispiel herauszufinden, ob es an der Schule mehr Mädchen oder Jungen gibt, gehen die Kinder partnerweise in die Klassen und legen für jeden Jungen einen Würfel auf eine Schale und für jedes Mädchen einen Würfel auf eine andere. In der Klasse werden die Teilergebnisse zusammen gefügt.

Die beiden Haufen zeigen: „So viele Mädchen. – So viele Jungen".

An diesen *konkreten Zahlen* lässt sich Fundamentales über Zahlen erfahren. Sie sind nicht nur ganz offensichtlich kardinal. Sie sind vor allem *invariant*. Hinter den Holzwürfelhaufen steht der Zählvorgang. Dieser stellt sicher, dass die gefundene Zahl eine *ganz bestimmte* ist, die sich nicht dadurch verändert, dass man die Würfel zum besseren Vergleich gezielt legt oder baut. Raum-Lage-Veränderungen können einer konkreten Zahl nichts anhaben!

Da mehrere Würfel nicht nur eben gelegt, sondern zu Gebäuden gebaut werden können, lassen sich auf diese Weise auch sehr große Anzahlen mit einem Blick vergleichen. Statt eines im Zählprozess gefundenen abstrakten Zahlworts (52 Mädchen/47 Jungen) geben wir den Zahlen mit den Gebäuden ein Gesicht: so viele Jungen, so viele Mädchen.

Die zentrale Frage „Wovon gibt es mehr?" lässt sich nun ganz ohne Zahlwortreihe rein durch die Anschauung entscheiden (s. Kasten 4).

- *Baue beide Gebäude nach.*
- *Sehen deine genauso aus?*
- *Welche Zahlen kannst du sehen?*

Kasten 5: Spontan sichtbare Zahlen

Zahlworte sind Namen für ganz bestimmte Anzahlen

Damit Würfelgebäude ohne Zählprozess beschrieben werden können, müssen sie nur einem wichtigen Kriterium genügen: *Keine Linie darf mehr als 4 Elemente haben.* Das ist deshalb nötig, weil wir nur Anzahlen bis 4 auf einen Blick erfassen und gut unterscheiden können. In diesem Bereich des spontan Unterscheidbaren gibt es daher einen Sinn, dem sichtbar Verschiedenen unterschiedliche Namen zu geben. Wir brauchen sie, um über das Sichtbare zu reden.

Die Zahlen von null bis vier werden als Namen für etwas Erkennbares eingeführt und verwendet. Genauso wie man zum Auto „Auto" sagt und nicht „Tasse", genauso sagt man zu drei Würfeln „drei" und nicht „vier". Vier sieht anders aus, genauso wie die Tasse anders aussieht als das Auto. Der Name „Elf" ist auch ein Zahlname. Anders als Zwei und Drei kann die Elf aber nicht spontan erkannt und etwa von der Zehn unterschieden werden. Um diesen Namen zu finden, brauchen wir die Zahlwortreihe. Aber ob „Zwei", „Drei" oder „Elf", all das sind nur Worte und nicht Zahlen. So wenig, wie das Wort „Auto" ein Auto ist. Die Zahl selbst ist der in der analogen Abbildung gefundene Würfelhaufen! Und oft reicht sogar als Name: „So viele!"

Dieser Blick auf die Zahl als ein Ganzes, also eine Zahl, die nicht durch ein Abzählen der Einzelelemente entsteht und bestimmt wird, lässt sich an Gebäuden im Zahlraum bis 4 gut festigen. Denn hier findet sich eine Fülle rein formaler, nicht mehr an Zählprozesse gebundener Aufgabenstellungen (s. Kasten 5).

„Da sind zweimal Vier und noch Eins." – „Da sind dreimal Drei."

