Grundlagen der Theoretischen Informatik

3. Endliche Automaten (III)

4.05.2016

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Organisatorisches

- **1. Teilklausur:** Mittwoch, 8.06.2015, D028, 14:30-15:30

  Informationen werden über KLIPS zugeschickt.

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

DEA/NDEA

Definition. ((Determinierter) endlicher Automat) Ein **endlicher Automat (e.a., DEA)** ist ein Tupel $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$. Dabei ist

- K eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ein endliches Alphabet
- $\delta : K \times \Sigma \to K$ die totale(!) Übergangsfunktion,
- $s_0 \in K$ der Startzustand, und
- $F \subseteq K$ die Menge der finalen Zustände.

Definition (Indeterminierter endlicher Automat) Ein **indeterminierter** endlicher Automat (NDEA) ist ein Tupel $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$. Dabei ist

- K eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ein endliches Alphabet,
- $\Delta \subseteq (K \times \Sigma) \times K$ eine Übergangsrelation,
- $I \subseteq K$ eine **Menge von** Startzuständen,
- $F \subseteq K$ eine Menge von finalen Zuständen.

Determiniert / indeterminiert

Determinierter endlicher Automat

- Für einen Zustand q und eine Eingabe a
  genau ein einziger Nachfolgezustand
- festgelegt durch übergangsfunktion δ

Indeterminierter endlicher Automat

- Für einen Zustand q und eine Eingabe a
  evtl. **mehrere Nachfolgezustände** – oder **gar keiner**
- festgelegt durch Übergangsrelation Δ

Übergangsfunktion

DEA: $\delta^* : K \times \Sigma^* \to K$ ist strukturell rekursiv über Σ^* definiert:

$$\begin{array}{rcl} \delta^*(q, \varepsilon) & := & q \\ \delta^*(q, wa) & := & \delta(\delta^*(q, w), a) \end{array}$$

NDEA: $\Delta^* \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$ ist definiert durch:

$$\begin{array}{rcl} \Delta^*(\ (q, \varepsilon),\ q'\ ) & \underline{\text{gdw}} & q' = q \\ \Delta^*(\ (q, wa),\ q'\ ) & \underline{\text{gdw}} & \exists q'' \in K\ \big(\Delta^*(\ (q, w),\ q''\ )\ \wedge\ \Delta(\ (q'', a),\ q'\ )\big) \end{array}$$

Akzeptierte Sprache

Definition (Von einem DEA Automaten akzeptierte Sprache). Die von einem Automaten $\mathcal{A}$ **akzeptierte** Sprache, ist definiert als

$$L(\mathcal{A}) \ := \ \{w \in \Sigma^* \ \mid \ \delta^*(s_0, w) \in F\}$$

Die Menge **RAT** $:= \ \{L \ \mid$ es gibt einen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ mit $L = L(\mathcal{A})\}$ der von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen heißt Menge der **rationalen** Sprachen

Definition (Von einem NDEA akzeptierte Sprache)
Die von einem indeterminierten endlichen Automaten $\mathcal{A}$ **akzeptierte** Sprache ist

$$L(\mathcal{A}) \quad := \quad \{w \in \Sigma^* \ \mid \exists s_0 \in I \ \exists q \in F \ : \Delta^*(\ (s_0, w), \ q \ )\}$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Theorem. DEA gleich mächtig wie NDEA
Eine Sprache ist rational
(es gibt einen determinierten endlichen Automaten, der sie akzeptiert)

<u>gdw</u>

es gibt einen indeterminierten endlichen Automaten, der sie akzeptiert.

Beweis. **„⇒“:**

- Sei L eine rationale Sprache.
- Dann gibt es laut Definition einen
determinierten endlichen Automaten $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$ mit $L = L(\mathcal{A}_{\text{DEA}})$.
- Jeder determinierte endliche Automat ist aber insbesondere auch ein (besonderer) indeterminierter endlicher Automat.

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Theorem. DEA gleich mächtig wie NDEA

Eine Sprache ist rational

(es gibt einen determinierten endlichen Automaten, der sie akzeptiert)

gdw

es gibt einen indeterminierten endlichen Automaten, der sie akzeptiert.

Beweis „$\Leftarrow$“:

Sei $\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein (beliebiger) indeterminierter endlicher Automat. Er akzeptiert die Sprache $L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}})$.

Beweisidee: Konstruiere aus $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$ einen determinierten Automaten $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$ mit

$$L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}}) = L(\mathcal{A}_{\text{DEA}})$$

mit Hilfe einer Potenzmengenkonstruktion ...

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Forsetzung)

Fortsetzung ...

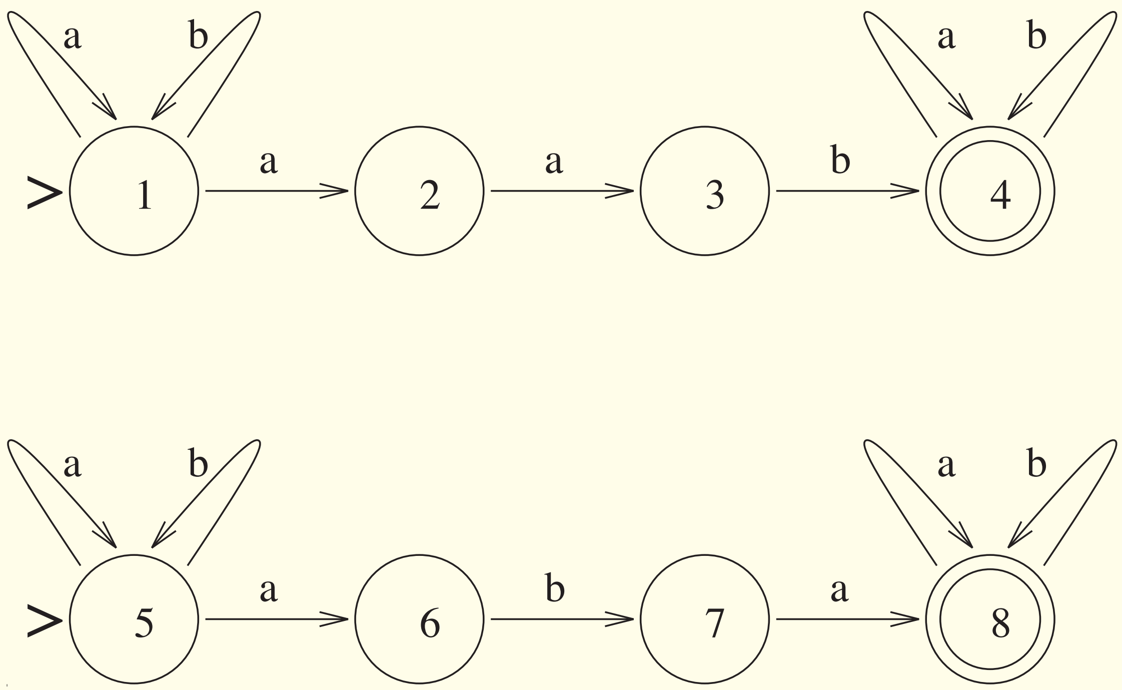
- Zustände in $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$ bestehen aus Mengen von Zuständen von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$
- Wenn man in $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$ mit w nach $q_1, \ldots, q_n$ gelangt,
  dann gelangt man in $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$ mit w nach $q' = \{q_1, \ldots, q_n\}$.
- Initialer Zustand von $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$:
  Menge aller initialen Zustände von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$
- Finale Zustände von $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$:
  Jede Menge von Zustände, die einen finalen Zustand von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$ enthält

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Ein NDEA, der die folgende Sprache akzeptiert:

$$L_{aab/aba} = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ hat } aab \text{ oder } aba \text{ als Teilwort}\}$$



Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Startzustand:
Menge der alten Startzustände, also $\{1, 5\}$.

Nächster Schritt:
Übergang von $\{1, 5\}$ mit a

$$\begin{array}{rcl} \Delta(1, a) & = & \{1, 2\} \\ \Delta(5, a) & = & \{5, 6\} \end{array}$$

Also, neuer Zustand $\{1, 2, 5, 6\}$ mit

$$\delta_{\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}}(\{1, 5\}, a) = \{1, 2, 5, 6\}$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Nächster Schritt:
Übergang von $\{1, 5\}$ mit b.

$$\begin{aligned} \Delta(1, b) &= \{1\} \\ \Delta(5, b) &= \{5\} \end{aligned}$$

Für den Eingabebuchstaben b bleibt $\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}$ also im Startzustand.

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Nächster Schritt:

Übergang von $\{1, 2, 5, 6\}$ mit a

$$\begin{aligned}
\Delta(1, a) &= \{1, 2\} \\
\Delta(2, a) &= \{3\} \\
\Delta(5, a) &= \{5, 6\} \\
\Delta(6, a) &= \emptyset
\end{aligned}$$

Also, neuer Zustand $\{1, 2, 3, 5, 6\}$ mit

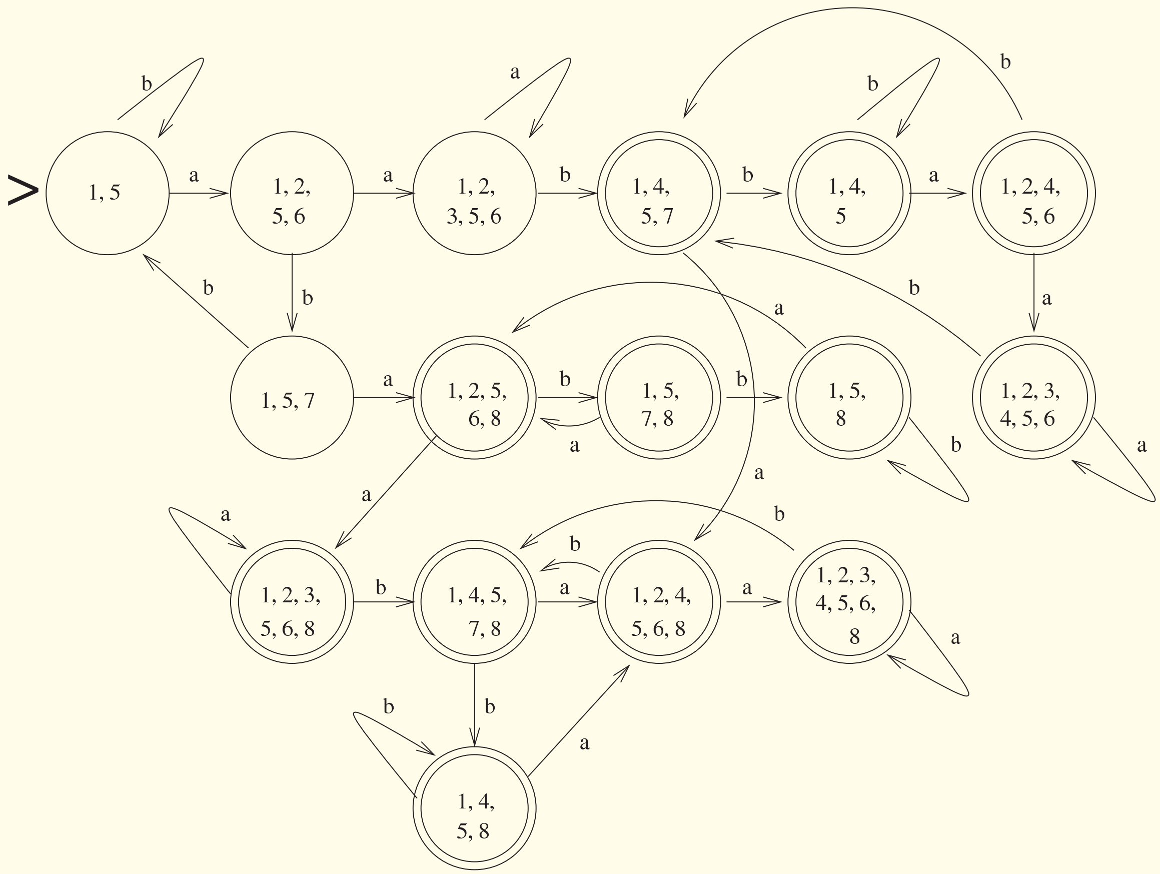
$$\delta_{\mathcal{A}_{\text{DEA}}}(\{1, 2, 5, 6\}, a) = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

usw.

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

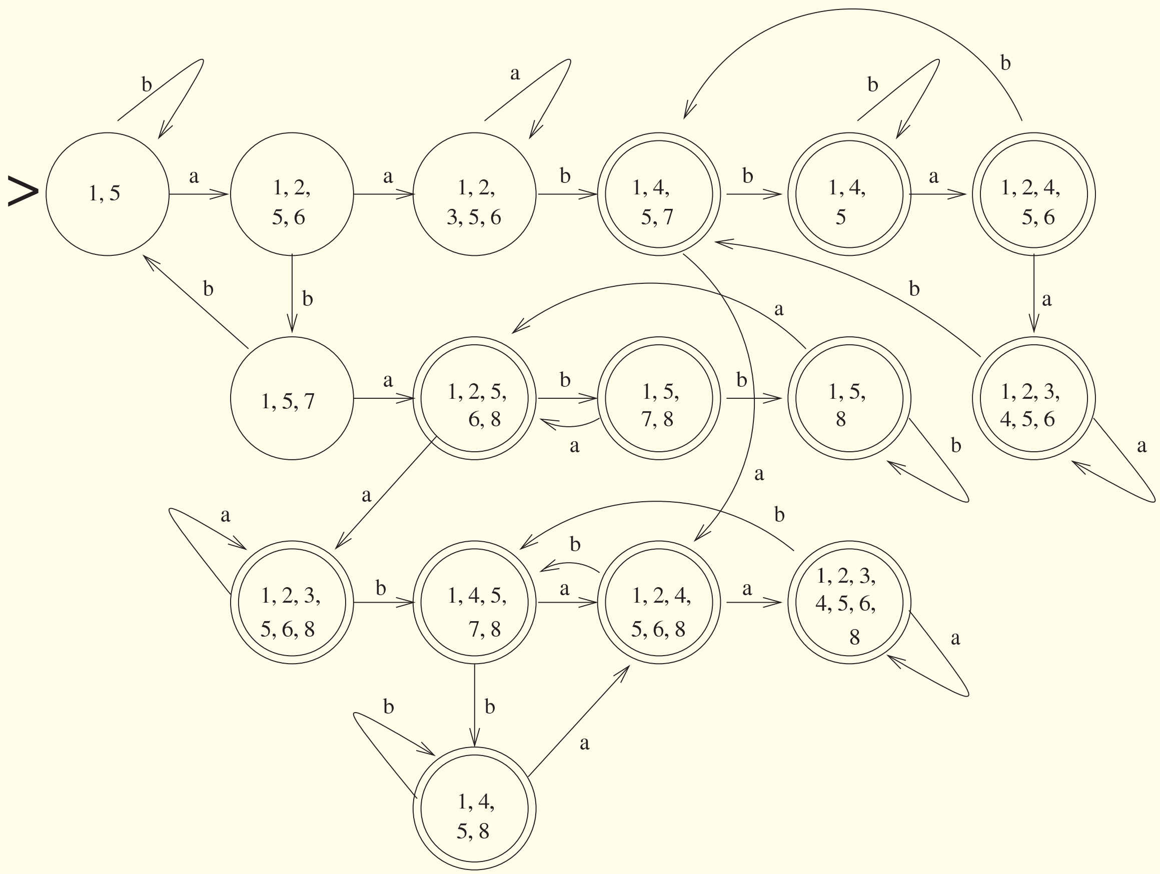
Es ergibt sich folgender determinierter Automat $\mathcal{A}_{\mathsf{DEA}}$:



Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Es ergibt sich folgender determinierter Automat $\mathcal{A}_{\mathsf{DEA}}$:



Übergänge aller finalen Zustände führen in finale Zustände.

Vereinfachung: Man könnte die finalen Zustände zu einem zusammenfassen

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Konstruktion des determinierten endlichen Automaten $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$ formal:

Gegeben: Indeterminierter endlicher Automat

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Wir konstruieren: Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

mit

- $K' = 2^K$ (die Potenzmenge von K)
- Übergangsfunktion

$$\delta' : 2^K \times \Sigma \to 2^K \qquad \text{mit} \qquad \delta'(M, a) := \bigcup_{q \in M} \Delta(q, a)$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Konstruktion des determinierten endlichen Automaten $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$ formal:

Gegeben: Indeterminierter endlicher Automat

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Wir konstruieren: Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

mit

- $I' = I$ (die Menge der initialen Zustände von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$)
- $F' = \{M \subseteq K \mid M \cap F \neq \emptyset\}$
  (alle Zustandsmengen von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$, die einen finalen Zustand enthalten)

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Konstruktion des determinierten endlichen Automaten $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$ formal:

Gegeben: Indeterminierter endlicher Automat

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Wir konstruieren: Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

mit

Merke:

- $\emptyset \in K'$
- $\delta'(\emptyset, x) = \emptyset$ für alle $x \in \Sigma$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Lemma: Für alle $w \in \Sigma^*$: $\quad \delta'^*(M, w) = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w)$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Lemma: Für alle $w \in \Sigma^*$: $\quad \delta'^*(M, w) = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w)$

Beweis durch Induktion über die Länge von w:

Induktionsanfang: $|w| = 0$

$$\delta'^*(M, \varepsilon) = M = \bigcup_{q \in M} \{q\} = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, \varepsilon)$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Lemma: Für alle $w \in \Sigma^*$: $\quad \delta'^*(M, w) = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w)$

Induktionsschritt:

$$
\begin{aligned}
& \delta'^*(M, wa) & \\
= \; & \delta'(\delta'^*(M, w), a) & \text{Def. von } * \\
= \; & \textstyle\bigcup_{p \in \delta'^*(M,w)} \Delta(p, a) & \text{Definition von } \delta' \\
= \; & \textstyle\bigcup_{p \in \left(\bigcup\limits_{q \in M} \Delta^*(q, w) \right)} \Delta(p, a) & \text{Ind.-Vor. für } \delta'(M, w) \\
= \; & \{q' \mid \exists q \in M \; \exists p \in \Delta^*(q, w) : q' \in \Delta(p, a)\} & \\
= \; & \{q' \mid \exists q \in M \; q' \in \Delta^*(q, wa)\} & \text{Def. von } * \\
= \; & \textstyle\bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, wa) &
\end{aligned}
$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Schluss)

Es gilt für alle $w \in \Sigma^*$:

$$
\begin{array}{lll}
w \in L(\mathcal{A}_{\text{DEA}}) & & \\
\underline{\textbf{gdw}} & \delta'^*(I', w) \in F' & \text{(Def. der Sprache eines Automaten)} \\
\underline{\textbf{gdw}} & \delta'^*(I, w) \in F' & \text{(da } I' = I \text{ per Def.)} \\
\underline{\textbf{gdw}} & \delta'^*(I, w) \cap F \neq \emptyset & \text{(Def. von } F'\text{)} \\
\underline{\textbf{gdw}} & \bigcup_{q \in I} \Delta^*(q, w) \cap F \neq \emptyset & \text{(nach Lemma)} \\
\underline{\textbf{gdw}} & \exists q \in I \, \exists q' \in F \ \big(q' \in \Delta^*(q, w)\big) & \\
\underline{\textbf{gdw}} & w \in L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}}) & \text{(Def. der Sprache eines Automaten)}
\end{array}
$$

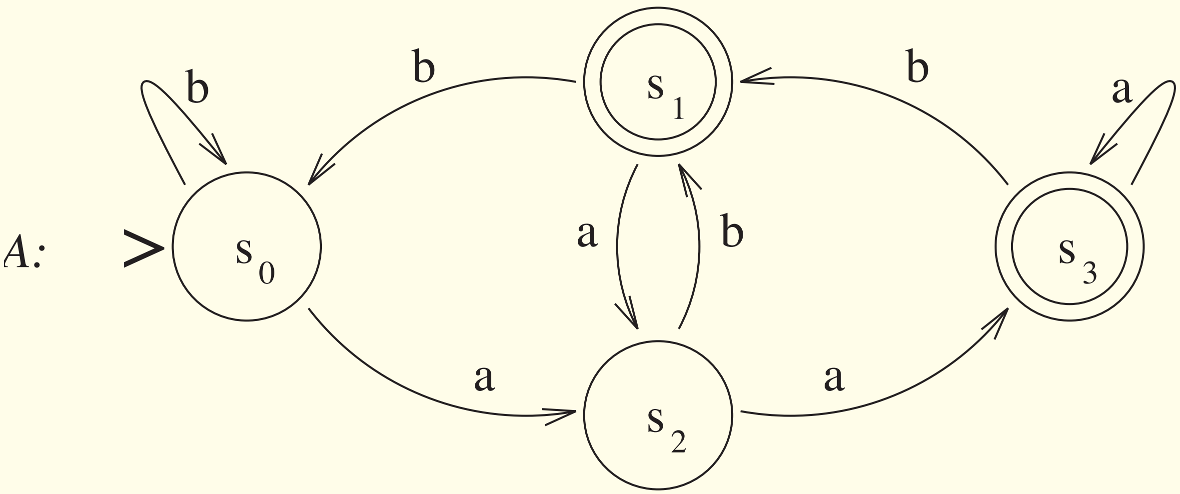
Damit: $L(\mathcal{A}_{\text{DEA}}) = L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}})$ $\square$

Beispiel

Determinierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^*\{a\}\{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe a ist)



Idee: Im Zustand jeweils die letzten zwei Buchstaben merken

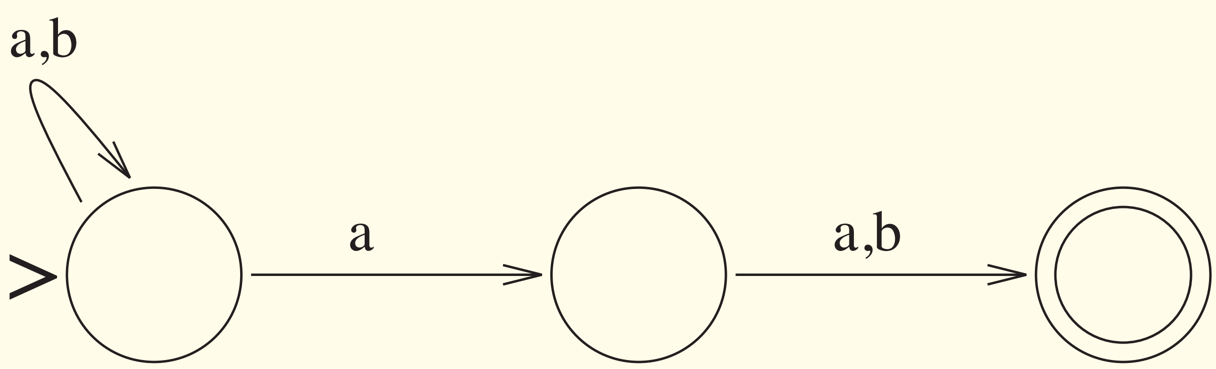
Beispiel

Indeterminierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^*\{a\}\{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe a ist)

A':



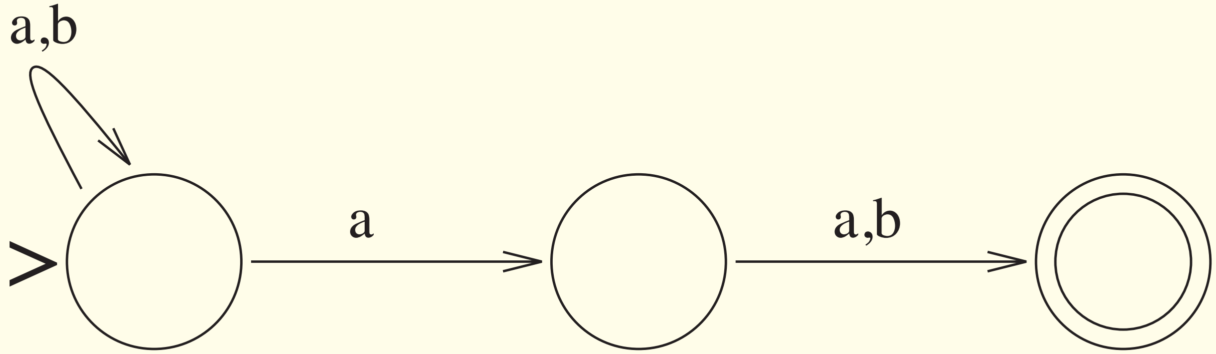
Beispiel

Indeterminierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^* \{a\} \{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe a ist)

A':



Konstruktion des determinierten endlichen Automaten: an der Tafel.

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Automaten mit epsilon-Kanten

Automaten mit ε-Kanten

Vom NDEA zum Automaten mit ε-Kanten

Bisher (NDEA): Kanten mit einem Buchstaben beschriftet

Jetzt (Automat mit ε-Kanten): Kanten mit einem Wort beschriftet

Es darf auch das leere Wort ε sein!

Automaten mit ε-Kanten

Vom NDEA zum Automaten mit ε-Kanten

Bisher (NDEA): Kanten mit einem Buchstaben beschriftet

Jetzt (Automat mit ε-Kanten): Kanten mit einem Wort beschriftet

Es darf auch das leere Wort ε sein!

Ein Automaten mit ε-Kanten kann . . .

- in einem Schritt ein ganzes Wort verarbeiten
- einen Zustandsübergang machen, ohne dabei einen Buchstaben zu lesen

Automaten mit ε-Kanten: Definition

Definiton. Ein **Automat mit ε-Kanten (ε-NDEA)** A ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ein endliches Alphabet,
- $\Delta \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$ eine eine (endliche) Übergangsrelation,
- $I \subseteq K$ eine Menge von Startzuständen,
- $F \subseteq K$ eine Menge von finalen Zuständen

Automaten mit ε-Kanten: Übergangsrelation

Definition. (Erweiterung von Δ zu Δ^*)

$$\Delta^* \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$$

ist (ähnlich wie für NDEAs) definiert durch:

$$\Delta^*(\,(q,\varepsilon),\; q'\,) \quad \underline{\text{gdw}} \quad q' = q \quad \text{oder} \quad \Delta(\,(q,\varepsilon),\; q'\,)$$

$$\Delta^*(\,(q,w_1w_2),\; q'\,) \quad \underline{\text{gdw}} \quad \exists q'' \in K$$

$$\Delta^*(\,(q,w_1),\; q''\,) \;\vee\; \Delta(\,(q,w_1),\; q''\,)$$

$$\wedge$$

$$\Delta^*(\,(q'',w_2),\; q'\,) \;\vee\; \Delta(\,(q'',w_2),\; q'\,)$$

Automaten mit ε-Kanten: Akzeptierte Sprache

Definition. Die von einem Automaten mit ε-Kanten

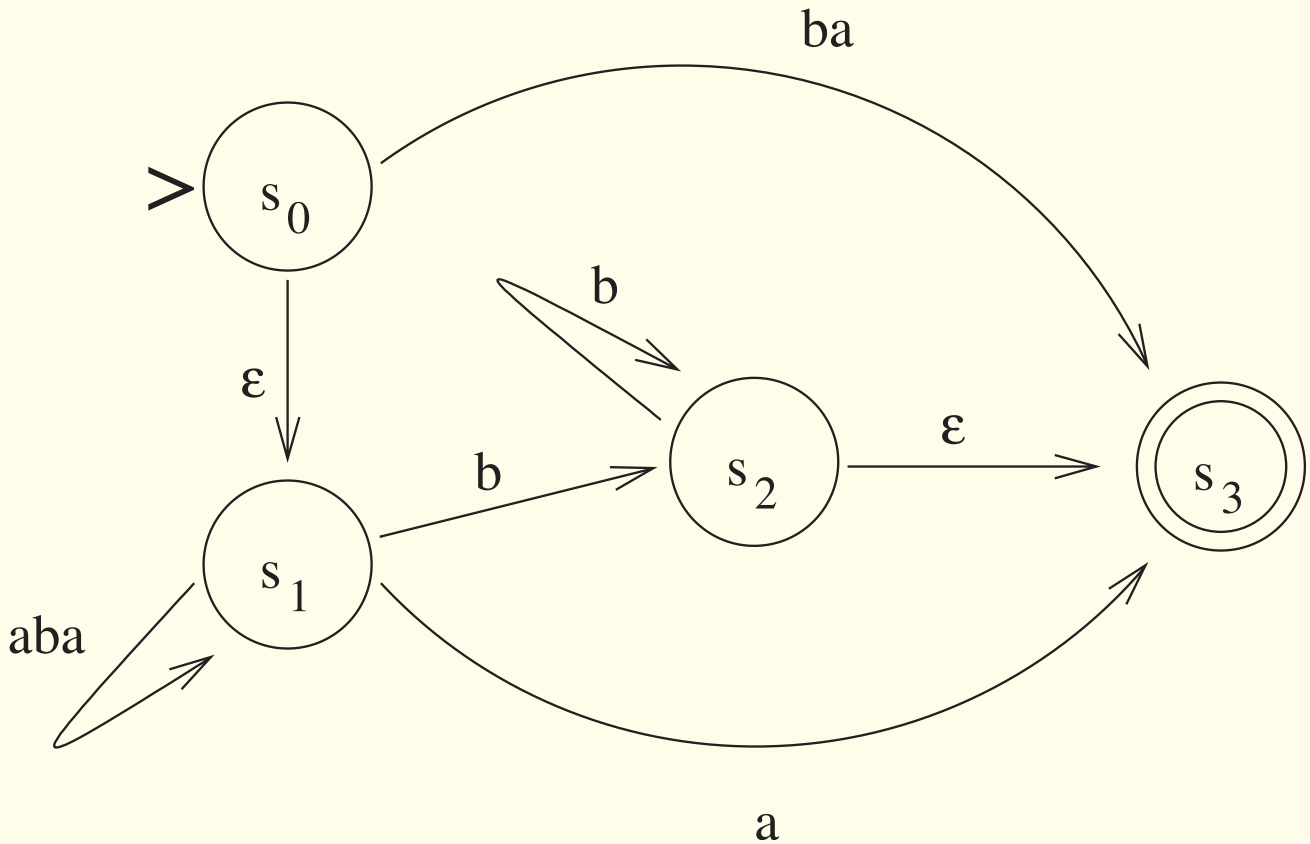
$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

akzeptierte Sprache ist

$$L(\mathcal{A}) := \{\ w \in \Sigma^* \ \mid\ \exists s_0 \in I\, \exists q \in F\ \ \Delta^*(\ (s_0, w)\ q)\ \}$$

Automaten mit ε-Kanten: Beispiel

Beispiel



Akzeptiert: $\{aba\}^*\{b\}\{b\}^* \; + \; \{aba\}^*\{a\} \; + \; \{ba\}$

Gleichmächtigkeit von Automaten mit ε-Kanten und NDEAs

Theorem (ε-NDEA gleich mächtig wie NDEA)

Zu jedem Automaten mit ε-Kanten $\mathcal{A}$ existiert ein indeterminierter endlicher Automat $\mathcal{A}'$ mit

$$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$$

Gleichmächtigkeit: Beweis

Transformation von $\mathcal{A}$ in einen NDEA ohne ε-Kanten

1. Ersetze Übergänge:

- mit nur einem Buchstaben markiert $\quad\rightarrow\quad$ beibehalten
- mit einem Wort w markiert ($|w| = n$) $\rightarrow$ ersetze durch n Übergänge (verwende $n - 1$ neue, zusätzlicher Zustände)
- ε-Übergänge $\quad\rightarrow\quad$ statt diesen

$$\Delta(\ (q, a),\ \ q''\ )$$

für jedes Paar

$$\Delta(\ (q, a),\ \ q'\ ) \quad \text{und} \quad \Delta(\ (q', \varepsilon),\ \ q''\ )$$

Gleichmächtigkeit von Automaten mit ε-Kanten und NDEAs

Beweis (Fortsetzung)

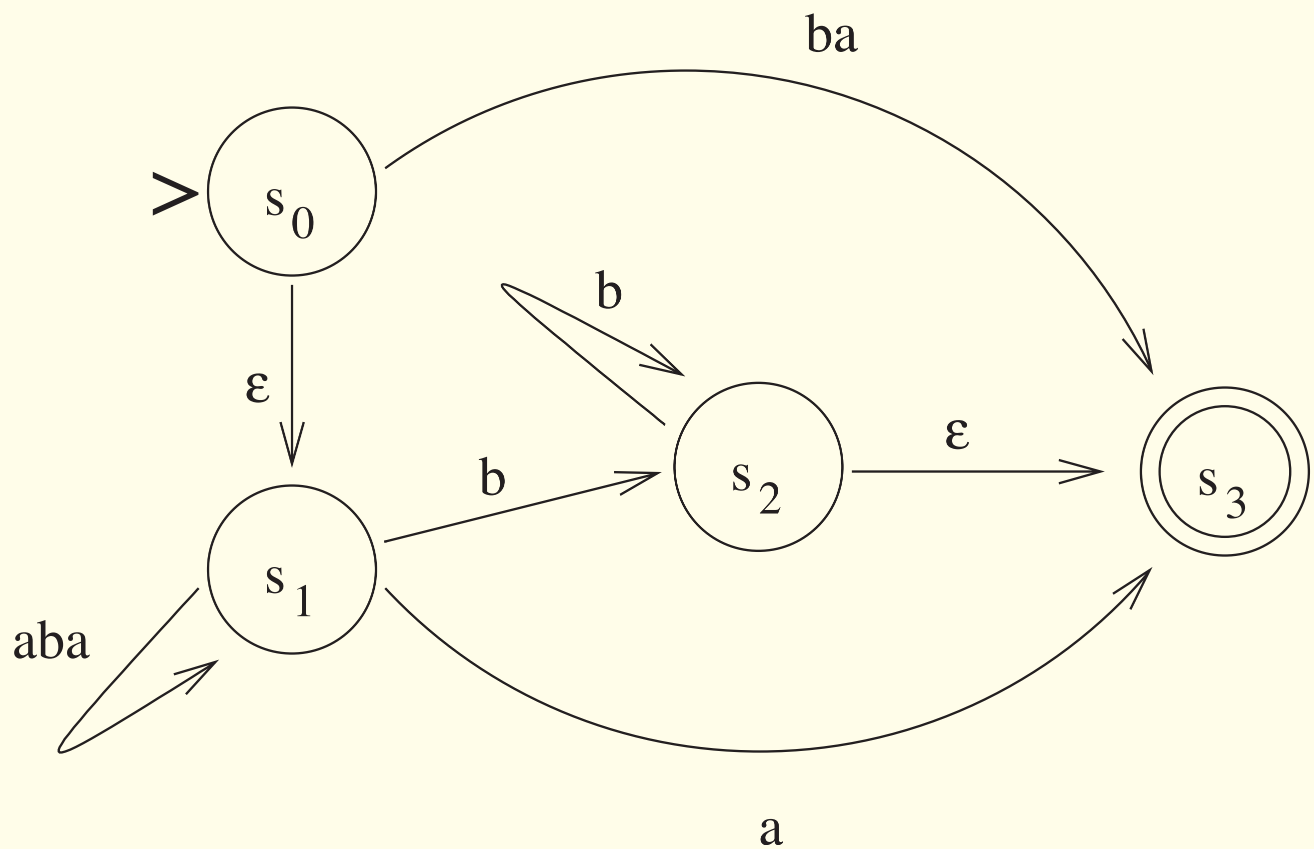
Transformation von $\mathcal{A}$ in einen NDEA ohne ε-Kanten

2. Zusätzliche Initialzustände:
Falls $q \in I$ und $\Delta^*(\,(q,\varepsilon),\ q')$, dann auch $q' \in I$

3. Finalzustände bleiben unverändert

Gleichmächtigkeit: Beispiel

Beispiel. Der Automat mit ε-Kanten ...



Akzeptiert: $\{aba\}^*\{b\}\{b\}^* \;+\; \{aba\}^*\{a\} \;+\; \{ba\}$

Gleichmächtigkeit: Beispiel

1. Ersetze Übergänge:

- Die mit einem Buchstaben markierten Übergänge: beibehalten.
  $s_1 \xrightarrow{b} s_2$ und $s_2 \xrightarrow{b} s_2$ bleiben.

- Übergang $s_1 \xrightarrow{aba} s_1$:
  Neue Zustände: $p_{(aba,1)}, p_{(aba,2)}$.
  Übergang $s_1 \xrightarrow{aba} s_1$ ersetzt durch
  $s_1 \xrightarrow{a} p_{(aba,1)} \xrightarrow{b} p_{(aba,2)} \xrightarrow{a} s_1$.

- Übergang $s_0 \xrightarrow{ba} s_3$:
  Neuer Zustand: $p_{(ba,1)}$.
  Übergang $s_0 \xrightarrow{ba} s_3$ ersetzt durch $s_0 \xrightarrow{b} p_{(ba,1)} \xrightarrow{a} s_3$.

Gleichmächtigkeit: Beispiel

1. Ersetze Übergänge:

(Fortsetzung)

Statt ε-Übergänge:

- $\Delta((s_1, b), s_2)$ und $\Delta((s_2, \varepsilon), s_3)$: neuer Übergang: $\Delta((s_1, b), s_3)$.
- $\Delta((s_2, b), s_2)$ und $\Delta((s_2, \varepsilon), s_3)$: neuer Übergang: $\Delta((s_2, b), s_3)$.

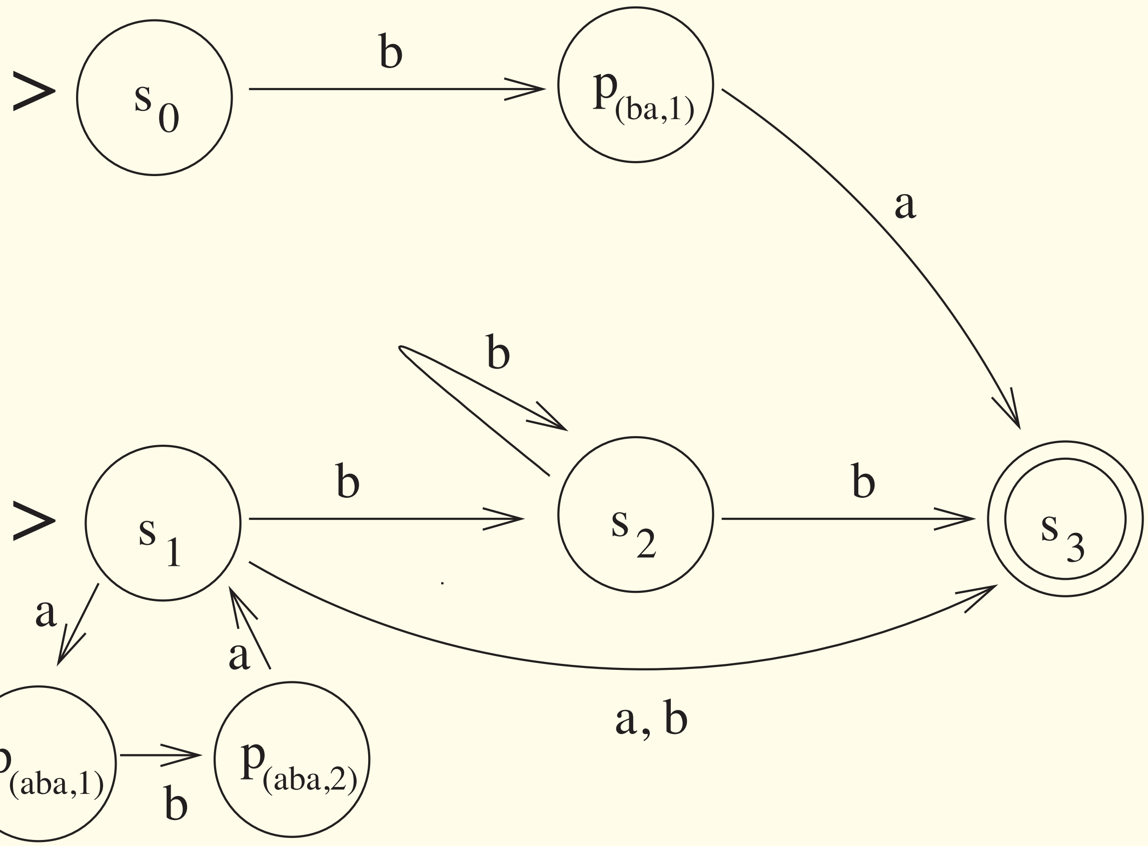
2. Zusätzliche Initialzustände:

Da $s_0 \in I$ und $\Delta((s_0, \varepsilon), s_1)$, dann auch $s_1 \in I$.

3. Finalzustände bleiben unverändert

Gleichmächtigkeit: Beispiel

Beispiel. ... wird transformiert in den äquivalenten NDEA



Gleichmächtigkeit von Automaten mit ε-Kanten und NDEAs

Theorem (ε-NDEA gleich mächtig wie NDEA)
Zu jedem Automaten mit ε-Kanten $\mathcal{A}$ existiert ein indeterminierter endlicher Automat $\mathcal{A}'$ mit

$$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$$

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Jetzt

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Satz von Kleene

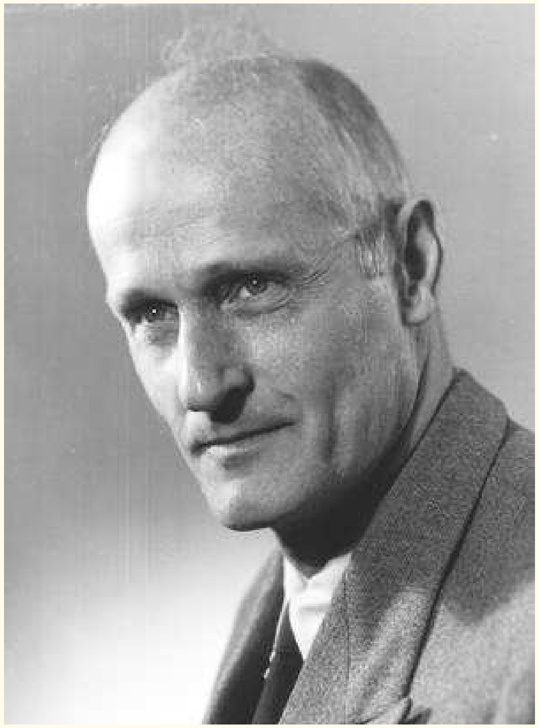
Theorem (Satz von Kleene: RAT $=$ L$_3$)
Eine Sprache L ist rational gdw L ist regulär.

Merke:

L **ist rational heißt:** es gibt einen endlichen Automaten, der L akzeptiert

L **ist regulär heißt:** es gibt eine rechtslineare Grammatik für L

Satz von Kleene



Stephen Cole Kleene (1909 – 1994)

- Mathematiker und Logiker
- Promovierte bei Church in Princeton
  (wie Turing und viele andere)
- Professor an der Universität von Wisconsin
- Einer der Begründer der theoretischen Informatik
- Unter anderem:
  Erfinder der Regulären Ausdrücke

Satz von Kleene

Theorem (Satz von Kleene: RAT $=$ L$_3$)
Eine Sprache L ist rational gdw L ist regulär.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ zu zeigen:
Wenn eine Sprache L von einem endlichen Automaten $\mathcal{A}$ akzeptiert wird, ist sie regulär (wird von einer rechtslinearen Grammatik akzeptiert).

Sei also $L = L(\mathcal{A})$ für einen endlichen Automaten $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$

Dazu konstruieren wir eine Grammatik $G = (V, T, R, S)$:

Automat $\mathcal{A}$:	in **Zustand** q,	**liest** a,	geht in **Zustand** q'
Grammatik:	**Variable** q,	**erzeugt** a	neue **Variable** q'

Satz von Kleene

Beweis (Fortsetzung) Formale Definition der Grammatik:

$$\begin{aligned} V &:= K \\ T &:= \Sigma \\ S &:= s_0 \\ R &:= \{\, q \to aq' \mid \delta(q,a) = q' \,\} \cup \\ &\ \{\, q \to \varepsilon \quad \mid q \in F \,\} \end{aligned}$$

Durch Induktion über die Länge eines Wortes w:

$$S \Longrightarrow_G^* wq \qquad \underline{\text{gdw}} \qquad \delta^*(s_0, w) = q$$

Daraus: $S \Longrightarrow_G^* w$ $\underline{\text{gdw}}$ $\exists q \in F \ \big(S \Longrightarrow_G^* wq \Longrightarrow w\big)$

$\underline{\text{gdw}}$ $\exists q \in F \ \big(\delta^*(s_0, w) = q\big)$

$\underline{\text{gdw}}$ $w \in L(\mathcal{A})$

Satz von Kleene

Beweis (Fortsetzung) "$\Leftarrow$" zu zeigen:
Wenn eine Sprache L regulär ist
(sie wird von einer rechtslinearen Grammatik akzeptiert),
dann gibt es einen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ der sie akzeptiert.

Sei also $L = L(G)$ für eine rechtslineare Grammatik $G = (V, T, R, S)$

Dazu konstruieren wir einen ε-NDEA $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$ mit:

$$\begin{array}{rcll} K & := & V \cup \{q_{stop}\} & \quad (q_{stop} \text{ neu}) \\ I & := & \{S\} & \\ \Sigma & := & T & \\ F & := & \{q_{stop}\} & \end{array}$$

Satz von Kleene

Beweis (Fortsetzung)

Definition von Δ:

$$\Delta(\ (X, u),\ X'\ ) \quad :\Longleftrightarrow_{def} \quad X \to uX' \in R$$
$$\Delta(\ (X, u),\ q_{stop}\ ) \quad :\Longleftrightarrow_{def} \quad X \to u \in R$$

für $X, X' \in K$ und $u \in \Sigma^*$

Durch Induktion über die Länge einer Ableitung:

$$S \Longrightarrow_G^* w \quad \underline{\text{gdw}} \quad \Delta^*(\ (S, w),\ q_{stop}\ ) \quad \underline{\text{gdw}} \quad w \in L(\mathcal{A})$$

Wegen Gleichmächtigkeit von ϵ-NDEA- mit DEA-Automaten gibt es dann auch einen determinierten endlichen Automaten, der L akzeptiert.

$\square$

Satz von Kleene

Beispiel:

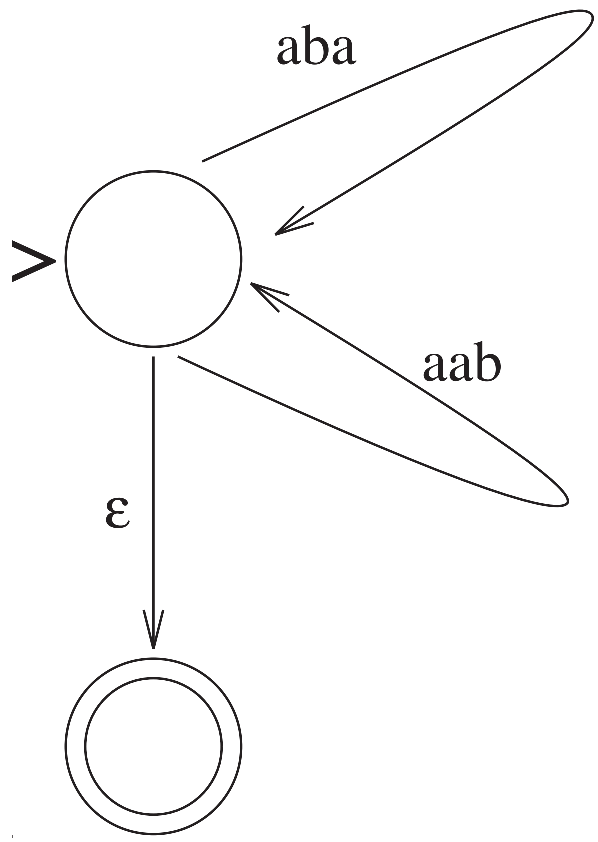
Grammatik G mit Regeln

$$S \rightarrow abaS$$
$$S \rightarrow aabS$$
$$S \rightarrow \varepsilon$$

Sprache

$$L(G) = \{aba, aab\}^*$$

ε-NDEA:



Nächste Vorlesung

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke