

# Grundlagen der Theoretischen Informatik

## 3. Endliche Automaten (III)

7.05.2015

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: [sofronie@uni-koblenz.de](mailto:sofronie@uni-koblenz.de)

# Organisatorisches

---

- **1. Teilklausur:** Mittwoch, 10.06.2015, D028, 14:00-15:00  
Informationen werden über KLIPS zugeschickt.
- **2. Teilklausur:** Doodle  
Heute: E-Mail in KLIPS.

Übungszettel: schon am Donnerstag verfügbar.

# Übersicht

---

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

# DEA/NDEA

**Definition.** ((Determinierter) endlicher Automat) Ein **endlicher Automat** (e.a., **DEA**) ist ein Tupel  $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$ . Dabei ist

- $K$  eine endliche Menge von Zuständen,
- $\Sigma$  ein endliches Alphabet
- $\delta : K \times \Sigma \rightarrow K$  die totale(!) Übergangsfunktion,
- $s_0 \in K$  der **Startzustand**, und
- $F \subseteq K$  die Menge der finalen Zustände.

**Definition** (Indeterminierter endlicher Automat) Ein **indeterminierter** endlicher Automat (NDEA) ist ein Tupel  $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$ . Dabei ist

- $K$  eine endliche Menge von Zuständen,
- $\Sigma$  ein endliches Alphabet,
- $\Delta \subseteq (K \times \Sigma) \times K$  eine Übergangsrelation,
- $I \subseteq K$  eine **Menge von Startzuständen**,
- $F \subseteq K$  eine Menge von finalen Zuständen.

# Determiniert / indeterminiert

---

## Determinierter endlicher Automat

- Für einen Zustand  $q$  und eine Eingabe  $a$   
genau ein einziger Nachfolgezustand
- festgelegt durch Übergangsfunktion  $\delta$

## Indeterminierter endlicher Automat

- Für einen Zustand  $q$  und eine Eingabe  $a$   
evtl. mehrere Nachfolgezustände – oder gar keiner
- festgelegt durch Übergangsrelation  $\Delta$

# Übergangsfunktion

---

**DEA:**  $\delta^* : K \times \Sigma^* \rightarrow K$  ist strukturell rekursiv über  $\Sigma^*$  definiert:

$$\begin{aligned}\delta^*(q, \varepsilon) &:= q \\ \delta^*(q, wa) &:= \delta(\delta^*(q, w), a)\end{aligned}$$

**NDEA:**  $\Delta^* \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$  ist definiert durch:

$$\begin{aligned}\Delta^*((q, \varepsilon), q') &\quad \underline{\text{gdw}} \quad q' = q \\ \Delta^*((q, wa), q') &\quad \underline{\text{gdw}} \quad \exists q'' \in K (\Delta^*((q, w), q'') \wedge \Delta((q'', a), q'))\end{aligned}$$

# Akzeptierte Sprache

---

**Definition (Von einem DEA Automaten akzeptierte Sprache).** Die von einem Automaten  $\mathcal{A}$  **akzeptierte** Sprache, ist definiert als

$$L(\mathcal{A}) := \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(s_0, w) \in F\}$$

Die Menge **RAT** :=  $\{L \mid \text{es gibt einen endlichen Automaten } \mathcal{A} \text{ mit } L = L(\mathcal{A})\}$  der von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen heißt **Menge der rationalen Sprachen**

**Definition** (Von einem NDEA akzeptierte Sprache)

Die von einem indeterminierten endlichen Automaten  $\mathcal{A}$  **akzeptierte** Sprache ist

$$L(\mathcal{A}) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists s_0 \in I \exists q \in F : \Delta^*((s_0, w), q)\}$$

# Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

---

**Theorem.** DEA gleich mächtig wie NDEA

Eine Sprache ist rational

(es gibt einen **determinierten** endlichen Automaten, der sie akzeptiert)

gdw

es gibt einen **indeterminierten** endlichen Automaten, der sie akzeptiert.

Beweis. „ $\Rightarrow$ “:

- Sei  $L$  eine rationale Sprache.
- Dann gibt es laut Definition einen determinierten endlichen Automaten  $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$  mit  $L = L(\mathcal{A}_{\text{DEA}})$ .
- Jeder determinierte endliche Automat ist aber insbesondere auch ein (besonderer) indeterminierter endlicher Automat.



# Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

---

**Theorem.** DEA gleich mächtig wie NDEA

Eine Sprache ist rational

(es gibt einen **determinierten** endlichen Automaten, der sie akzeptiert)

gdw

es gibt einen **indeterminierten** endlichen Automaten, der sie akzeptiert.

Beweis „ $\Leftarrow$ “:

Sei  $\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$  ein (beliebiger) indeterminierter endlicher Automat. Er akzeptiert die Sprache  $L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}})$ .

**Beweisidee:** Konstruiere aus  $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$  einen determinierten Automaten  $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$  mit

$$L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}}) = L(\mathcal{A}_{\text{DEA}})$$

mit Hilfe einer Potenzmengenkonstruktion ...

# Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

---

Beweis (Fortsetzung)

Fortsetzung ...