Das schreiben wir so:
$2 \cdot 4 + 1$ $3 \cdot 3$

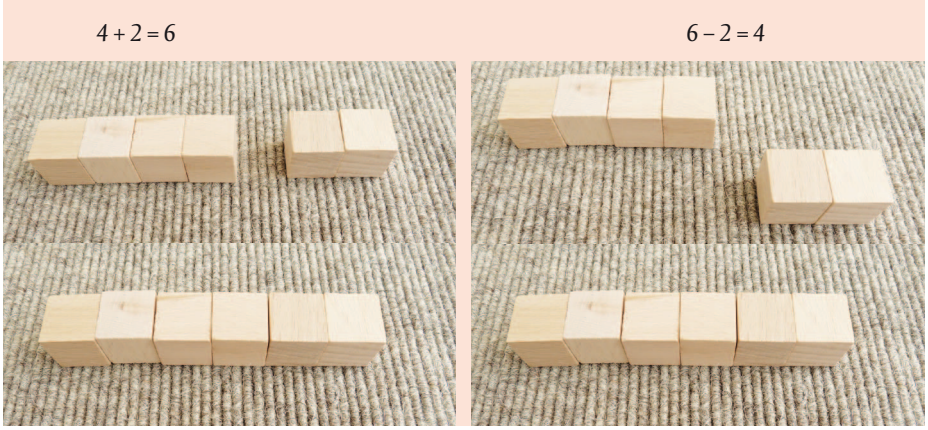
Kasten 6: Sprache und Schriftzeichen kennen lernen

Für das Nachbauen selbst müssen die Zahlnamen noch gar nicht bekannt sein. Jedes Kind, das visuell 2, 3 und 4 unterscheiden kann, ist dazu in der Lage. Erst die Frage nach den Zahlen thematisiert den Bereich der Zahlworte und Zahlzeichen.

Aus welchen Teilen kannst du das Gebäude bauen? – Welche Teile siehst du? Diese Aufgabenstellung führt unmittelbar zum Teile-Ganze-Konzept (s. Kasten 6).

„Da sind dreimal drei." Die sichtbaren drei Dreier sind jeweils Ganzheiten, die als Teile die größere Neun bauen. Wir reden genauso, wie wir reden, wenn wir nicht in der Schule sind und keine Mathematik betreiben. Wir können es gar nicht anders sagen. *„Vorne sind zweimal Vier und noch Eins."*

Die Aufforderung *„Schreibe das auf!"* führt noch einen Schritt weiter. Sie ermöglicht es, eine recht einfache Schrift kennenzulernen. Wir brauchen dafür hier nur genau sechs Zeichen; die vier Zahlnamen Eins bis Vier und die beiden Zeichen · und +, die hier *nicht* als Rechenzeichen zu verstehen sind, sondern als Schriftzeichen für bekannte Worte. $2 \cdot 4 + 1$ oder $3 \cdot 3$ sind hier *keine* Rechenaufgaben. Es sind in einer bestimmten Schrift aufgeschriebene Sätze!



Kasten 7: Addition und Subtraktion als zusammenfügen und wegschieben

Selbst die Vervollständigung der Gleichung (= 9) ist weniger ein Ausrechnen, sondern die Dokumentation einer weiteren Untersuchung des Gebäudes. Es ist die Antwort auf die Frage: *„Wie viele Würfel sind es eigentlich insgesamt?“* Dazu müssen wir nun doch die Zahlwortreihe kennen. Und es kommt zu einem erstaunlichen Ergebnis: *„Beide Gebäude haben neun Würfel!“* Das drängt geradezu die Frage auf: *„Können wir aus dem einen Gebäude das andere bauen? Kann eine 9 so und so aussehen?“* Und auch das sind Fragen, die wieder praktisch beantwortet werden können und die dabei das Invarianzkonzept nutzen und bestätigen.

Diese und andere Übungen an Gebäuden (zum Beispiel die Arbeit mit Bauplänen) festigen den Spontanzugriff auf wahrnehmbare Zahlen und wiederkehrende Muster (8 als Doppelvier, 9 als Dreifachdrei) ebenso wie sie die Entwicklung von Invarianz der abstrakten Zahlen unterstützen und die operative Bedeutung der Symbole + und · untermauern. Sie fundieren damit von der Seite der strukturierten Zahl her die Entwicklung von an Bausteinen und Strukturen orientierten Rechenprozessen.

Konkrete Rechenhandlungen

Wie oben am Beispiel der Division dargestellt, bekommen die Kinder von mir alle Arten von Rechenaufgaben im Zahlraum bis etwa 24. Multiplikation und Division entstehen dabei ganz automatisch als flächige Rechenhandlungen (siehe 12 : 3 = 4 oben), während Addition und Subtraktion eher eine vorhandene Linie verlängern oder verkürzen (s. Kasten 7).

Es ist diese lineare Struktur der Addition und Subtraktion, die das Missverständnis unterstützt, Rechnen sei ein Verlängern oder Verkürzen der Zahlwortreihe. Aus diesem Grund ist es im Blick auf die Ablösung vom zählenden Rechnen förderlich, frühzeitig mit Operationen zu arbeiten, die ihrem Wesen nach nicht linear sind.

Die Einbeziehung von Multiplikation und Division hilft, solche Kinder zum Umgang mit Material zu bringen, die als schnelle Zähler bei einfachen Aufgaben keinen Vorteil in der Verwendung von Rechenmitteln sehen.

Wie sich auf den Fotos gut sehen lässt, führt das frei zu bewegende Material dazu, dass nicht nur die Lösung (eventuell abzählend) bestimmt werden kann. Die Verwandtschaft unterschiedlicher Aufgaben wird vor allem bei Subtraktion/Addition und Division/Multiplikation deutlich. So liegt zum Beispiel bei der Aufgabe 12 : 3 als Endstellung die Multiplikation 3 · 4 = 12 vor uns. Und die Subtraktion 6 – 4 = 2 zeigt einerseits die Subtraktion als Zerlegung und gleichzeitig die verwandten Aufgaben 6 – 2 = 4, 2 + 4 = 6 und 4 + 2 = 6. Ganz allgemein gilt: Je niedriger das Abstraktionsniveau des verwendeten Rechenmittels, umso sichtbarer bleiben die operativen Strukturen.

Da ich die konkreten Rechenhandlungen an anderer Stelle bereits beschrieben habe (u. a. in SWZ 114), möchte ich für den Aspekt der ersten Wochen hier nur noch auf einen wichtigen Teilaspekt hinweisen. Er ist zu beachten, wenn man früh die Grundlagen für den Aspekt des „Reversiblen Zehners“ legen will. Das Rechnen mit einer Wertebene (Einer, Zehner, Hunderter usw.) erfordert nämlich zwingend ein gut gefestigtes Zerlegungswissen. Ist dieses im Moment der Einführung nicht vorhanden, zwingt man das Kind zurück ins Zählen. Hier hilft noch einmal ein kleiner Selbstversuch mit Buchstabenzahlen. *Bevor Sie weiterlesen*, rechnen Sie bitte diese Aufgabe

F + G = _____

Haben Sie ‚M‘ als Lösung gefunden? M wäre richtig, wenn wir eine unstrukturierte Zahlreihe hätten. Aber unsere Zahlreihe strukturiert die Zahlen nach dem Zehner, also nach J. Wir sagen Drei-Zehn, also CJ. Würden wir diese Zehnerstruktur sichtbar machen, also CJ schreiben oder wenigstens JC wie die Römer (XIII), dann wäre ganz klar: Hier gibt es eine Zehn und dazu kommen die Drei. Das Zählzeichen würde zeigen, was man hört und denkt. Wir haben aber ein Stellenwertsystem und schreiben für das Zahl*wort* CJ das Zahl*zeichen* AC. Die richtige Lösung heißt also: F + G = AC und dazu sprechen wir F + G = CJ. Wenn Sie das verwirrt, dann erkennen Sie die Konfusion des Kindes (s. Kasten 8, links).

Je einfacher strukturiert das Rechenmittel, umso sichtbarer bleiben die operativen Strukturen.

Wenn das nun kompetent im Zehnerübergang gerechnet werden soll, also mit Zehnerzerlegung, dann müssen Sie im ersten Schritt wissen, wie viel von F bis AZ (so schreibt man „J“ mit Z als 0) fehlen. Wenn Sie das nicht wissen, müssen Sie zählen. Wenn Sie herausbekommen haben, dass F + D = AZ (also: „J“) ist, dann müssen Sie nun noch wissen, wie viel von D

bis G fehlen – ohne Zerlegungswissen ein weiterer Zählanlass.

