Definition: Eine Menge M ist abzählbar, wenn: - es eine surjektive Funktion $f: \mathbb{N} \to M$ gibt
- oder M leer ist.

Satz: Eine Menge M ist abzählbar genau dann, wenn es eine injektive Funktion $g: M \to \mathbb{N}$ gibt.

Beweis:

„⇒" Annahme: M abzählbar, d.h. M leer oder es gibt $f: \mathbb{N} \to M$ surjektiv

Zu zeigen: Es gibt eine injektive Funktion $g: M \to \mathbb{N}$.

Beweis: $g: M \to \mathbb{N}$ wird wie folgt definiert:

- Falls $M = \emptyset$, ist g die leere Funktion (injektiv).
- Falls $M \neq \emptyset$:

Sei $m \in M$. Da $f: \mathbb{N} \to M$ surjektiv ist, existiert zumindest ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = m$.

Sei n_m die kleinste natürliche Zahl mit $f(n_m) = m$.

Wir definieren $g(m) = n_m$.

Dann:
- g ist korrekt definiert (eine Funktion), weil für jedes $m \in M$, n_m eindeutig bestimmt ist.
- g ist injektiv, d.h. $\forall m_1, m_2 \in M \ (g(m_1) = g(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2)$

Beweis: Seien $m_1, m_2 \in M$ mit $g(m_1) = g(m_2)$.

Nach Definition von g:

a) $g(m_1) = n_{m_1}$ (die kleinste natürliche Zahl mit $f(n_{m_1}) = m_1$)

b) $g(m_2) = n_{m_2}$ (die kleinste natürliche Zahl mit $f(n_{m_2}) = m_2$)

$g(m_1) = g(m_2) \Rightarrow n_{m_1} = n_{m_2} \Rightarrow m_1 = f(n_{m_1}) = f(n_{m_2}) = m_2$.

d.h: wir haben gezeigt, dass wenn $g(m_1) = g(m_2)$ dann $m_1 = m_2$

„⇐" Annahme: Es gibt eine injektive Funktion $g: M \to \mathbb{N}$

Zu zeigen: M abzählbar, d.h. M leer oder es gibt $f: \mathbb{N} \to M$ surjektiv

Beweis: Falls M leer ist, ist die Konklusion wahr.

Falls $M \neq \emptyset$, wird $f: \mathbb{N} \to M$ wie folgt definiert:

Sei $n \in \mathbb{N}$:
- Falls es ein $m \in M$ gibt mit $g(m) = n$, dann definieren wir $f(n) = m$. [Da g injektiv ist, wissen wir, dass es nur ein $m \in M$ gibt, mit $g(m) = n$].
- Falls es keinen $m \in M$ gibt, mit $g(m) = n$ dann definieren wir $f(n) = m_0$, wobei $m_0 \in M$ ein beliebiges Element ist.

Dann:
- f ist korrekt definiert (eine Funktion)
- f ist surjektiv: Für jedes $m \in M$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, $n = g(m)$, mit $f(n) = m$.