- Zustände in  $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$  bestehen aus Mengen von Zuständen von  $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$
- Wenn man in  $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$  mit  $w$  nach  $q_1, \dots, q_n$  gelangt, dann gelangt man in  $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$  mit  $w$  nach  $q' = \{q_1, \dots, q_n\}$ .
- Initialer Zustand von  $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$ :  
Menge aller initialen Zustände von  $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$
- Finale Zustände von  $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$ :  
Jede Menge von Zustände, die einen finalen Zustand von  $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$  enthält

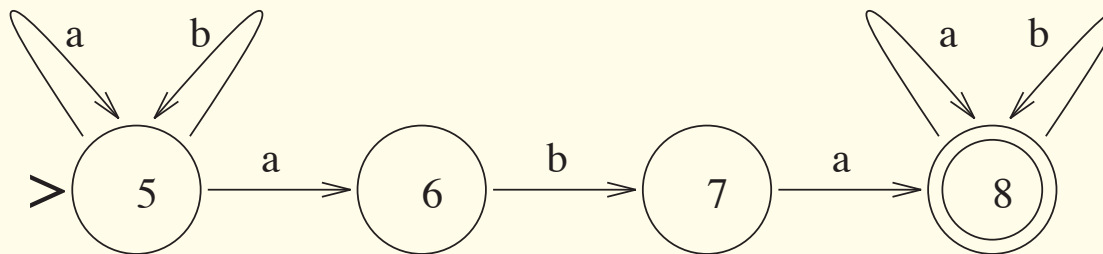
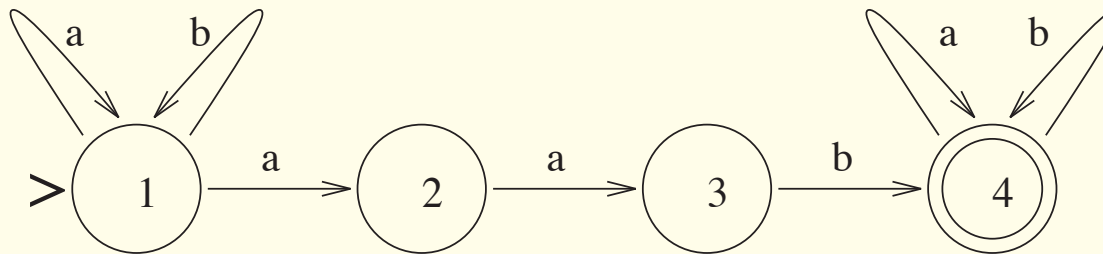
# Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

---

## Zunächst ein konkretes Beispiel

Ein NDEA, der die folgende Sprache akzeptiert:

$$L_{aab/aba} = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ hat } aab \text{ oder } aba \text{ als Teilwort}\}$$



# Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

---

Zunächst ein konkretes Beispiel

**Startzustand:**

Menge der alten Startzustände, also  $\{1, 5\}$ .

**Nächster Schritt:**

Übergang von  $\{1, 5\}$  mit  $a$

$$\Delta(1, a) = \{1, 2\}$$

$$\Delta(5, a) = \{5, 6\}$$

Also, neuer Zustand  $\{1, 2, 5, 6\}$  mit

$$\delta_{\mathcal{A}_{\text{DEA}}}(\{1, 5\}, a) = \{1, 2, 5, 6\}$$

# Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

---

Zunächst ein konkretes Beispiel

**Nächster Schritt:**

Übergang von  $\{1, 5\}$  mit  $b$ .

$$\Delta(1, b) = \{1\}$$

$$\Delta(5, b) = \{5\}$$

Für den Eingabebuchstaben  $b$  bleibt  $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$  also im Startzustand.

# Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

---

Zunächst ein konkretes Beispiel

**Nächster Schritt:**

Übergang von  $\{1, 2, 5, 6\}$  mit  $a$

$$\Delta(1, a) = \{1, 2\}$$

$$\Delta(2, a) = \{3\}$$

$$\Delta(5, a) = \{5, 6\}$$

$$\Delta(6, a) = \emptyset$$

Also, neuer Zustand  $\{1, 2, 3, 5, 6\}$  mit

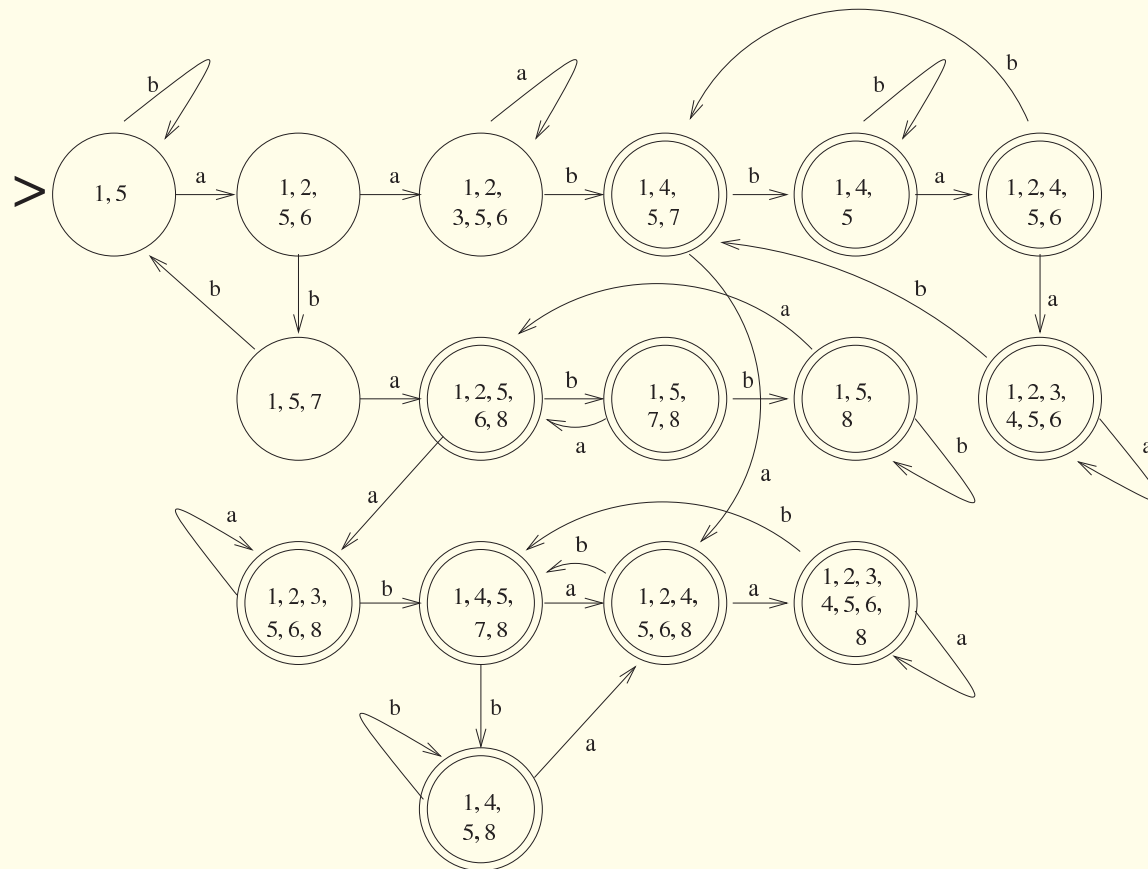
$$\delta_{\mathcal{A}_{\text{DEA}}}(\{1, 2, 5, 6\}, a) = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

usw.

# Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

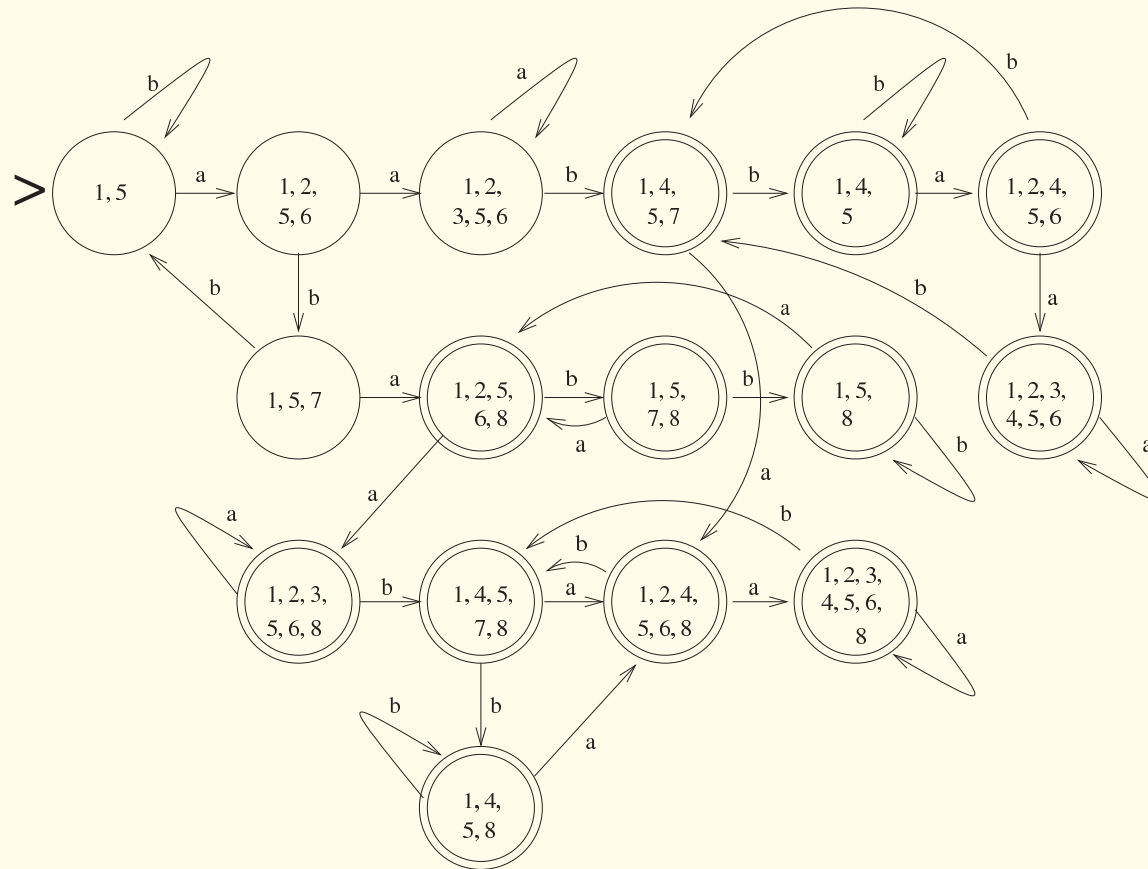
Es ergibt sich folgender determinierter Automat  $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$ :



# Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Es ergibt sich folgender determinierter Automat  $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$ :



Übergänge aller finalen Zustände führen in finale Zustände.