Der für das Kind verfrühte Zehnerübergang ist ein wesentlicher Faktor für die Fixierung auf zählende Rechenverfahren (vgl. Gerster/Schultz, S. 85–97).

Deshalb arbeite ich nicht mit Zehnern, sondern wie in Kasten 8 rechts sichtbar mit konkreten Fünfern: Die Zehn entsteht aus den beiden Fünfern. Die Drei entsteht gut sichtbar aus den Fünferresten 1 und 2.

Ab etwa der 8. Schulwoche achte ich darauf, dass das für dieses Rechnen notwendige Zerlegungs- und Operationswissen bis 5 gut automatisiert wird.

Frühe Automatisierung eines Kernbestandes

Die Automatisierung der Zerlegungen und Operationen bis 5 ist vergleichsweise einfach, weil alle Bestandteile mit einem Blick erfassbar sind. Wichtig ist dabei zweierlei:

1. Erstens geht es wirklich um diesen kleinen Zahlraum. Schon wenn man auf 6 und 7 übergeht, wächst die Anzahl der Zerlegungen rapide und es entstehen Teile, die nicht auf einen Blick erfassbar sind (7 = 2 + **5**) und die daher zum Weiterzählen verführen. *Lieber erstmal nur bis 3 und dann bis 4 zerlegen, aber dies wirklich spontan im Zugriff, also auf einen Blick!*

Der verfrühte Zehnerübergang ist ein wesentlicher Faktor für die Fixierung auf zählende Rechenverfahren.

2. Zweitens sollen die Zerlegungen auch im Zusammenhang mit Addition, Subtraktion und Ergänzungsaufgaben geübt werden, also nicht nur mit der Schüttelbox!

Probieren Sie es mit Buchstabenzahlen aus (0 = Z). Nehmen Sie sich D Würfel und machen Sie sich kurz die möglichen Zerlegungen klar. Versuchen Sie auch zu verstehen, was Ergänzungsaufgaben mit den Zerlegungen zu tun haben. Und dann bearbeiten Sie Aufgaben wie in Kasten 9.

Ab etwa der achten bis zehnten Unterrichtswoche verbinde ich Verschiedenes:

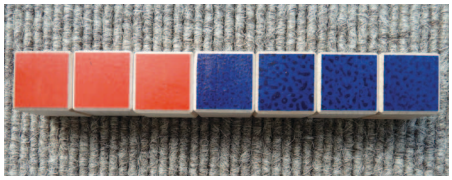


Abb. 1: Sichtbare Summanden (3 + 4 = 7)

- Zum einen mache ich Übungen zum Zerlegen der Zahlen bis 5, täglich, und nicht als Partnerarbeit, sondern frontal gemeinsam, um wirklich hohes Tempo und spontane Reaktion zu erreichen.
- Zweitens setze ich Arbeitsblätter in der Art der Übung oben ein, damit der Zusammenhang zwischen den Operationen und den Zerlegungen in diesem Zahlenraum geläufig wird (s. Abb. 1).
- Drittens wechsele ich vom homogenen Material der Naturholzwürfel auf zweifarbige Würfel, weil hierbei auch in der Addition der Zerlegungsaspekt sichtbar bleibt.
- Ich gebe in dieser Phase nur Aufgaben im Zahlenraum bis 10, da darin die Bausteine bis 4 häufig auftauchen.
- Schließlich überprüfe ich in Tempotests den Grad der Automatisierung (s. Testblatt M1).

Am Ende der ersten zehn Wochen haben die Kinder auf diesem Weg ein kardinal geprägtes und nicht in erster Linie ein aus der Zahlreihe abgeleitetes Zahlkonzept. Sie besitzen klare operative Vorstellungen bezüglich der vier Grundrechenarten und ihrer strukturellen Eigenschaften. Und sie haben einen Kernbestand von abrufbarem Wissen, der ihnen deutlich macht, dass Rechnen etwas anderes ist als zählendes Lösen. Ihnen ist bewusst, dass es fortan darum geht, diesen Kernbestand auszudehnen.

