

# Grundlagen der Theoretischen Informatik

## 4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen (VI)

25.06.2015

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: [sofronie@uni-koblenz.de](mailto:sofronie@uni-koblenz.de)

# Übersicht

---

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

# Bis jetzt

---

- PDA (Definition)
- Ein PDA  $\mathcal{M}$  kann auf zwei verschiedene Arten eine Sprache akzeptieren:
  - über **finale Zustände**
  - über **leeren Keller**

$L_f(\mathcal{M}), L_l(\mathcal{M})$

- Zu jedem PDA  $\mathcal{M}_1$  existiert ein PDA  $\mathcal{M}_2$  mit  $L_f(\mathcal{M}_1) = L_l(\mathcal{M}_2)$
- Zu jedem PDA  $\mathcal{M}_1$  existiert ein PDA  $\mathcal{M}_2$  mit  $L_l(\mathcal{M}_1) = L_f(\mathcal{M}_2)$

# Gleichmächtigkeit: PDAs und cf-Grammatiken

---

## Theorem (PDA akzeptieren $L_2$ )

Die Klasse der PDA-akzeptierten Sprachen ist  $L_2$ .

**Beweis** Dazu beweisen wir die folgenden zwei Lemmata, die zusammen die Aussage des Satzes ergeben.

## Lemma (cf-Grammatik $\rightarrow$ PDA)

Zu jeder kontextfreien Grammatik  $G$  gibt es einen PDA  $\mathcal{M}$  mit

$$L(\mathcal{M}) = L(G)$$

## Lemma (PDA $\rightarrow$ cf-Grammatik)

Zu jedem Push-Down-Automaten  $\mathcal{M}$  gibt es eine kontextfreie Grammatik  $G$  mit

$$L(G) = L(\mathcal{M})$$

# Gleichmächtigkeit: PDAs und cf-Grammatiken

---

**Lemma (cf-Grammatik  $\rightarrow$  PDA)** Zu jeder kontextfreien Grammatik  $G$  gibt es einen PDA  $\mathcal{M}$  mit

$$L(\mathcal{M}) = L(G)$$

Beweis: letzte Vorlesung.

# Gleichmächtigkeit: PDAs und cf-Grammatiken

---

**Lemma (PDA  $\rightarrow$  cf-Grammatik)** Zu jedem Push-Down-Automaten  $\mathcal{M}$  gibt es eine kontextfreie Grammatik  $G$  mit

$$L(G) = L(\mathcal{M})$$

## Beweis

Sei  $\mathcal{M}$  ein PDA, der eine Sprache  $L$  **über leeren Keller** akzeptiert.

Wir konstruieren aus dem Regelsatz von  $\mathcal{M}$  eine kontextfreie Grammatik, die  $L$  erzeugt.

# Gleichmächtigkeit: PDAs und cf-Grammatiken

---

Beweis (Forts.)

Idee:

Die Variablen der Grammatik sind 3-Tupel der Form

$$[q, A, p]$$

Bedeutung:

Grammatik kann Wort  $x$  aus Variablen  $[q, A, p]$  ableiten

gdw

$\mathcal{M}$  kann vom Zustand  $q$  in den Zustand  $p$  übergehen,  
dabei  $A$  vom Keller entfernen (sonst den Keller unverändert lassen) und  
das Wort  $x$  lesen:

$$([q, A, p] \Longrightarrow^* x) \quad \underline{\text{gdw}} \quad ((q, x, A\gamma) \vdash^* (p, \varepsilon, \gamma))$$

# Gleichmächtigkeit: PDAs und cf-Grammatiken

---

Beweis (Forts.)

Formale Konstruktion:

Sei

$$\mathcal{M} = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s_0, Z_0, F)$$

ein PDA.

Daraus konstruiert man die Grammatik

$$G = (V, T, R, S)$$

mit

$$V := \{[q, A, p] \mid q, p \in K, A \in \Gamma\} \cup \{S\}$$

$$T := \Sigma$$

und ...



# Gleichmächtigkeit: PDAs und cf-Grammatiken

---

Beweis (Forts.)

... folgenden Regeln in  $R$ :

- $S \rightarrow [s_0, Z_0, q]$  für alle  $q \in K$ ,
- $[q, A, q_{m+1}] \rightarrow a [q_1, B_1, q_2][q_2, B_2, q_3] \dots [q_m, B_m, q_{m+1}]$   
für jeden  $\Delta$ -Übergang  $(q, a, A) \Delta (q_1, B_1 \dots B_m)$  und  
für jede beliebige Kombination  $q_2, \dots, q_{m+1} \in K$ ,
- $[q, A, q_1] \rightarrow a$   
für jeden  $\Delta$ -Übergang  $(q, a, A) \Delta (q_1, \varepsilon)$

Dabei ist  $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ .

*Siehe Buch für Beweis, dass die Konstruktion das gewünschte Ergebnis liefert:*

$$([q, A, p] \Longrightarrow^* x) \underline{\text{gdw}} ((q, x, A) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon))$$

woraus sofort  $L_\ell(\mathcal{M}) = L(G)$  folgt.

# Gleichmächtigkeit: PDAs und cf-Grammatiken

---

## Beispiel

Sprache:

$$L_{ab} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$L_{ab}$  wird über leeren Keller akzeptiert von dem PDA

$$\mathcal{M} = (\{s_0, s_1\}, \{a, b\}, \{Z_0, A\}, s_0, Z_0, \emptyset)$$

mit den Regeln

1.  $(s_0, \varepsilon, Z_0) \Delta (s_0, \varepsilon)$
2.  $(s_0, a, Z_0) \Delta (s_0, A)$
3.  $(s_0, a, A) \Delta (s_0, AA)$
4.  $(s_0, b, A) \Delta (s_1, \varepsilon)$
5.  $(s_1, b, A) \Delta (s_1, \varepsilon)$

# Gleichmächtigkeit: PDAs und cf-Grammatiken

---

## Beispiel (Forts.)

Die Transformation ergibt folgende Grammatik-Regeln:

- $$S \rightarrow [s_0, Z_0, s_0] \mid [s_0, Z_0, s_1]$$
1.  $[s_0, Z_0, s_0] \rightarrow \varepsilon$
  2.  $[s_0, Z_0, s_0] \rightarrow a[s_0, A, s_0]$   
 $[s_0, Z_0, s_1] \rightarrow a[s_0, A, s_1]$
  3.  $[s_0, A, s_0] \rightarrow a[s_0, A, s_0][s_0, A, s_0]$   
 $[s_0, A, s_0] \rightarrow a[s_0, A, s_1][s_1, A, s_0]$   
 $[s_0, A, s_1] \rightarrow a[s_0, A, s_0][s_0, A, s_1]$   
 $[s_0, A, s_1] \rightarrow a[s_0, A, s_1][s_1, A, s_1]$
  4.  $[s_0, A, s_1] \rightarrow b$
  5.  $[s_1, A, s_1] \rightarrow b$

# Gleichmächtigkeit: PDAs und cf-Grammatiken

---

## Beispiel (Forts.)

Lesbarer haben wir damit folgende Grammatik:

$$S \rightarrow A \mid B$$

$$A \rightarrow aC \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow aD$$

$$C \rightarrow aCC \mid aDE$$

$$D \rightarrow aCD \mid aDF \mid b$$

$$F \rightarrow b$$

Man sieht jetzt:

- Variable  $E$  ist nutzlos, und damit auch die Variable  $C$ .
- Die Grammatik enthält Kettenproduktionen und nullbare Variablen.

# Gleichmächtigkeit: PDAs und cf-Grammatiken

---

## Beispiel (Forts.)

Nach Entfernung der überflüssigen Elemente:

$$S \rightarrow \varepsilon \mid aD$$

$$D \rightarrow aDF \mid b$$

$$F \rightarrow b$$

Mit dieser Grammatik kann man z.B. folgende Ableitung ausführen:

$$\begin{aligned} S &\Longrightarrow aD \Longrightarrow aaDF \Longrightarrow aaaDFF \Longrightarrow aaabFF \\ &\Longrightarrow aaabbF \Longrightarrow aaabbb \end{aligned}$$

# Abschlusseigenschaften

---

# Abschlusseigenschaften

---

## Theorem (Abschlusseigenschaften von $L_2$ )

$L_2$  ist abgeschlossen gegen:

- Vereinigung  $\cup$
- Konkatenation  $\circ$
- Kleene-Stern  $*$

# Abschlusseigenschaften

---

## Theorem (Abschlusseigenschaften von $L_2$ )

$L_2$  ist abgeschlossen gegen:

- Vereinigung  $\cup$
- Konkatenation  $\circ$
- Kleene-Stern  $*$

Beweis

Seien

$$G_i = (V_i, T_i, R_i, S_i) \quad (i \in \{1, 2\})$$

zwei cf-Grammatiken mit  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

Sei

$$L_i = L(G_i)$$



# Abschlusseigenschaften

---

Beweis (Forts.)

zu  $\cup$ :

$$(V_1 \cup V_2 \cup \{S_{neu}\}, T_1 \cup T_2, R_1 \cup R_2 \cup \{S_{neu} \rightarrow S_1 \mid S_2\}, S_{neu})$$

erzeugt gerade  $L_1 \cup L_2$

zu  $\circ$ :

$$(V_1 \cup V_2 \cup \{S_{neu}\}, T_1 \cup T_2, R_1 \cup R_2 \cup \{S_{neu} \rightarrow S_1 S_2\}, S_{neu})$$

erzeugt gerade  $L_1 \circ L_2$

zu  $*$ :

$$(V_1 \cup \{S_{neu}\}, T_1, R_1 \cup \{S_{neu} \rightarrow S_1 S_{neu} \mid \varepsilon\}, S_{neu})$$

erzeugt gerade  $L_1^*$ .  $\square$

# Abschlusseigenschaften

---

## Theorem (Abschlusseigenschaften von $L_2$ )

$L_2$  ist **nicht** abgeschlossen gegen:

- Durchschnitt  $\cap$
- Komplement  $\neg$

# Abschlusseigenschaften

---

Beweis Zu „ $\cap$ “:

$$L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$L_2 = \{a^m b^n c^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

wird erzeugt von  $G_i = (\{S, S', T\}, \{a, b, c\}, R_i, S)$  mit

$$R_1 = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow S' T \\ S' \rightarrow a S' b \mid ab \\ T \rightarrow c T \mid c \end{array} \right\}$$

$$R_2 = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow T S' \\ S' \rightarrow b S' c \mid bc \\ T \rightarrow a T \mid a \end{array} \right\}$$

Sowohl  $L_1$  als auch  $L_2$  sind cf, **nicht** aber  $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

# Abschlusseigenschaften

---

Beweis Zu „ $\neg$ “:

Angenommen,  $L_2$  wäre abgeschlossen gegen  $\neg$ .

Wegen

$$L_1 \cap L_2 = \neg(\neg L_1 \cup \neg L_2)$$

wäre  $L_2$  dann auch abgeschlossen gegen  $\cap$  – **Widerspruch**  $\square$

# Wortprobleme

---

# Wortprobleme

---

## Problem

**Gegeben:** eine cf-Grammatik  $G$ , so dass  $L(G)$  eine Sprache ist über  $\Sigma$ , und ein Wort  $w \in \Sigma^*$

**Frage:** Ist  $w \in L(G)$ ?

# Wortproblem

---

## Lösung des Wortproblems für $L_3$

Gegeben eine rechtslineare Grammatik  $G$ , so dass  $L(G)$  eine Sprache ist über  $\Sigma$ , und ein Wort  $w \in \Sigma^*$ .

- Konstruiere aus  $G$  einen  $\varepsilon$ -NDEA  $A_1$ .
- Konstruiere aus  $A_1$  einen NDEA  $A_2$ .
- Konstruiere aus  $A_2$  einen DEA  $A_3$ .
- Probiere aus, ob  $A_3$  das Wort  $w$  akzeptiert.

Dazu braucht der Automat  $A_3$  genau  $|w|$  Schritte.

# Wortproblem

---

## Das Wortproblem für $L_2$

- Zu jeder cf-Grammatik  $G$  kann man einen PDA konstruieren
- Aber ein Pushdown-Automat kann  $\varepsilon$ -Übergänge machen, in denen er das Wort nicht weiter liest.
- **Wie kann man dann garantieren, dass der Automat in endlich vielen Schritten das Wort  $w$  zu Ende gelesen hat?**
- Deshalb: verwende anderes Verfahren:  
**Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus** (CYK-Algorithmus)  
Auch: Chart-Parsing



# Chart-Parsing

---

Gegeben: Ein Wort

$$w = a_1 \dots a_n$$

## Idee

- Prinzip der dynamischen Programmierung
- 1.: Ermittle woraus sich die einstelligen Teilworte ableiten lassen
- 2.: Ermittle woraus sich die zweistelligen Teilworte ableiten lassen
- ...
- $n$ .: Ermittle woraus sich die  $n$ -stelligen Teilworte ( $w$  selbst) ableiten lassen

# Chart-Parsing

---

**Beispiel:** Die Grammatik  $G = (\{S\}, \{a, b\}, R, S)$  mit

$$R = \{ S \rightarrow aSa \mid bSb \mid aa \mid bb \}$$

erzeugt die Sprache  $\{vv^R \mid v \in \{a, b\}^+\}$

Betrachten wir das Wort  $w = abbaabba$ .

**Was sind mögliche letzte Schritte von Ableitungen, die zu  $w$  geführt haben können?**

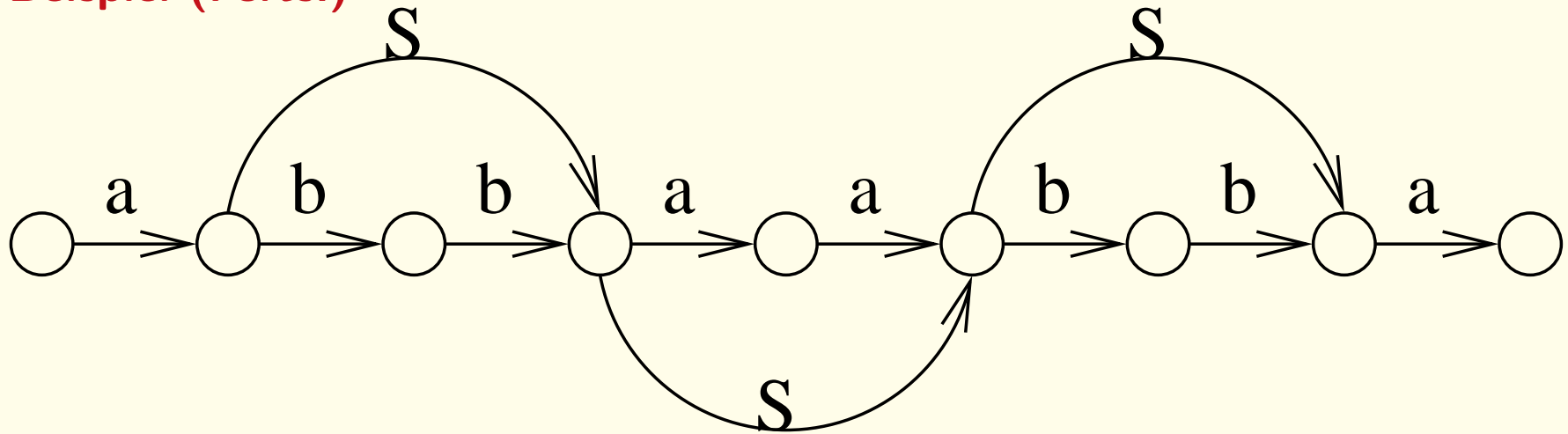
Wir merken uns alle möglichen einzelnen Ableitungsschritte in einer Chart, um Mehrfacharbeit zu vermeiden.

Wenn das Wort  $w$  in der Sprache  $L(G)$  ist, enthält am Ende der Chart eine mit  $S$  markierte Kante, die vom ersten bis zum letzten Knoten reicht.

# Chart-Parsing

---

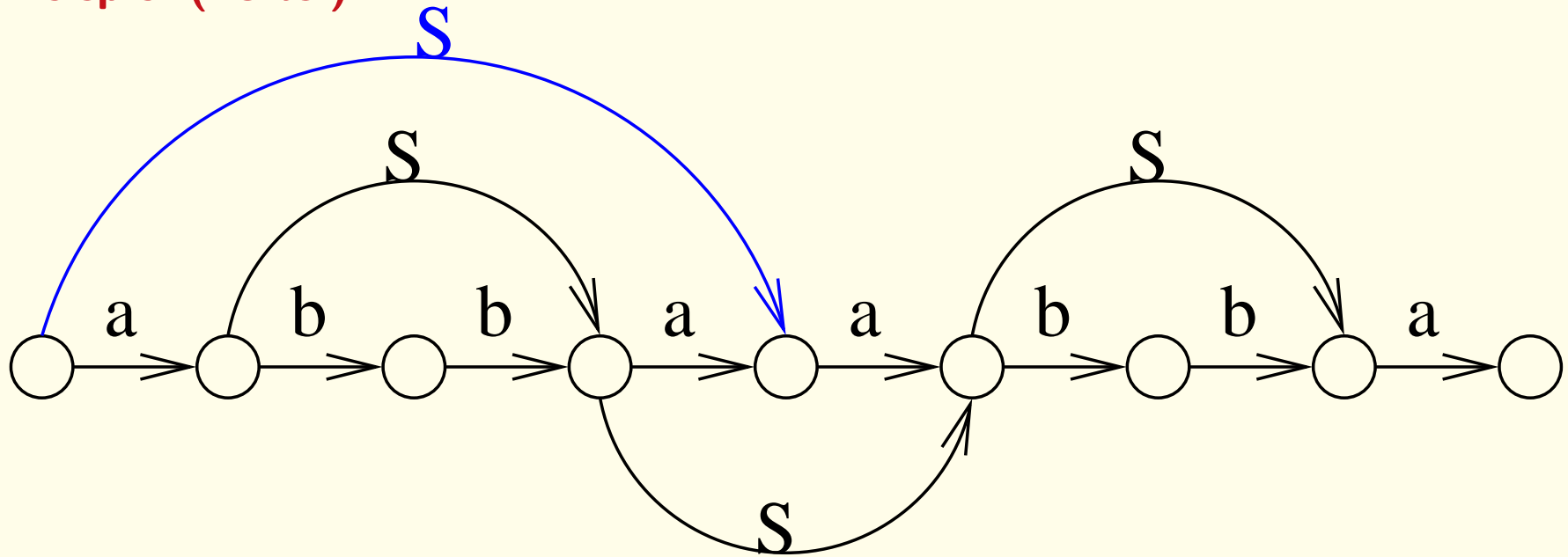
Beispiel (Forts.)



# Chart-Parsing

---

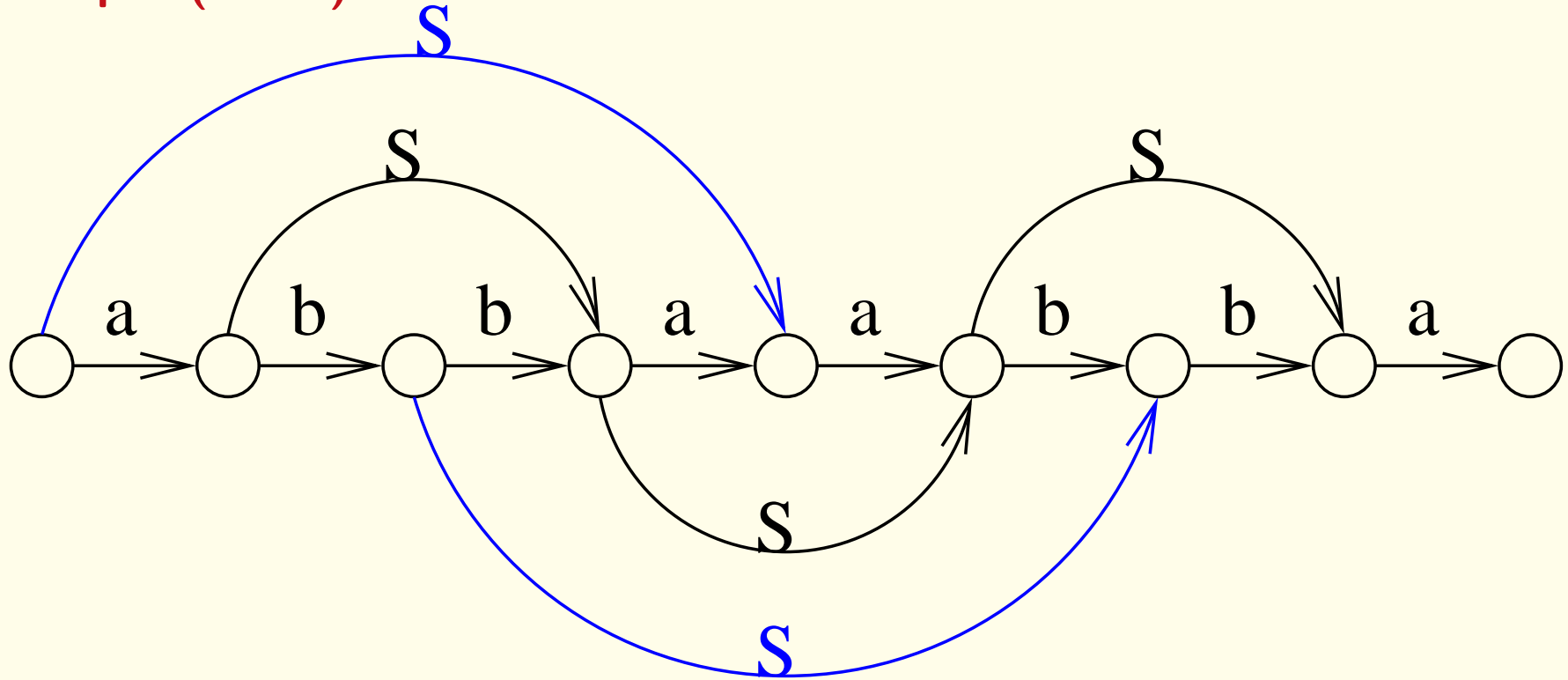
Beispiel (Forts.)



# Chart-Parsing

---

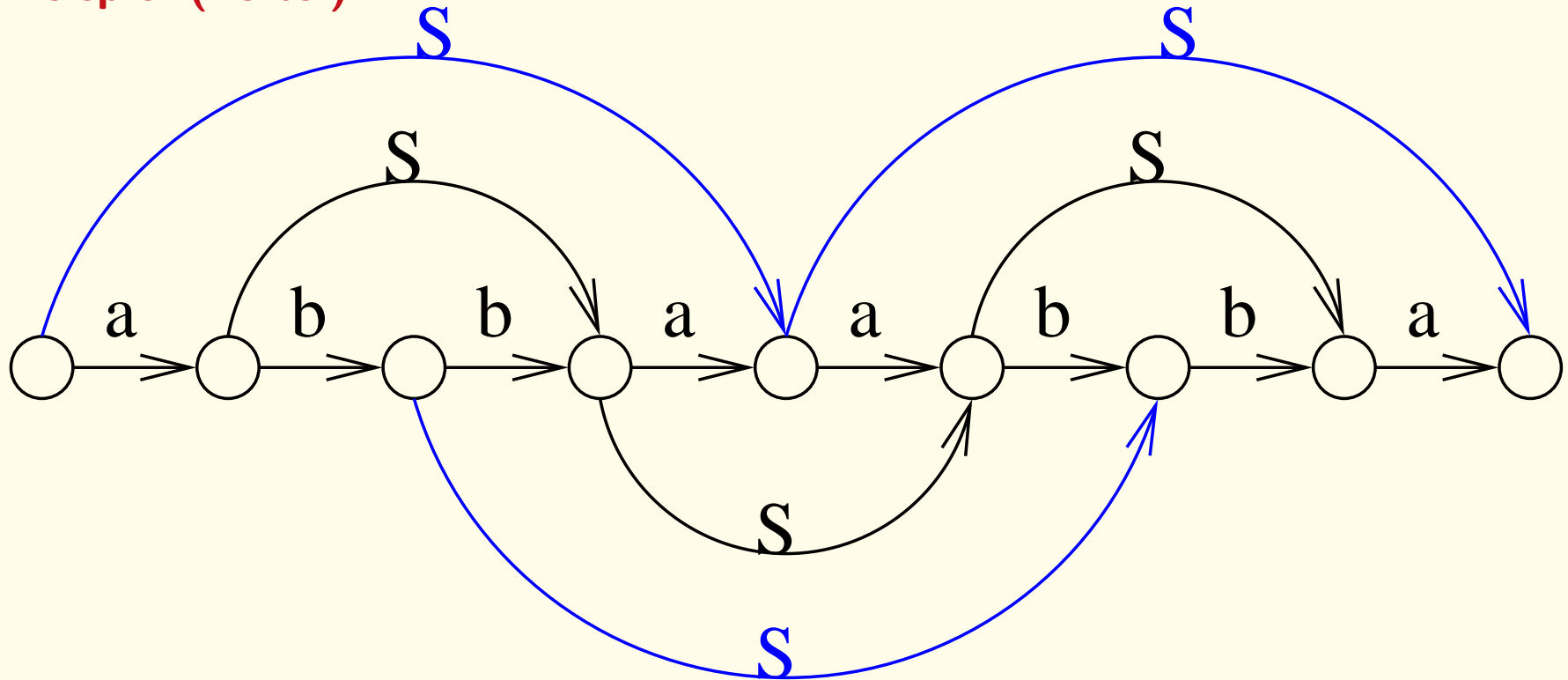
Beispiel (Forts.)



# Chart-Parsing

---

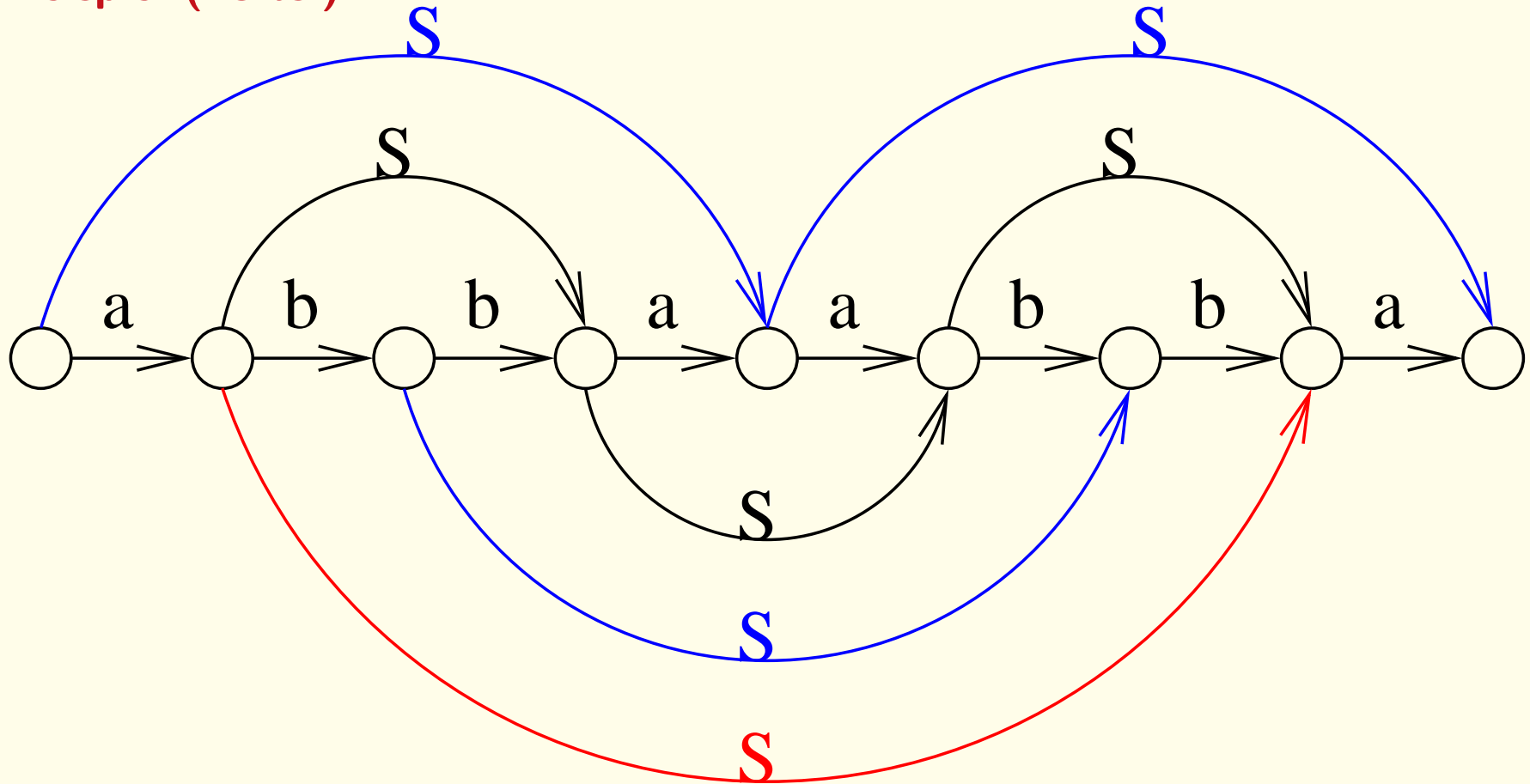
Beispiel (Forts.)



# Chart-Parsing

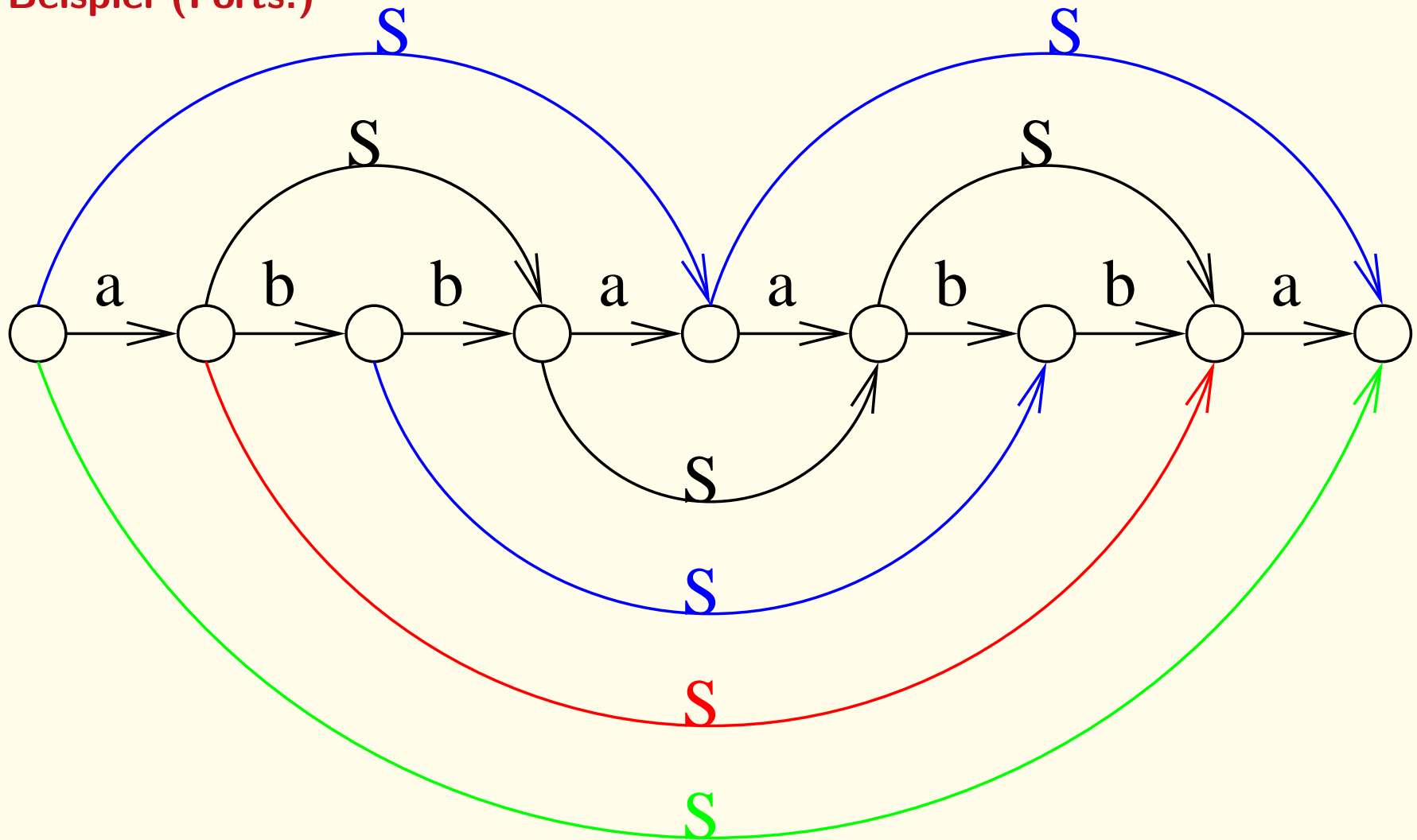
---

Beispiel (Forts.)



# Chart-Parsing

Beispiel (Forts.)





# Chart-Parsing

---

## Zur Vereinfachung

Wir fordern:            Grammatik ist in **Chomsky-Normalform**

Dann:

Immer nur **zwei** benachbarte Kanten betrachten, um herauszufinden, ob darüber eine neue Kante eingefügt werden kann.

# Chart-Parsing

---

**Beispiel (Forts.)** Grammatik in CNF, die dieselbe Sprache wie oben erzeugt:

$G = (\{S, S_a, S_b, A, B\}, \{a, b\}, R, S)$  mit

$$R = \{ \begin{array}{l} S \rightarrow AS_a \mid BS_b \mid AA \mid BB \\ S_a \rightarrow SA \\ S_b \rightarrow SB \\ A \rightarrow a \\ B \rightarrow b \end{array} \}$$

# Chart-Parsing

---

## Darstellung als Array

Für eine Kante, die den  $i$ . bis  $j$ . Buchstaben überspannt und mit  $A$  markiert ist, steht im  $[i, j]$ -Element des Arrays die Eintragung  $A$ .

### Definition ( $M * N$ )

Sei  $L = L(G)$  kontextfrei, und  $G = (V, T, R, S)$  in Chomsky-Normalform.

Mit  $M, N \subseteq V$  sei

$$M * N := \{A \in V \mid \exists B \in M, \exists C \in N : A \rightarrow BC \in R\}$$

# Chart-Parsing

---

## Definition ( $w_{i,j}$ , $V_{i,j}$ )

Sei  $w = a_1 \dots a_n$  mit  $a_i \in \Sigma$ .

Dann:

- $w_{i,j} := a_i \dots a_j$  ist das Fragment von  $w$  vom  $i$ -ten bis zum  $j$ -ten Buchstaben
- $V_{i,j} := \{A \in V \mid A \Longrightarrow_G^* w_{i,j}\}$

# Chart-Parsing

---

Sei  $w = a_1 \dots a_n$ ,  $a_i \in \Sigma$ , d.h.  $|w| = n$ . Dann gilt:

1.  $V_{i,i} = \{A \in V \mid A \rightarrow a_i \in R\}$

2.  $V_{i,k} = \bigcup_{j=i}^{k-1} V_{i,j} * V_{j+1,k}$  für  $1 \leq i < k \leq n$

## Beachte:

Die Grammatik muss in Chomsky-Normalform sein!

# Chart-Parsing

---

Beweis.

1.  $V_{i,i} = \{A \in V \mid A \Longrightarrow_G^* a_i\} = \{A \in V \mid A \rightarrow a_i \in R\}$ , da  $G$  in CNF ist.

$A \in V_{i,k}$  mit  $1 \leq i < k \leq n$

gdw  $A \Longrightarrow_G^* a_i \dots a_k$

gdw  $\exists j, i \leq j < k : \exists B, C \in V : A \Longrightarrow BC$ , und

$B \Longrightarrow_G^* w_{i,j} \neq \varepsilon$

und  $C \Longrightarrow_G^* w_{j+1,k} \neq \varepsilon$  (da  $G$  in CNF ist)

gdw  $\exists j, i \leq j < k : \exists B, C \in V : A \Longrightarrow BC$

und  $B \in V_{i,j}$  und  $C \in V_{j+1,k}$

2. gdw  $\exists j, i \leq j < k : A \in V_{i,j} * V_{j+1,k}$