**Vereinfachung:** Man könnte die finalen Zustände zu einem zusammenfassen



# Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

---

Beweis (Fortsetzung)

**Konstruktion des determinierten endlichen Automaten  $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$  formal:**

**Gegeben:** Indeterminierter endlicher Automat

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

**Wir konstruieren:** Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

mit

- $K' = 2^K$  (die Potenzmenge von  $K$ )
- Übergangsfunktion

$$\delta' : 2^K \times \Sigma \rightarrow 2^K \quad \text{mit} \quad \delta'(M, a) := \bigcup_{q \in M} \Delta(q, a)$$

# Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

---

Beweis (Fortsetzung)

**Konstruktion des determinierten endlichen Automaten  $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$  formal:**

**Gegeben:** Indeterminierter endlicher Automat

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

**Wir konstruieren:** Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

mit

- $I' = I$  (die Menge der initialen Zustände von  $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$ )
- $F' = \{M \subseteq K \mid M \cap F \neq \emptyset\}$   
(alle Zustandsmengen von  $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$ , die einen finalen Zustand enthalten)

# Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

---

Beweis (Fortsetzung)

**Konstruktion des determinierten endlichen Automaten  $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$  formal:**

**Gegeben:** Indeterminierter endlicher Automat

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

**Wir konstruieren:** Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

mit

**Merke:**

- $\emptyset \in K'$
- $\delta'(\emptyset, x) = \emptyset$  für alle  $x \in \Sigma$

# Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

---

Beweis (Fortsetzung)

**Lemma:** Für alle  $w \in \Sigma^*$ :  $\delta'^*(M, w) = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w)$

# Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

---

Beweis (Fortsetzung)

**Lemma:** Für alle  $w \in \Sigma^*$ :  $\delta'^*(M, w) = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w)$

Beweis durch Induktion über die Länge von  $w$ :

**Induktionsanfang:**  $|w| = 0$

$$\delta'^*(M, \varepsilon) = M = \bigcup_{q \in M} \{q\} = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, \varepsilon)$$

# Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

---

Beweis (Fortsetzung)

**Lemma:** Für alle  $w \in \Sigma^*$ :  $\delta'^*(M, w) = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w)$

**Induktionsschritt:**

$$\begin{aligned} & \delta'^*(M, wa) \\ = & \delta'(\delta'^*(M, w), a) && \text{Def. von } * \\ = & \bigcup_{p \in \delta'^*(M, w)} \Delta(p, a) && \text{Definition von } \delta' \\ = & \bigcup_{p \in (\bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w))} \Delta(p, a) && \text{Ind.-Vor. für } \delta'(M, w) \\ = & \{q' \mid \exists q \in M \exists p \in \Delta^*(q, w) : q' \in \Delta(p, a)\} \\ = & \{q' \mid \exists q \in M q' \in \Delta^*(q, wa)\} && \text{Def. von } * \\ = & \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, wa) \end{aligned}$$

# Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

---

Beweis (Schluss)

Es gilt für alle  $w \in \Sigma^*$ :

$w \in L(\mathcal{A}_{\text{DEA}})$

gdw  $\delta'^*(I', w) \in F'$  (Def. der Sprache eines Automaten)

gdw  $\delta'^*(I, w) \in F'$  (da  $I' = I$  per Def.)

gdw  $\delta'^*(I, w) \cap F \neq \emptyset$  (Def. von  $F'$ )

gdw  $\bigcup_{q \in I} \Delta^*(q, w) \cap F \neq \emptyset$  (nach Lemma)

gdw  $\exists q \in I \exists q' \in F (q' \in \Delta^*(q, w))$

gdw  $w \in L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}})$  (Def. der Sprache eines Automaten)

**Damit:**  $L(\mathcal{A}_{\text{DEA}}) = L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}})$   $\square$

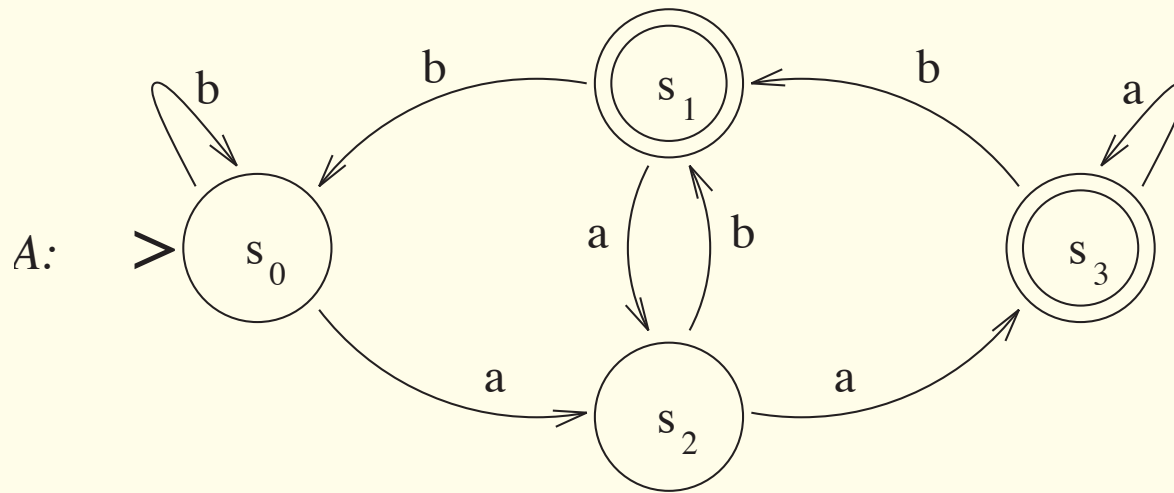
# Beispiel

---

**Determinierter** Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^* \{a\} \{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über  $\{a, b\}$ , deren zweitletzter Buchstabe  $a$  ist)



**Idee:** Im Zustand jeweils die letzten zwei Buchstaben merken



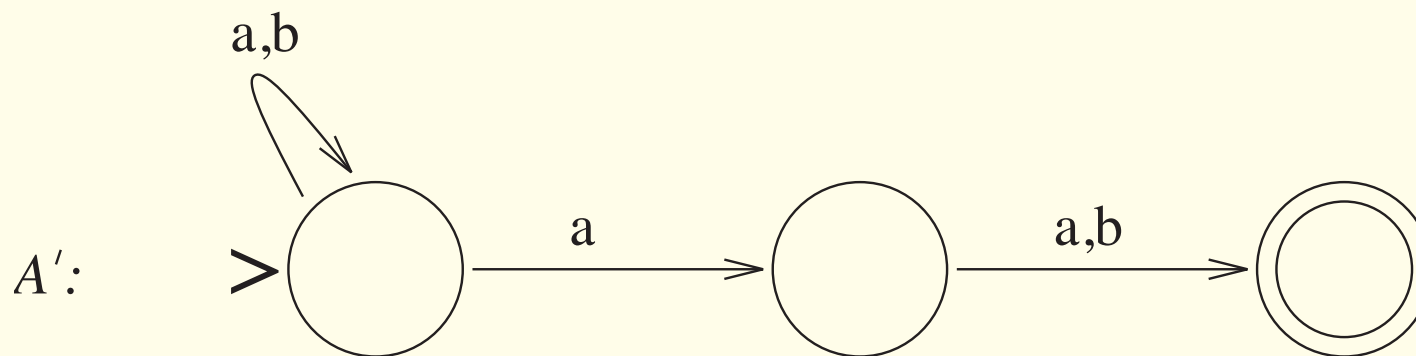
# Beispiel

---

**Indeterminierter** Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^* \{a\} \{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über  $\{a, b\}$ , deren zweitletzter Buchstabe  $a$  ist)



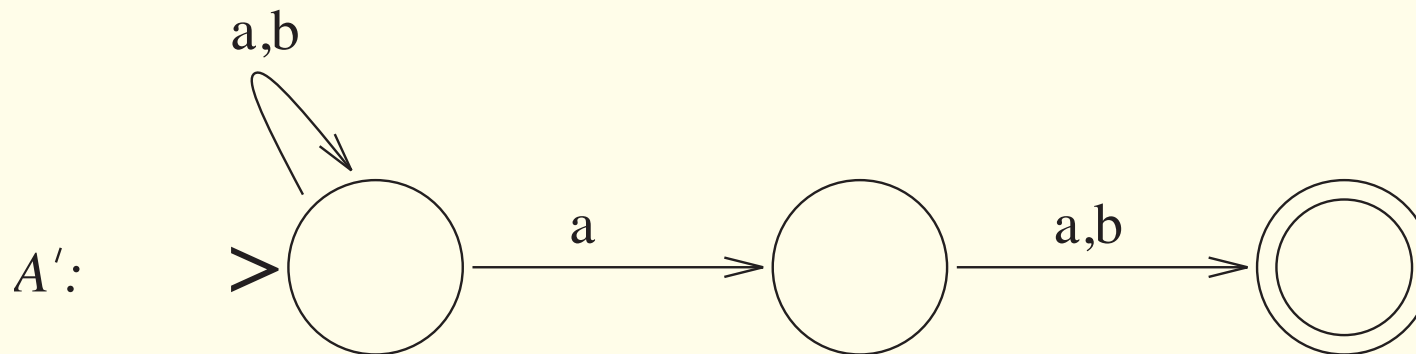
# Beispiel

---

**Indeterminierter** Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^* \{a\} \{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über  $\{a, b\}$ , deren zweitletzter Buchstabe  $a$  ist)



**Konstruktion des determinierten endlichen Automaten:** an der Tafel.

# Übersicht

---

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

# Automaten mit epsilon-Kanten

---

# Automaten mit $\varepsilon$ -Kanten

---

## Vom NDEA zum Automaten mit $\varepsilon$ -Kanten

Bisher (NDEA): Kanten mit einem **Buchstaben** beschriftet

Jetzt (**Automat mit  $\varepsilon$ -Kanten**): Kanten mit einem **Wort** beschriftet  
Es darf auch das leere Wort  $\varepsilon$  sein!

# Automaten mit $\varepsilon$ -Kanten

---

## Vom NDEA zum Automaten mit $\varepsilon$ -Kanten

Bisher (NDEA): Kanten mit einem **Buchstaben** beschriftet

Jetzt (**Automat mit  $\varepsilon$ -Kanten**): Kanten mit einem **Wort** beschriftet  
Es darf auch das leere Wort  $\varepsilon$  sein!

## Ein Automaten mit $\varepsilon$ -Kanten kann ...

- in einem Schritt ein ganzes Wort verarbeiten
- einen Zustandsübergang machen, ohne dabei einen Buchstaben zu lesen

# Automaten mit $\varepsilon$ -Kanten: Definition

---

**Definiton.** Ein **Automat mit  $\varepsilon$ -Kanten ( $\varepsilon$ -NDEA)**  $A$  ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Dabei ist

- $K$  eine endliche Menge von Zuständen,
- $\Sigma$  ein endliches Alphabet,
- $\Delta \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$  eine (endliche) Übergangsrelation,
- $I \subseteq K$  eine Menge von Startzuständen,
- $F \subseteq K$  eine Menge von finalen Zuständen

# Automaten mit $\varepsilon$ -Kanten: Übergangsrelation

**Definition. (Erweiterung von  $\Delta$  zu  $\Delta^*$ )**

$$\Delta^* \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$$

ist (ähnlich wie für NDEAs) definiert durch:

$$\Delta^*((q, \varepsilon), q') \quad \underline{\text{gdw}} \quad q' = q \quad \text{oder} \quad \Delta((q, \varepsilon), q')$$

$$\Delta^*((q, w_1 w_2), q') \quad \underline{\text{gdw}} \quad \exists q'' \in K$$
$$\Delta^*((q, w_1), q'') \vee \Delta((q, w_1), q'')$$
$$\wedge$$
$$\Delta^*((q'', w_2), q') \vee \Delta((q'', w_2), q')$$



# Automaten mit $\varepsilon$ -Kanten: Akzeptierte Sprache

---

**Definition.** Die von einem Automaten mit  $\varepsilon$ -Kanten

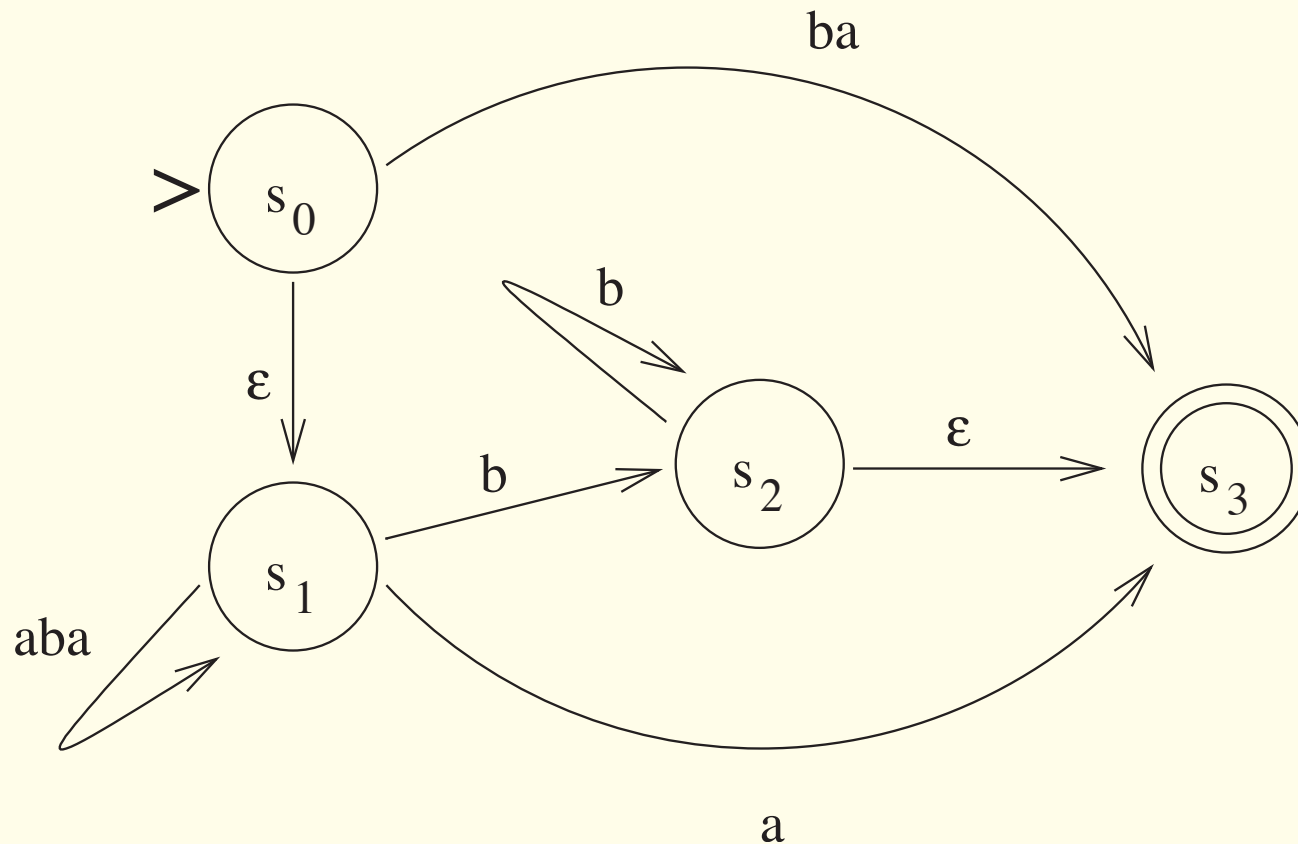
$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

akzeptierte Sprache ist

$$L(\mathcal{A}) := \{ w \in \Sigma^* \mid \exists s_0 \in I \exists q \in F \Delta^*( (s_0, w) q) \}$$

# Automaten mit $\epsilon$ -Kanten: Beispiel

## Beispiel



Akzeptiert:  $\{aba\}^* \{b\} \{b\}^* + \{aba\}^* \{a\} + \{ba\}$

# Gleichmächtigkeit von Automaten mit $\varepsilon$ -Kanten und NDEAs

---

## Theorem ( $\varepsilon$ -NDEA gleich mächtig wie NDEA)

Zu jedem Automaten mit  $\varepsilon$ -Kanten  $\mathcal{A}$  existiert ein indeterminierter endlicher Automat  $\mathcal{A}'$  mit

$$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$$

# Gleichmächtigkeit: Beweis

---

Transformation von  $\mathcal{A}$  in einen NDEA ohne  $\varepsilon$ -Kanten

## 1. Ersetze Übergänge:

- mit nur einem Buchstaben markiert  $\rightarrow$  **beibehalten**
- mit einem Wort  $w$  markiert ( $|w| = n$ )  $\rightarrow$  **ersetze durch  $n$  Übergänge**  
(verwende  $n - 1$  neue, zusätzlicher Zustände)
- $\varepsilon$ -Übergänge  $\rightarrow$  statt diesen

$$\Delta( (q, a), q'' )$$

für jedes Paar

$$\Delta( (q, a), q' ) \quad \text{und} \quad \Delta( (q', \varepsilon), q'' )$$

# Gleichmächtigkeit von Automaten mit $\varepsilon$ -Kanten und NDEAs

---

Beweis (Fortsetzung)

Transformation von  $\mathcal{A}$  in einen NDEA ohne  $\varepsilon$ -Kanten

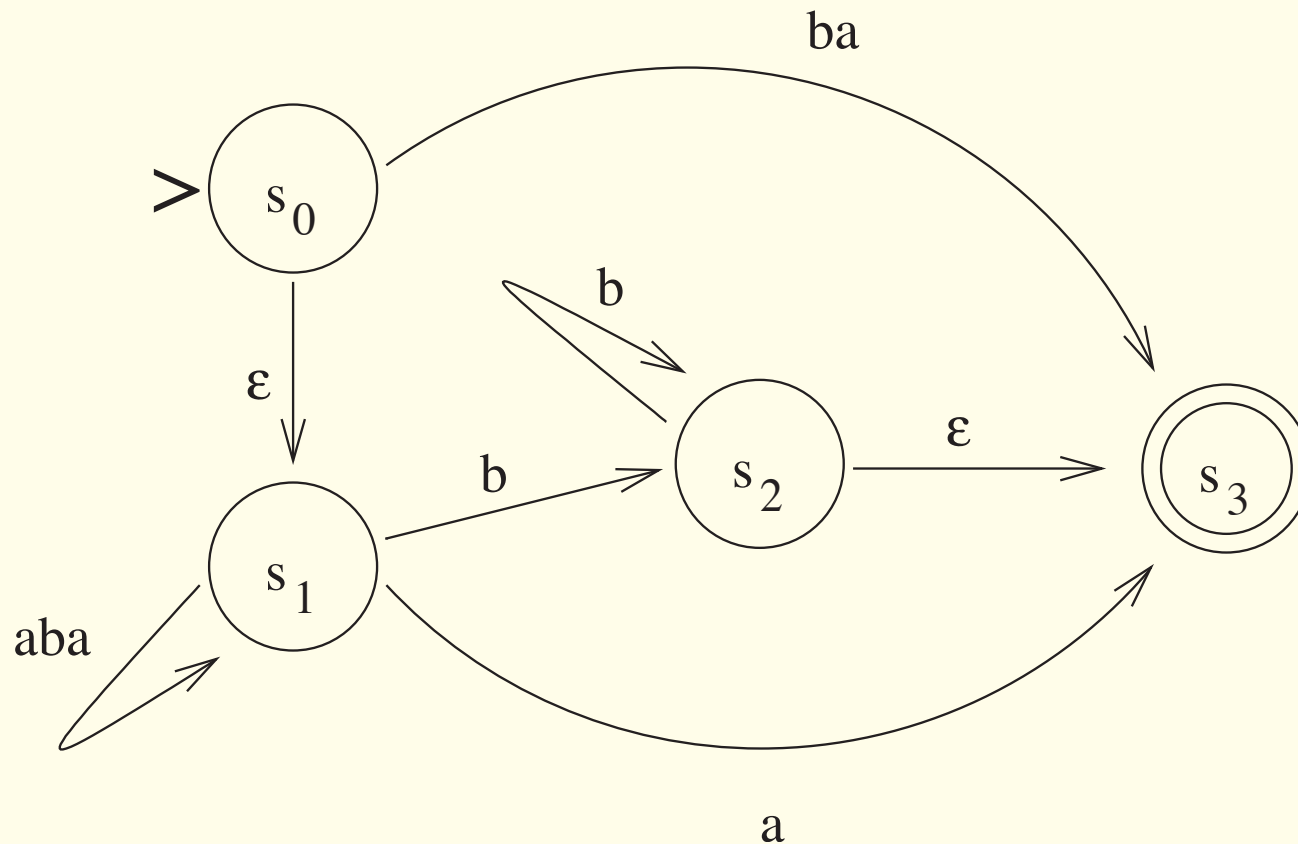
## 2. Zusätzliche Initialzustände:

Falls  $q \in I$  und  $\Delta^*((q, \varepsilon), q')$ , dann auch  $q' \in I$

## 3. Finalzustände bleiben unverändert

# Gleichmächtigkeit: Beispiel

Beispiel. Der Automat mit  $\varepsilon$ -Kanten ...



Akzeptiert:  $\{aba\}^* \{b\} \{b\}^* + \{aba\}^* \{a\} + \{ba\}$

# Gleichmächtigkeit: Beispiel

---

## 1. Ersetze Übergänge:

- Die mit einem Buchstaben markierten Übergänge: beibehalten.

$s_1 \xrightarrow{b} s_2$  und  $s_2 \xrightarrow{b} s_2$  bleiben.

- Übergang  $s_1 \xrightarrow{aba} s_1$ :

Neue Zustände:  $p_{(aba,1)}$ ,  $p_{(aba,2)}$ .

Übergang  $s_1 \xrightarrow{aba} s_1$  ersetzt durch

$s_1 \xrightarrow{a} p_{(aba,1)} \xrightarrow{b} p_{(aba,2)} \xrightarrow{a} s_1$ .

- Übergang  $s_0 \xrightarrow{ba} s_3$ :

Neuer Zustand:  $p_{(ba,1)}$ .

Übergang  $s_0 \xrightarrow{ba} s_3$  ersetzt durch  $s_0 \xrightarrow{b} p_{(ba,1)} \xrightarrow{a} s_3$ .

# Gleichmächtigkeit: Beispiel

---

## 1. Ersetze Übergänge:

(Fortsetzung)

Statt  $\varepsilon$ -Übergänge:

- $\Delta((s_1, b), s_2)$  und  $\Delta((s_2, \varepsilon), s_3)$  : neuer Übergang:  $\Delta((s_1, b), s_3)$ .
- $\Delta((s_2, b), s_2)$  und  $\Delta((s_2, \varepsilon), s_3)$  : neuer Übergang:  $\Delta((s_2, b), s_3)$ .

## 2. Zusätzliche Initialzustände:

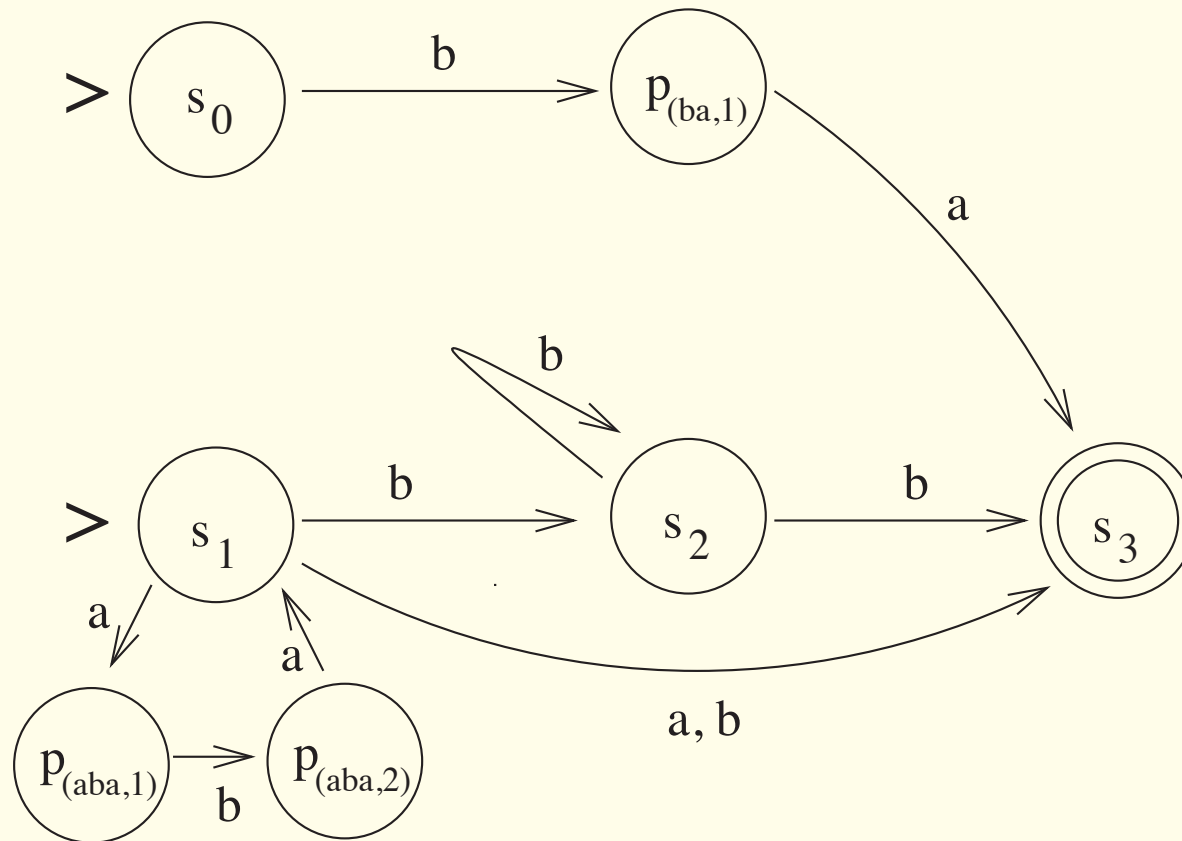
Da  $s_0 \in I$  und  $\Delta((s_0, \varepsilon), s_1)$ , dann auch  $s_1 \in I$ .

## 3. Finalzustände bleiben unverändert



# Gleichmächtigkeit: Beispiel

Beispiel. ... wird transformiert in den äquivalenten NDEA



# Übersicht

---

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

# Nächste Woche

---

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke