Grundlagen der Theoretischen Informatik

Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen

1.07.2015

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

Übersicht

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen

Inhalt von Teil 5

- Was ist eine **berechenbare** Funktion?
- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)?
- Modifikationen von DTMs:
  (mehrere) Halbbänder, zweiseitig unbeschränkte Bänder
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- **Gödelisieren**: Programme als Wörter in Σ^*.
- **Aufzählbar** vs. **entscheidbar**
- **Unentscheidbarkeit**, Reduktionen von Problemen aufeinander.

Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)

Grundlegende Fragen

- **Frage: Berechenbarkeit?**

  Betrachtet werden Abbildungen über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$:

  Welche davon sollen berechenbar genannt werden?

Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)

Grundlegende Fragen

- **Frage: Berechenbarkeit?**

  Betrachtet werden Abbildungen über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$:

  Welche davon sollen berechenbar genannt werden?

- **Frage: Komplexität?**

  Um die Komplexität eines Algorithmus' zu messen braucht man ein Maschinenmodell zum Vergleich!

Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)

Grundlegende Fragen

- **Frage: Berechenbarkeit?**

  Betrachtet werden Abbildungen über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$:

  Welche davon sollen berechenbar genannt werden?

- **Frage: Komplexität?**

  Um die Komplexität eines Algorithmus' zu messen braucht man ein Maschinenmodell zum Vergleich!

Welches Modell wird gewählt?

Robustheit:
Das Modell soll nicht von einfachen Modifikationen abhängig sein.

Antwort: Turing-Maschinen

Alan Turing 1912–1954

- Mathematiker und Logiker
- Einer der Begründer der Informatik
- 1936: Definition des Berechenbarkeitsmodells "Turing-Maschine"
- 1938: Promotion bei Church in Princeton
- Während des zweiten Weltkriegs:
  Kriegsentscheidender Beitrag zur Entschlüsselung deutscher Funksprüche
- Dozent an der Universität Manchester
- Beiträge zur KI ("Turing-Test")
- Tragischer Tod:
  Strafverfolgung wegen Homosexualität; (vermutlich) Selbstmord
- Nach ihm benannt: Turing-Award

Idee

Immer mächtigere Automaten

- Erinnerung: Pushdown-Automaten
  - akzeptieren kontextfreie Sprachen
  - Erster Speicher: der Zustand (endlich)
  - Zweiter Speicher: der **Keller**
    (unbeschränkte Größe, beschränkte Zugriffsart)
  - Das Eingabewort wird nur einmal gelesen, von links nach rechts.

Idee

Immer mächtigere Automaten

- Ausblick: Turing-Maschinen
  - akzeptieren Sprachen **vom Typ 0**.
  - Erster Speicher: der Zustand (endlich)
  - Zweiter Speicher: Band
    (unbeschränkte Größe, **Zugriff an beliebiger Stelle**)
  - Turing-Maschine hat einen Schreib-/Lesekopf, den sie über diesem Band in einem Rechenschritt um ein Feld nach rechts oder links bewegen kann.
  - Das Eingabewort steht (am Anfang) auf dem Band.
    Die Maschine kann es **beliebig oft lesen**.

Turing-Maschine

Definition (Turing Machine (DTM))

Eine **determinierte Turing-Maschine (DTM)** $\mathcal{M}$ ist ein Tupel

$$\mathcal{M} = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von Zuständen mit $h \notin K$,
  (h ist der **Haltezustand**)
- Σ ein Alphabet mit $L, R \notin \Sigma$, $\# \in \Sigma$,
- $\delta : K \times \Sigma \to (K \cup \{h\}) \times (\Sigma \cup \{L, R\})$ eine Übergangs**funktion**
- $s \in K$ ein Startzustand.

Anzahl der Zustände: $|K| - 1$
(Startzustand wird nicht mitgezählt).

Turing-Maschine

Arbeitsschritt einer Turing-Maschine

Übergang

$$\delta(q, a) = (q', x)$$

bedeutet:

In Abhängigkeit

- vom aktuellen Zustand $q \in K$
- von dem Zeichen $a \in \Sigma$, das unter dem Schreib-/Lesekopf steht

geschieht folgendes:

- entweder ein **Schritt nach links**, falls $x = L$ ist
- oder ein **Schritt nach rechts**, falls $x = R$ ist
- oder **das Zeichen** a, das momentan unter dem Schreib-/Lesekopf steht, wird **durch $b \in \Sigma$ überschreiben**, falls $x = b \in \Sigma$
- der **Zustand** wird zu $q' \in K \cup \{h\}$ **geändert**,

Turing-Maschine

Leerzeichen

Das spezielle Zeichen $\#$ (*blank*) ist das Leerzeichen.

Es ist nie Teil des Eingabeworts; man kann es u.a. dazu benutzen, Wörter voneinander abzugrenzen.

Turing-Maschine

Begrenzung des Bandes

Das Band einer DTM ist **einseitig unbeschränkt**:

- Nach rechts ist es unendlich lang.
- Nach links hat es ein Ende.
- Wenn eine DTM versucht, das Ende zu überschreiten, bleibt sie „hängen“.

  In diesem Fall hält sie nicht.

Turing-Maschine

Anfangskonfiguration

- Ganz links auf dem Band steht ein Blank
- Direkt rechts davon steht das Eingabewort
- Wenn eine DTM mehrere Eingabewörter hintereinander bekommt, sind sie durch Blanks getrennt.
- Rechts vom letzten Eingabewort stehen nur noch Blanks.
- Der Schreib-/Lesekopf der DTM steht auf dem Blank direkt rechts neben dem (letzten) Eingabewort.

Merke:

Das Band enthält immer nur endlich viele Symbole, die keine Blanks sind.