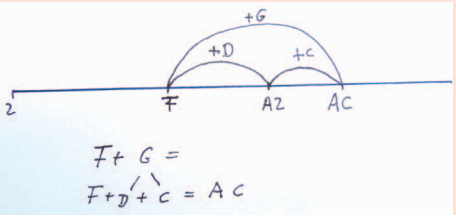
Anmerkungen zum Testblatt (M1)

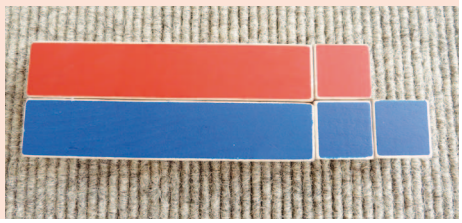
Anweisungen:

1. Schwarzen und bunten Stift bereitlegen.
2. Verfahren erklären.
3. Auf „Los“ mit dem schwarzen Stift beginnen – erst die Zerlegungshäu-

$F + G = AC$

orientiert am Zehner *orientiert am Fünfer*





Kasten 8: Rechnen in Zehner- und Fünferlogik

D	
C	
A	
	Z
	A
	B

$B + __ = D$
$D + __ = D$
$A + __ = D$

$__ + B = D$
$__ + Z = D$

$D - C = __$
$D - A = __$
$D - B = __$

$D = __ + C$
$D = __ + B$

$D - __ = Z$
$D - __ = B$
$D - __ = A$

$A = D - __$
$C = D - __$

Kasten 9: Zerlegung und Operationen im Zusammenhang üben

Testblatt

Name: _____ (Klasse _____) (10. Woche)

1. Zerlegung bis 5

2	
1	
2	
0	
	1
	0
	2

3	
1	
3	
2	
0	
	1
	0
	2
	3

4	
3	
2	
0	
1	
	4
	1
	0
	2
	3

5	
3	
2	
4	
0	
1	
	2
	1
	5
	3

2 Stifte:
Alle 15 Sekunden Stiftwechsel!

2. Addition bis 5

2 + 3 = _____ 3 + _____ = 5 4 = _____ + 2 3 = 2 + _____

4 + 1 = _____ 2 + _____ = 4 5 = _____ + 3 4 = 0 + _____

3 + 1 = _____ 0 + _____ = 5 3 = _____ + 3 5 = 4 + _____

5 + 0 = _____ 1 + _____ = 3 5 = _____ + 1 4 = 1 + _____

Zeit:

3. Subtraktion bis 5

5 – 3 = _____ 3 – _____ = 1 3 = _____ – 1 3 = 5 – _____

4 – 1 = _____ 5 – _____ = 3 5 = _____ – 0 1 = 4 – _____

3 – 3 = _____ 4 – _____ = 4 1 = _____ – 3 2 = 3 – _____

5 – 0 = _____ 5 – _____ = 2 0 = _____ – 4 0 = 5 – _____

Zeit:

4. Rechenstrich

Wo steht die **4**?

0_____5

Wo stehen **3** und **8**?

0 _____ 10

Zeit:

ser, dann die Rechnungen der Reihe nach.
4. Alle 15 Sekunden klatscht man und die Kinder wechseln den Stift.
5. Maximale Bearbeitungszeit: 5 Minuten
6. Wer fertig ist, dreht das Blatt um.

Auswertung: In die Kästen schreibt man die benötigte Zeit.

Die ersten beiden Farbabschnitte zeigen, wie viele Aufgaben das Kind in 30 Sekunden lösen kann. Da es hier sehr einfach ist, hat man einen Wert für das Tempo des Kindes.

Wenn sich das bei den anderen Aufgaben nicht verändert, sind diese Aufgaben genauso abrufbar, also im Zusammenhang verstanden. Es sei denn, das Kind arbeitet von Anfang an langsam, weil es alles zählt.

Ein Maß für spontan gewusste Ergebnisse bekommt man durch die schnellen Rechner in der Klasse, welche die Ergebnisse nur hinschreiben. Unter 3 Minuten sind ein gutes Ergebnis, unter 4 Minuten in Ordnung, wenn alles richtig ist. Wer in 5 Minuten nicht fertig wird, ist zu langsam.

Wenn ein Kind die Zahl am Rechenstrich schlecht platziert oder sich Zählstriche macht, sind das Hinweise auf eine fehlende Wertorientierung und das Angewiesensein auf zählende Verfahren. ■

Literatur

Gerster, H. D./Schultz, R. (2006): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte, Freiburg 2004. (Download unter: opus.bsz-bw.de/phfr/volltexte/2007/16/pdf/gerster.pdf)

Rödler, Klaus (2006): Erbsen, Bohnen, Rechenbrett – Rechnen durch Handeln, Seelze.

Rödler, Klaus (2007): Die rotblauen Würfel und Fünferstangen – Rechnen durch Handeln, Seelze.

Rödler, Klaus (2010): Dyskalkulieprävention durch das Rechnen mit Bündelungsobjekten. In: Sache-Wort-Zahl, H. 114, 38. Jg., S. 44–48.

Link

www.rechnen-durch-handeln.de

Anschrift des Autors

Dr. Klaus Rödler (Grundschullehrer und Fortbildner), Reuterweg 69, 60323 Frankfurt/Main, E-Mail: klaus.roedler@onlinehome.de

Denken statt Rechnen

Brigitte Glaser

Für viele Kinder bedeutet Rechnen eher Zählen als Denken. Zu früh unterrichtete Rechenvorschriften tragen dazu bei. Wird das Teilschrittverfahren zum falschen Zeitpunkt unterrichtet, kann es das Denken der Kinder verhindern und ihr zählendes Rechnen eher fördern.

Einleitung

Eine der wichtigsten Aufgaben des Mathematikunterrichts in den ersten zwei Jahren der Grundschule ist die Ablösung vom zählenden und die Hinführung zum denkenden Rechnen. Deshalb wird in der ersten Klasse das Teilschrittverfahren (TSV) eingeführt, damit die Kinder nichtzählend „über den Zehner“ kommen. Ich möchte Ihnen in diesem Artikel zeigen,

- dass das Lehren des Teilschrittverfahrens in Klasse 1 für viele Kinder nicht sinnvoll ist, weil es zu einem Zeitpunkt unterrichtet wird, an dem die Voraussetzungen dafür fehlen;
- was diese Voraussetzungen sind;
- welche anderen Strategien sich anbieten, die für viele Kinder leichter nachvollziehbar sind;
- dass diese anderen Strategien nicht unbedingt einfacher sind (auch sie brauchen bestimmte Voraussetzungen), aber interessanter, motivierender und „mathematischer“ sind: „Die größte Tugend der Mathematik ist ihre Flexibilität.“ (Freudenthal 1973, S. 76)

Das Teilschrittverfahren

Das Teilschrittverfahren (TSV) schreibt vor, dass man 8 + 4 rechnen soll als 8 + 2 + 2, 19 + 6 als 19 + 1 + 5, 270 + 50 als 270 + 30 + 20. Der erste Summand bleibt als Ganzes bestehen, der zweite Summand wird auf eine vorgeschriebene Art und Weise zerlegt:

- Der erste Summand muss zum nächsten Zehner (Hunderter, Tausender, ...) ergänzt werden und
- der Rest des zweiten Summanden wird addiert.

Die Begriffe Zehnerüberschreitung und TSV werden oft nicht sauber voneinander getrennt bzw. gleichgesetzt. Als Zehnerüberschreitung kann man alles bezeichnen, was über den Zehner führt. Das TSV ist jedoch ein Verfahren, das genau vorschreibt, wie zu rechnen ist:

„Der sogenannte Zehnerübergang im ‚Teilschrittverfahren‘ beruht auf einer ganz bestimmten Verwendung des Assoziativgesetzes der Addition: Der zweite Summand wird passend zerlegt, ... Die Festlegung dieses Rechenwegs als Norm widerspricht aber dem Wesen der Mathematik. ... Es gibt also nicht *den* Zehnerübergang,