

# Grundlagen der Theoretischen Informatik

## 3. Endliche Automaten (V)

21.05.2015

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: [sofronie@uni-koblenz.de](mailto:sofronie@uni-koblenz.de)

# Bis jetzt

---

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

# Pumping-Lemma: Formal

---

## Theorem (Pumping-Lemma für $L_3$ -Sprachen)

Sei  $L \in \mathbf{RAT}$ . Dann existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass:

Für alle

$$x \in L \quad \text{mit} \quad |x| \geq n$$

existiert eine Zerlegung

$$x = uvw \quad u, v, w \in \Sigma^*$$

mit

- $|v| \geq 1$
- $|v| < n$
- $uv^m w \in L$  für alle  $m \in \mathbb{N}$

# Pumping-Lemma: Stärkere Variante

---

## Theorem (Pumping-Lemma für $L_3$ -Sprachen, stärkere Variante)

Sei  $L \in \mathbf{RAT}$ . Dann existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass:

Für alle

$$x \in L \quad \text{mit} \quad |x| \geq n$$

existiert eine Zerlegung

$$x = uvw \quad u, v, w \in \Sigma^*$$

mit

- $|v| \geq 1$
- $|uv| < n$  (statt  $|v| < n$ )
- $uv^m w \in L$  für alle  $m \in \mathbb{N}$

# Pumping-Lemma: Anwendung der stärkeren Variante

---

**Beispiel** (Palindrome)

Die Sprache der Palindrome

$$L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

ist nicht regulär

- Beweis gelingt **nicht** mit der schwächeren Variante des PL (die schwächere Version gilt für die Sprache)
- Beweis **gelingt** mit der stärkeren Varianten des PL

# Pumping-Lemma: Anwendung der stärkeren Variante

---

## Beispiel (Palindrome)

Die Sprache der Palindrome

$$L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

ist nicht regulär

**Annahme:**  $L$  ist regulär. Dann gilt für  $L_1$  das Pumping-Lemma. Sei  $n$  die Zahl aus dem Pumping-Lemma.

Dann muss sich das Wort  $a^n bba^n \in L$  aufpumpen lassen (da  $|a^n bba^n| \geq n$ ).

Sei  $a^n bba^n = uvw$  eine passende Zerlegung laut Lemma.

Da  $|uv| < n$ , ist  $u = a^i$ ,  $v = a^j$ ,  $w = a^k bba^n$ , wobei  $j > 0$  und  $i + j + k = n$

Aber dann  $uv^0w = a^{i+k} bba^n \notin L$ , da  $i + k < n$ . Widerspruch.

# Übersicht

---

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- **Abschlusseigenschaften und Wortprobleme**
- Rational = Reguläre Ausdrücke

# Abschlusseigenschaften

---

**Theorem.** Wenn  $L, L'$  reguläre Sprachen sind, dann sind auch

- $\bar{L}$
- $L \cup L'$
- $L \circ L'$
- $L^*$
- $L \cap L'$

reguläre Sprachen.

# Abschlusseigenschaften

---

Idee:

1)  $L = L(\mathcal{A})$  mit  $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$

- $\mathcal{A}_{\neg} = (K, \Sigma, \delta, s_0, K \setminus F)$

2)  $L = L(\mathcal{A}), L' = L(\mathcal{A}')$  mit  $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F), \mathcal{A}' = (K', \Sigma', \Delta', I', F')$

- $\mathcal{A}_{\cup} = (K \cup K', \Sigma, \Delta \cup \Delta', I \cup I', F \cup F')$
- $\mathcal{A}_{\circ} = (K \cup K', \Sigma, \Delta \cup \Delta' \cup (F \times \varepsilon) \times I', I, F')$
- $\mathcal{A}_{*} = (K \cup \{\varepsilon_{neu}\}, \Sigma, \Delta \cup (F \times \varepsilon) \times I, I \cup \{\varepsilon_{neu}\}, F \cup \{\varepsilon_{neu}\})$
- $L \cap L' = \overline{(\bar{L} \cup \bar{L}')}$

# Anwendung

---

## Beispiele:

1.  $L_{eq} = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  nicht regulär.
2.  $L_{neq} = \{w \mid \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$  nicht regulär.
3. Die Dycksprache  $D_k$  ist nicht regulär

# Anwendung

---

## Beispiele:

1.  $L_{eq} = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  nicht regulär.
2.  $L_{neq} = \{w \mid \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$  nicht regulär.
3. Die Dycksprache  $D_k$  ist nicht regulär
4.  $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

# Anwendung

---

## Beispiele:

1.  $L_{eq} = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  nicht regulär.
2.  $L_{neq} = \{w \mid \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$  nicht regulär.
3. Die Dycksprache  $D_k$  ist nicht regulär
4.  $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

**Beweis.** Annahme:  $L$  regulär.

Es ist leicht zu sehen, dass  $\{a^m b b a^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$  regulär. Dann ist auch:

$$L \cap \{a^m b b a^n \mid m, n \in \mathbb{N}\} = \{a^n b b a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ regulär}$$

Widerspruch:  $\{a^n b b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär (Pumping Lemma, stärkere Version).

# Wortprobleme

---

**Lemma.** Sei  $\mathcal{A}$  ein endlicher Automat.

Es ist entscheidbar, ob die Sprache  $L(\mathcal{A})$

1. leer ist.
2. unendlich ist.

# Wortprobleme

---

**Lemma.** Sei  $\mathcal{A}$  ein endlicher Automat.

Es ist entscheidbar, ob die Sprache  $L(\mathcal{A})$

1. leer ist.
2. unendlich ist.

## **Korollar**

Sei  $G$  eine rechtslineare Grammatik.

Es ist entscheidbar, ob die Sprache  $L(G)$

1. leer ist.
2. unendlich ist.

# Wortprobleme

---

Beweis.

**Zu 1.:**  $L(\mathcal{A})$  ist nicht leer

gdw

Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand.

# Wortprobleme

---

Beweis.

**Zu 1.:**  $L(\mathcal{A})$  ist nicht leer

gdw

Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand.

**Zu 2.:**  $L(\mathcal{A})$  ist unendlich

gdw

Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand, der einen Zyklus enthält.

Beides ist leicht zu überprüfen.

# Wortprobleme

---

## **Lemma.**

Seien  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  endliche Automaten.

Es ist entscheidbar, ob

(1)  $L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2) = \emptyset$

(2)  $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$

# Wortprobleme

---

Beweis.

Seien  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  endliche Automaten.

(1) Man kann zu  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  einen endlichen Automaten  $\mathcal{A}_\cap$  konstruieren mit  $L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2) = L(\mathcal{A}_\cap)$ .

Die Frage, ob  $L(\mathcal{A}_\cap) = \emptyset$  ist entscheidbar.

(2) Man kann zu  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  einen endlichen Automaten  $\mathcal{A}_=$  konstruieren mit

$$L(\mathcal{A}_=) = (L(\mathcal{A}_1) \cap \overline{L(\mathcal{A}_2)}) \cup (\overline{L(\mathcal{A}_1)} \cap L(\mathcal{A}_2))$$

Es gilt

$$L(\mathcal{A}_=) = \emptyset \quad \underline{\text{gdw}} \quad L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$$

Dies ist entscheidbar.

# Übersicht

---

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

# Rational = Reguläre Ausdrücke

---

# Hauptsatz von Kleene

---

## **Theorem (Hauptsatz von Kleene)**

Die durch endliche Automaten akzeptierten Sprachen sind genau die, die man durch reguläre Ausdrücke beschreiben kann.

# Reminder: Reguläre Ausdrücke

---

## Definition (Reguläre Ausdrücke)

Menge  $\mathcal{Reg}_\Sigma$  der **regulären Ausdrücke** (über  $\Sigma$ ) ist definiert durch:

1.  $\emptyset$  ist ein regulärer Ausdruck
2. Für jedes  $a \in \Sigma$  ist  $a$  ein regulärer Ausdruck
3. Sind  $r$  und  $s$  reguläre Ausdrücke, so auch
  - $(r + s)$  (Vereinigung),
  - $(rs)$  (Konkatenation),
  - $(r^*)$  (Kleene Stern)

