$G = (\{S\}, \{x_1, \overline{x_1}, \dots x_k, \overline{x_k}\}, R, S)$ mit $R_1: S \to \varepsilon$

$R_2: S \to x_1 S \overline{x_1} \mid \dots \mid x_k S \overline{x_k}$

$R_3: S \to SS$

Satz: $L(G)$ ist die kleinste Menge, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\varepsilon \in L(G)$
2. Falls $w \in L(G)$, dann $x_j w \overline{x_j} \in L(G)$
3. Falls $u, v \in L(G)$, dann $uv \in L(G)$.

Beweis Wir zeigen, dass A) $L(G)$ Bedingungen 1., 2. und 3 erfüllt

B) $L(G)$ die kleinste Menge ist, die diese Bedingungen erfüllt.

A) $L(G)$ erfüllt Bedingungen 1., 2. und 3

1. $\varepsilon \in L(G)$ **Beweis**. $\varepsilon \in L(G)$ weil $S \underset{R_1}{\Rightarrow} \varepsilon$.

2. Falls $w \in L(G)$ dann $x_j w \overline{x_j} \in L(G)$

Beweis: Annahme $w \in L(G)$, i.e. $S \underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}} w$.

Dann: $S \underset{R_2}{\Rightarrow} x_j S \overline{x_j} \underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}} x_j w \overline{x_j}$, d.h. $x_j w \overline{x_j} \in L(G)$.

3. Falls $u, v \in L(G)$ dann $uv \in L(G)$

Beweis: Annahme: $u \in L(G)$, d.h. $S \underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}} u$

$v \in L(G)$ d.h. $S \underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}} v$.

Dann: $S \underset{R_3}{\Rightarrow} SS \underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}} uS \underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}} uv$, also $uv \in L(G)$

B) $L(G)$ ist die kleinste Menge, die Bedingungen 1., 2 und 3 erfüllt

Sei A eine Menge mit:

1. $\varepsilon \in A$
2. Falls $w \in A$ dann $x_j w \overline{x_j} \in A$
3. Falls $u, v \in A$ dann $uv \in A$.

Wir zeigen, dass $L(G) \subseteq A$, i.e. dass für alle $w \in L(G)$, $w \in A$.

Sei $w \in L(G)$, d.h. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$.

Wir zeigen, dass $w \in A$ durch Induktion über die Länge der Ableitung $S \overset{*}{\Rightarrow} w$.

Bemerkung: da $w \in L(G)$, w enthält nur Terminalsymbole d.h. die Ableitung kann nicht Länge 0 haben

$p(n)$: Falls $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ eine Ableitung der Länge n ist, dann $w \in A$.

Wir beweisen, dass $p(n)$ gilt für alle $n \geq 1$ durch Induktion

Induktionsbasis:

$n=1$.

Sei $S \Rightarrow w$ eine Ableitung der Länge 1, wobei w nur aus Terminalsymbole besteht.

Dies kann nur unter Anwendung der Regel R_1 geschehen.

also $S \Rightarrow \varepsilon = w$, d.h. $w = \varepsilon$

Wir wissen aber, dass $\varepsilon \in A$ (Bedingung 1)

Also $w \in A$ in diesem Fall.

Induktionsvoraussetzung

Wir nehmen an, dass $p(k)$ gilt für alle $k \leq n$.

Induktionsschritt

Wir zeigen, dass dann auch $p(n+1)$ gilt.

Beweis: Sei $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ eine Ableitung der Länge $n+1$.

Fall 1 Am Anfang wird Regel R_2 benutzt.

Dann $S \underset{R_2}{\Rightarrow} x_j S \overline{x_j} \underbrace{\overset{*}{\Rightarrow} w}_{n \text{ Schritte}}$.

In diesem Fall hat w die Form $w = x_j w' \overline{x_j}$

wobei $S \overset{*}{\Rightarrow} w'$ eine Ableitung der Länge n ist.

Nach Induktionsvoraussetzung, ist $w' \in A$,

also $w = x_j w' \overline{x_j} \in A$ (weil A Bedingung 2. erfüllt).

Fall 2 Am Anfang wird Regel R_3 benutzt.

Dann $S \underset{R_3}{\Rightarrow} SS \underbrace{\overset{*}{\Rightarrow} w}_{n \text{ Schritte}}$.

In diesem Fall ist $w = uv$,

mit $S \overset{*}{\Rightarrow} u$ in $k_1 \leq n$ Schritte

$S \overset{*}{\Rightarrow} v$ in $k_2 \leq n$ Schritte

Nach Induktionsvoraussetzung, $u, v \in A$.

also $w = uv \in A$ (weil A Bedingung 3. erfüllt).

2