# Grundlagen der Theoretischen Informatik

**Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen (III)**

8.07.2015

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

# Übersicht

# Turing-Maschine

**Definition (Turing Machine (DTM))**

Eine **determinierte Turing-Maschine (DTM)** $\mathcal{M}$ ist ein Tupel

$$\mathcal{M} = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$$

Dabei ist

- $K$ eine endliche Menge von Zuständen mit $h \notin K$,
  ($h$ ist der **Haltezustand**)
- $\Sigma$ ein Alphabet mit $L, R \notin \Sigma$, $\# \in \Sigma$,
- $\delta : K \times \Sigma \to (K \cup \{h\}) \times (\Sigma \cup \{L, R\})$ eine Übergangs**funktion**
- $s \in K$ ein Startzustand.

**Wir erlauben auch, dass $\delta$ nicht überall definiert ist.**

Falls die DTM dann in einen solchen nichtdefinierten Zustand kommt, sagen wir **die DTM hängt**. Sie **hält** also nicht.

Dies wird z.T. in der Literatur anders gehandhabt.

# Turing-Maschine

**Definition Konfiguration** einer DTM $\mathcal{M}=( K, \Sigma, \delta, s )$: Wort der Form $C=q, w\underline{a}u$, wobei:

- $q \in K \cup \{h\}$ der aktuelle Zustand,
- $w \in \Sigma^*$ der Bandinhalt links des Kopfes,
- $a \in \Sigma$ das Bandzeichen unter der Schreib-/Lesekopf.
- $u \in \Sigma^*(\Sigma - \{\#\}) \cup \{\epsilon\}$ der Bandinhalt rechts des Kopfes.

**Definition** $C_1 \vdash_{\mathcal{M}} C_2$ ($C_2$ ist **Nachfolgekonfiguration** von $C_1$) falls:

- $C_i = q_i, w_i\underline{a_i}u_i$ für $i \in \{1, 2\}$, und
- es gibt einen Übergang $\delta(q_1, a_1) = (q_2, b)$ wie folgt:

  Fall 1: $b \in \Sigma$. Dann ist $w_1 = w_2$, $u_1 = u_2$, $a_2 = b$.

  Fall 2: $b = L$. Dann gilt für $w_2$ und $a_2$: $w_1 = w_2a_2$.
  
  Für $u_2$: Wenn $a_1 = \#$ und $u_1 = \epsilon$ ist, so ist $u_2 = \epsilon$, sonst ist $u_2 = a_1u_1$.

  Fall 3: $b = R$. Dann ist $w_2 = w_1a_1$.
  
  Für $a_2$ und $u_2$ gilt: Wenn $u_1 = \epsilon$ ist, dann ist $u_2 = \epsilon$ und $a_2 = \#$, ansonsten ist $u_1 = a_2u_2$.

# Turing-Maschine

**Definition (Eingabe)** $w$ heißt **Eingabe** (*input*) für $\mathcal{M}$, falls $\mathcal{M}$ mit der **Startkonfiguration** $C_0 = s, \#w\underline{\#}$ startet.
$\big(w_1, \ldots, w_n\big)$ heißt **Eingabe** für $\mathcal{M}$, falls $\mathcal{M}$ mit der **Startkonfiguration**

$$C_0 = s, \#w_1\# \ldots \#w_n\underline{\#}$$

startet.

**Definition (Halten, Hängen)** Sei $\mathcal{M}$ eine Turing-Maschine.

- $\mathcal{M}$ **hält** in $C = q, w\underline{a}u$ **gdw.** $q = h$.
- $\mathcal{M}$ **hängt** in $C = q, w\underline{a}u$ **gdw.** es keine Nachfolgekonfiguration gibt
  **Insbesondere:** wenn $w = \epsilon \wedge \exists q' \;\; \delta(q, a) = (q', L)$.

# Turing-Maschine

**Definition (Rechnung)** Sei $\mathcal{M}$ eine Turing-Maschine. Man schreibt $C \vdash^*_{\mathcal{M}} C'$ **gdw.**: es gibt eine Reihe von Konfigurationen $C_0, C_1, \ldots, C_n$ $(n \geq 0)$ so dass $C = C_0$, $C' = C_n$ und für alle $i < n$ gilt: $C_i \vdash_{\mathcal{M}} C_{i+1}$

Dann heißt $C_0, C_1, \ldots, C_n$ eine **Rechnung** der Länge $n$ von $C_0$ nach $C_n$.

**Definition (TM-berechenbare Funktion)** Sei $\Sigma_0$ ein Alphabet mit $\# \notin \Sigma_0$. Eine (partielle) Funktion $f : ({\Sigma_0}^*)^m \to ({\Sigma_0}^*)^n$ heißt **DTM-berechenbar**, falls: Es existiert eine determinierte Turing-Maschine $\mathcal{M} = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$

- mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$,
- so dass für alle $w_1, \ldots, w_m,\ u_1, \ldots, u_n \in {\Sigma_0}^*$ gilt:
  $-f(w_1, \ldots, w_m) = (u_1, \ldots, u_n)$ <u>gdw</u> $s, \#w_1\# \ldots \#w_m\underline{\#} \vdash^*_{\mathcal{M}} h, \#u_1\# \ldots \#u_n\underline{\#}$
  $-f(w_1, \ldots, w_m)$ ist undefiniert <u>gdw</u>

  $\mathcal{M}$ gestartet mit $s, \#w_1\# \ldots \#w_m\underline{\#}$ hält nicht (läuft unendlich oder hängt)

# Berechnete Funktion/Akzeptierte Sprache

Bei Turing-Maschinen untersuchen wir,

- **welche Sprachen sie akzeptieren** und
- **welche Funktionen sie berechnen**.

**Akzeptieren ist Spezialfall von Berechnen**

**Definition (Von einer DTM akzeptierte Sprache)**
Ein Wort $w$ wird **akzeptiert von einer DTM $\mathcal{M}$**,
falls $\mathcal{M}$ auf Eingabe von $w$ hält
(wobei am Ende der Kopf auf dem ersten Blank rechts von $w$ steht).

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ **wird akzeptiert von einer DTM $\mathcal{M}$**, wenn genau die Wörter aus $L$ aus $\mathcal{M}$ und keine anderen akzeptiert werden.

**Achtung**

Bei nicht akzeptierten Wörtern muss die DTM nicht halten

**Sie darf es sogar nicht!**

# TM-Flussdiagramme

**Graphische Darstellung der Übergangsfunktion einer DTM:** mit einem Flußdiagramm.

- Die Zustandsnamen werden nicht genannt.
- Nur die Schritte und die Ausführungsreihenfolge werden beschrieben.

# TM-Flussdiagramme

Folgende Elemente stehen zur Verfügung:

- $L$: eine DTM, die nach dem Starten ein Feld nach links geht und danach hält.
- $R$: eine DTM, die nach dem Starten ein Feld nach rechts geht und danach hält.
- $a$: TM, die a auf dem Band schreibt und danach hält.
- Startschritt: mit einer Pfeilspitze $>$ bezeichnet
- $M_1 \longrightarrow M_2$ oder abgekürzt $M_1 M_2$ (falls $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ die Flußdiagramme zweier DTM sind):
  eine DTM die zuerst wie $M_1$ arbeitet und dann, falls $M_1$ hält, wie $M_2$ weiterarbeitet.
- $M_1 \xrightarrow{a} M_2$: $M_2$ ist nur dann aufgeführt, wenn nach der Beendigung von $M_1$ der aktuelle Bandbuchstabe $a$ ist.

# TM-Flussdiagramme

Sind $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$ Turing-Maschinen, $a_i \in \Sigma$ für $1 \leq i \leq n$, so ist

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{M}_1 & \\ & \uparrow^{a_1} & \\ > & \mathcal{M}_0 \stackrel{a_2}{\rightarrow} \mathcal{M}_2 & \\ & \downarrow^{a_n} \quad \ddots & \\ & \mathcal{M}_n & \end{array}$$

die Turing-Maschine, die zuerst wie $\mathcal{M}_0$ arbeitet und dann, falls $\mathcal{M}_0$ mit dem Buchstaben $a_i$ auf dem Arbeitsfeld hält, wie $\mathcal{M}_i$ weiterarbeitet.

- Weitere Schreibabkürzungen sind:

  $\stackrel{\sigma \neq a}{\rightarrow}$ für $\sigma \in \Sigma - \{a\}$

  $M_1 \xrightarrow{\sigma \neq a} M_2$: $M_2$ ist nur dann aufgeführt, wenn $M_1$ hält, und Lesekopf auf Buchstabe, die nicht a ist positioniert ist.

  $M_1 \stackrel{a,b}{\rightarrow} M_2$ falls nach der Ausführung von $M_1$ sowohl für den Bandbuchstaben $a$ als auch für $b$ nach $M_2$ verzweigt werden soll.

# TM-Flussdiagramme

**Beispiel:**

Die DTM $\mathcal{M}^+ = (\{s, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{|, \#\}, \delta, s)$ addiert zwei natürliche Zahlen in Unärdarstellung.

Sie rechnet

$$s, \#|^n\#|^m\underline{\#} \vdash^*_{\mathcal{M}^+} h, \#|^{n+m}\underline{\#}$$

Der Trick: Sie löscht den letzten Strich von $|^m$ und schreibt ihn in den Zwischenraum zwischen $|^n$ und $|^m$.

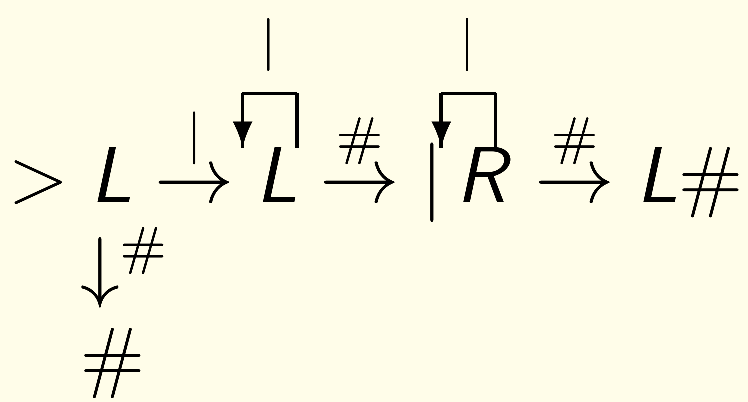
# TM-Flussdiagramme

**Beispiel:** Hier ist zunächst die $\delta$-Funktion:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s, \#$ | $\mapsto$ | $q_1, L$ | $q_2, \#$ | $\mapsto$ | $q_3, \vert$ | $q_3, \#$ | $\mapsto$ | $q_4, L$ |
| $q_1, \#$ | $\mapsto$ | $h, \#$ | $q_2, \vert$ | $\mapsto$ | $q_2, L$ | $q_4, \vert$ | $\mapsto$ | $h, \#$ |
| $q_1, \vert$ | $\mapsto$ | $q_2, L$ | $q_3, \vert$ | $\mapsto$ | $q_3, R$ | | | |

Für $\delta(s, |)$ und $\delta(q_4, \#)$ haben wir keine Werte angegeben; sie sind beliebig, weil $\mathcal{M}^+$ sie nie benötigt.

**Das Flußdiagramm zur gleichen DTM ist erheblich leichter zu lesen**:



# TM-Flussdiagramme

Die folgenden Turing-Maschinen werden wir als Bestandteile von komplexeren Turing-Maschinen später noch häufig benutzen.

**Beispiel:** ($R_{\#}$)

$R_{\#}$ bewegt nur den Kopf, ohne zu schreiben:

- Sie geht mindestens einmal nach rechts.
- Dann geht sie solange weiter nach rechts, bis sie ein $\#$ liest.

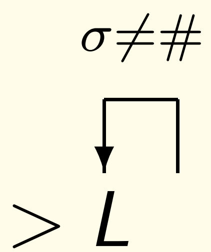
Die folgende Turing-Maschine $R_{\#}$ läuft zum ersten Blank links von der momentanen Position.

$$\begin{tikzcd} > R \arrow[loop above, "\sigma \neq \#"] \end{tikzcd}$$

# TM-Flussdiagramme

**Beispiel:** ($L_{\#}$) Analog funktioniert die DTM $L_{\#}$:

- Sie geht mindestens einmal nach links.
- Dann geht sie solange weiter nach links, bis sie ein $\#$ liest.



# TM-Flussdiagramme

**Beispiel:** ($\mathscr{C}$) Die folgende DTM $\mathscr{C}$ erhält als Eingabe einen String Einsen.

Sie rechnet so:

- Sie bewegt sich nach links auf das Blank vor das Eingabewort,
- geht das Eingabewort von links nach rechts durch,
- merkt sich jeweils ein Zeichen $\sigma$ von $w$, markiert die aktuelle Position, indem sie $\sigma$ mit $\#$ überschreibt,
- und kopiert das Zeichen $\sigma$.
- Sie verwendet dabei die Maschinen $L_\#$ und $R_\#$, die wir schon definiert haben.

$$\begin{tikzcd} > L_\# R \arrow[r, "\sigma \neq \#"] \arrow[d, "\#"] & \# R_\# R_\# \sigma L_\# L_\# \sigma \arrow[l, bend right] \\ R_\# \end{tikzcd}$$

# TM-Flussdiagramme

**Beispiel:** Die DTM $\mathscr{S}_R$ bewirkt eine "Verschiebung nach rechts", das heißt, wenn $\mathscr{S}_R$ das Alphabet $\Sigma$ besitzt, rechnet sie

$$s, w_1\underline{\#}w_2\#w_3 \vdash^*_{\mathscr{S}_R} h, w_1\#\underline{\#}w_2w_3$$

für alle Wörter $w_1, w_3 \in \Sigma^*$ und $w_2 \in (\Sigma - \{\#\})^*$. (Entgegen der sonstigen Konvention startet sie zwischen zwei Eingabewörtern.)
Sie arbeitet so:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{S}_R: & > R_\# L \arrow[r, "\sigma\neq\#"] \arrow[d, "\#"] & R\sigma L \arrow[l, bend right] \\ & R\# & \end{tikzcd}$$

# TM-Flussdiagramme

**Beispiel:** Dazu invers arbeitet die Maschine $\mathscr{S}_L$, die einen “shift nach links” bewirkt. Sie rechnet

$$s, w_1 \# w_2 \underline{\#} w_3 \vdash^*_{\mathscr{S}_L} h, w_1 w_2 \underline{\#} \# w_3$$

für alle $w_1, w_3 \in \Sigma^*, w_2 \in (\Sigma - \{\#\})^*$. Sie ist definiert als

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{S}_L: & > L_\# & R \arrow[r, "\sigma \neq \#"] \arrow[d, "\#"] & L\sigma R \arrow[l, bend right] \\
& & L\# &
\end{tikzcd}$$

# Varianten von Turing-Maschinen

# Variationen von Turing-Maschinen

Standard-DTM

Die Turing-Maschine, die wir bisher kennen, ...

- ist determiniert
- hat ein einseitig unbeschränktes Band (**Halbband**).

Ab jetzt nennen wir sie auch:

**Standard-Turing-Maschine (Standard-DTM oder kurz DTM)**

# Variationen von Turing-Maschinen

**Turing-Maschinen, die nie hängen**

**Gegeben:**

Eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$, mit Eingabge $\#w\underline{\#}$

Daraus konstruieren wir eine DTM $\mathcal{M}'$, die

- dasselbe berechnet wie $\mathcal{M}$
- **nie hängt**.

# Variationen von Turing-Maschinen

## Konstruktion der TM, die nie hängt

Das Bandende ist am Anfang ein Zeichen links vom Eingabewort

DTM $\mathcal{M}'$ rechnet so:

- Sie verschiebt die Eingabe ein Zeichen nach rechts.
- Dann druckt sie ganz links ein **Sonderzeichen** $\alpha$, das das **Bandende** anzeigt.
- Ab dann rechnet sie wie $\mathcal{M}$.
- Aber:
  Wenn sie $\alpha$ erreicht, bleibt sie dort stehen und druckt immer wieder $\alpha$.

# Variationen von Turing-Maschinen

## Eigenschaften der nicht-hängenden DTM

- $\mathcal{M}'$ hält für Eingabe $w$ <u>gdw</u> $\mathcal{M}$ hält für Eingabe $w$.
- $\mathcal{M}'$ hängt nie.
  Wenn $\mathcal{M}$ hängt, rechnet $\mathcal{M}'$ unendlich lang.

**O.B.d.A. sollen alle Turing-Maschinen, die wir von jetzt an betrachten, nie hängen.**

# DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

**DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)**

- Die Definition der Maschine bleibt gleich.
- Die Definition der **Konfiguration** ändert sich.
- Sie hat immer noch die Form $q, w\underline{a}u$, aber:
  - $w$ umfasst analog zu $u$ alle Zeichen bis zum letzten nicht-Blank links vom Schreib-/Lesekopf.
  - $w = \epsilon$ bzw. $u = \epsilon$ bedeutet, dass links bzw. rechts vom Schreib-/Lesekopf nur noch Blanks stehen.

# DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

**Definition (DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band, zw-DTM)**

Eine **Turing-Maschine mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)** ist eine DTM, für die die Begriffe der Konfiguration und der Nachfolgekonfiguration wie folgt definiert sind:

Eine **Konfiguration** $C$ einer zw-DTM $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \delta, s)$ ist von der Form

$$C = q, w\underline{a}u$$

Dabei ist

- $q \in K \cup \{h\}$ der aktuelle Zustand,
- $w \in (\Sigma - \{\#\})\Sigma^* \cup \{\epsilon\}$ der Bandinhalt links des Kopfes,
- $a \in \Sigma$ das Zeichen unter dem Kopf, und
- $u \in \Sigma^*(\Sigma - \{\#\}) \cup \{\epsilon\}$ der Bandinhalt rechts des Kopfes.

# DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

**Definition (Forts.)**

$C_2 = q_2, w_2\underline{a_2}u_2$ heißt **Nachfolgekonfiguration** von $C_1 = q_1, w_1\underline{a_1}u_1$,

in Zeichen $C_1 \ \vdash_{\mathcal{M}} \ C_2$, falls es einen Übergang $\delta(q_1, a_1) = (q_2, b)$ gibt, mit:

**Fall 1:** $b \in \Sigma$. Dann $w_1 = w_2, u_1 = u_2$ und $a_2 = b$.

**Fall 2:** $b = L$. Für $u_2$: Wenn $a_1{=}\#$ und $u_1{=}\epsilon$ ist, dann $u_2{=}\epsilon$, sonst $u_2{=}a_1u_1$.
Für $a_2$ und $w_2$: Wenn $w_1{=}\epsilon$ ist, dann $w_2{=}\epsilon$ und $a_2{=}\#$; sonst $w_1{=}w_2a_2$.

**Fall 3:** $b = R$. Für $w_2$: Wenn $a_1{=}\#$ und $w_1{=}\epsilon$ ist, dann $w_2{=}\epsilon$, sonst $w_2{=}w_1a_1$.
Für $a_2$ und $u_2$: Wenn $u_1{=}\epsilon$ ist, dann $u_2{=}\epsilon$ und $a_2{=}\#$; ansonsten $u_1{=}a_2u_2$.

# DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

**Theorem (Simulation von zw-DTM durch DTM)**
Zu jeder zw-DTM $\mathcal{M}$, die eine Funktion $f$ berechnet oder eine Sprache $L$ akzeptiert, existiert eine Standard-DTM $\mathcal{M}'$, die ebenfalls $f$ berechnet bzw. $L$ akzeptiert.

# DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

**Theorem (Simulation von zw-DTM durch DTM)**
Zu jeder zw-DTM $\mathcal{M}$, die eine Funktion $f$ berechnet oder eine Sprache $L$ akzeptiert, existiert eine Standard-DTM $\mathcal{M}'$, die ebenfalls $f$ berechnet bzw. $L$ akzeptiert.

Beweis Sei $w = a_1 \dots a_n$ die Eingabe für $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \delta, s)$.

Dann sieht das beidseitig unendliche Band zu Beginn der Rechnung so aus:

$$\dots \#\#\# a_1 \dots a_n \underline{\#}\# \dots$$

# DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

Beweis (Forts.) **Idee:**

- $\mathcal{M}$ hat quasi zwei unendlich lange Halbbänder.
- Ziel ist, den Inhalt beider Halbbänder von $\mathcal{M}$ auf einem unterzubringen.
- Dazu: Den Teil des Bandes, der zwei Zeichen links vom Input $w$ beginnt, umklappen:

$$\begin{array}{ll} \text{Spur 1} & \# \, \# \ldots \# \, \# \\ \text{Spur 2} & \# \, a_1 \ldots a_n \, \underline{\#} \end{array} \quad \ldots$$

- Die DTM $\mathcal{M}'$ hat zwei **Spuren**, d.h. zwei Reihen von Zeichen, die auf demselben Band untergebracht (kodiert) sind.
- Das Bandalphabet von $\mathcal{M}'$ ist $\Sigma' \supseteq \Sigma \times \Sigma$.

# DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

Beweis (Forts.) Sei $\mathcal{M}' = (\ K', \Sigma', \delta', s\ )$. $\mathcal{M}'$ rechnet so:

- $\mathcal{M}'$ legt zunächst eine zweite Spur an,
- simuliert dann die Arbeit von $\mathcal{M}$, und
- transformiert dann das Ergebnis wieder auf nur eine Spur herunter.