Klammern können weggelassen werden, dann

- $*$  hat Vorrang vor Konkatenation
- Konkatenation hat Vorrang vor  $+$

# Reguläre Ausdrücke

---

**Definition** (Semantik regulärer Ausdrücke)

Ein regulärer Ausdruck  $r$  stellt eine Sprache  $\mathcal{I}(r)$  über  $\Sigma$  wie folgt dar:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(0) &:= \emptyset \\ \mathcal{I}(a) &:= \{a\} \quad \text{für } a \in \Sigma \\ \mathcal{I}(r + s) &:= \mathcal{I}(r) \cup \mathcal{I}(s) \\ \mathcal{I}(rs) &:= \mathcal{I}(r)\mathcal{I}(s) \\ \mathcal{I}(r^*) &:= \mathcal{I}(r)^*\end{aligned}$$

Wir benutzen auch das Makro ...

$$1 := 0^*$$

Es gilt:  $\mathcal{I}(1) = \{\varepsilon\}$

# Hauptsatz von Kleene

---

## Theorem (Hauptsatz von Kleene)

Die durch endliche Automaten akzeptierten Sprachen sind genau die, die man durch reguläre Ausdrücke beschreiben kann.

Beweis.

„ $\Rightarrow$ “ (schwierigere Richtung)

Gegeben ein DEA  $\mathcal{A}$ .

Zustände von  $\mathcal{A}$  seien  $q_1, \dots, q_n$ .

O.B.D.A. sei  $q_1$  der initiale Zustand von  $\mathcal{A}$

**Induktion** über die **Kompliziertheit** des Akzeptierens

# Hauptsatz von Kleene

---

Beweis.

„ $\Rightarrow$ “ (schwierigere Richtung)

Gegeben ein DEA  $\mathcal{A}$ .

Zustände von  $\mathcal{A}$  seien  $q_1, \dots, q_n$ .

O.B.D.A. sei  $q_1$  der initiale Zustand von  $\mathcal{A}$

**Induktion** über die **Kompliziertheit** des Akzeptierens

Dafür sei genauer:

$$R_{i,j}^k := \{w \in \Sigma^* : \delta^*(q_i, w) = q_j \text{ und für alle Präfixe } u \text{ von } w \\ \text{mit } \varepsilon \neq u \neq w \text{ gilt } \delta^*(q_i, u) \in \{q_1, q_2, \dots, q_k\}\}$$

# Hauptsatz von Kleene: Beweis

---

Beweis (Forts.)

Offensichtlich ist

$$L(\mathcal{A}) = \bigcup_{q_f \in F} R_{1,f}^n$$

Es genügt zu zeigen:

Alle Mengen  $R_{1,f}^n$  sind durch reguläre Ausdrücke beschreibbar.

Dazu: Durch Induktion über  $k$  (an der Tafel):

Für alle  $1 \leq i, j \leq n$ :  $R_{1,j}^k$  ist durch einen regulären Ausdruck beschreibbar.

# Hauptsatz von Kleene: Beweis

---

Beweis (Forts.) Dazu: Durch Induktion über  $k$  (an der Tafel):

Für alle  $1 \leq i, j \leq n$ :  $R_{1,j}^k$  ist durch einen regulären Ausdruck beschreibbar.

**Induktionsbasis**  $k = 0$

$$R_{ij}^0 = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & \text{falls } i \neq j \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\varepsilon\} & \text{falls } i = j \end{cases}$$

**Induktionsvoraussetzung**  $R_{ij}^k \in \mathfrak{Reg}_\Sigma$

**Induktionsschritt** Zu zeigen:  $R_{ij}^{k+1} \in \mathfrak{Reg}_\Sigma$

$$R_{ij}^{k+1} = R_{ij}^k \cup R_{i,k+1}^k (R_{k+1,k+1}^k)^* R_{k+1,j}^k$$

# Hauptsatz von Kleene: Beweis

---

Beweis (Forts.)

„ $\Leftarrow$ “ (einfachere Richtung)

Durch **Induktion** über den **Aufbau** regulärer Ausdrücke:

Zu jedem regulären Ausdruck gibt es einen äquivalenten  $\varepsilon$ -NDEA

(an der Tafel)

# Übersicht

---

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

# Bis jetzt

---

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

# 1. Teilklausur

---

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP