Grundlagen der Theoretischen Informatik

3. Endliche Automaten (IV)

11.05.2016

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Organisatorisches

- **1. Teilklausur:** Mittwoch, 8.06.2016, D028, 14:30-15:30
  - Anmeldung bis zum 06.06.2016, 8:00 Uhr über MeToo möglich
  - Alte Teilklausuren + Musterlösungen auf der Webseite der Übung verfügbar (zum Üben)
  - Wer am 8.06 nicht angemeldet ist, kann an der Teilklausur nicht teilnehmen.
  - Wenn Sie an der Teilklausur nicht teilehmen möchten, melden Sie sich bitte ab.

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Jetzt

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

Pumping-Lemma

"Aufpumpbarkeit" (informell)

Lange Wörter $x \in L$ lassen sich zerlegen

$$x = uvw \qquad |v| \geq 1$$

so dass

$$u \underbrace{vv \ldots v}_{i \text{ mal}} w = uv^m w$$

wieder in L liegt (für alle $m \geq 1$)

Pumping-Lemma

Pumping Lemma (informell)

Zu jeder regulären Sprache L gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass
alle Wörter

$$w \in L \qquad \text{mit } |w| \geq n$$

aufgepumpt werden können

Pumping-Lemma

Pumping Lemma (informell)

Zu jeder regulären Sprache L gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass
alle Wörter

$$w \in L \qquad \text{mit } |w| \geq n$$

aufgepumpt werden können

Anwendung

- Wichtige Information über die Struktur regulärer Sprachen
- Nachweis der Nicht-Regularität von Sprachen:
  Wenn das Pumping-Lemma für eine Sprache nicht gilt,
  dann kann sie nicht regulär sein

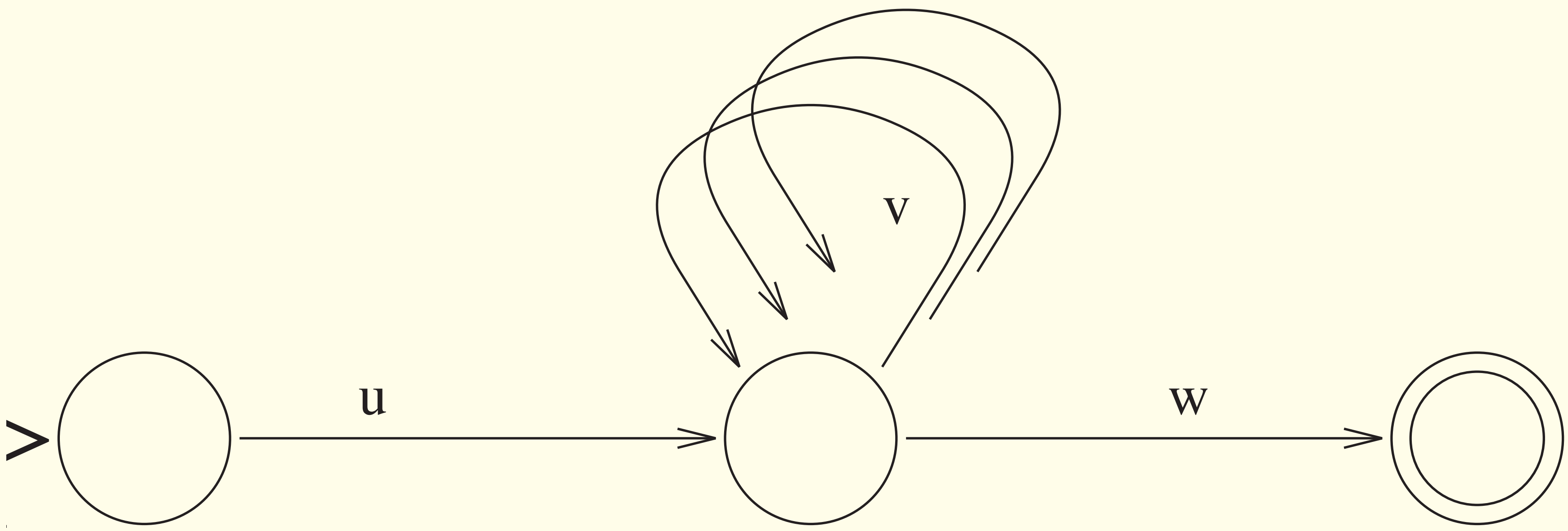
Pumping-Lemma: Intuition

Warum gilt das Pumping-Lemma?

- Zu regulärer Sprache L gibt es einen DEA, der L akzeptiert
- Dieser hat endliche Zustandsmenge K.
  Sei $m := |K|$.
- Wenn $|w| > |K|$, dann muss beim Akzeptieren von w eine Schleife durchlaufen werden.
- Die Schleife kann auf mehrfach durchlaufen werden.
- Das Teilwort v, das der Schleife entspricht kann aufgepumpt werden.

Pumping-Lemma: Intuition

Abstrakt gesehen



Pumping-Lemma: Formal

Theorem (Pumping-Lemma für L_3-Sprachen)

Sei $L \in \mathbf{RAT}$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass:

Für alle

$$x \in L \quad \text{mit} \quad |x| \geq n$$

existiert eine Zerlegung

$$x = uvw \qquad u, v, w \in \Sigma^*$$

mit

- $|v| \geq 1$
- $|v| < n$
- $uv^m w \in L \quad$ für alle $m \in \mathbb{N}$

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis: folgt nach Beispiele

Pumping-Lemma: Umkehrung

Korollar.
Wenn für eine Sprache das Pumping-Lemma **nicht** gilt,
dann ist sie **nicht** regulär.

Vorsicht

- Es gibt nicht-reguläre Sprachen, für die das Pumping-Lemma gilt.
  (Beispiel: $L = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 1\} \cup \{b^m c^n \mid m, n \geq 0\}$)

- Daraus, dass das Pumping-Lemma für eine Sprache gilt,
  folgt **nicht**, dass sie regulär ist.

Pumping-Lemma:Anwendung der Umkehrung

Beispiel

Folgende Sprachen sind **nicht regulär**:

1. $L_1 := \{a^i b a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

2. $L_2 := \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_1

Zu

$$L_1 := \{a^i ba^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Annahme: L_1 ist regulär.

Dann gilt für L_1 das Pumping-Lemma.

Sei n die Zahl aus dem Pumping-Lemma.

Dann muss sich das Wort

$$a^n ba^n \in L_1$$

aufpumpen lassen (da $|a^n ba^n| \geq n$).

Sei $a^n ba^n = uvw$ eine passende Zerlegung laut Lemma.

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_1 (Forts.)

1. Fall: $u = a^k, v = a^j, w = a^i ba^n$ mit $i, k \geq 0$, $j > 0$ und $k + j + i = n$.

Einmal aufpumpen ($m = 2$) ergibt:

$$uv^2w = a^k a^{2j} a^i ba^n = a^{k+2j+i} ba^n = a^{n+j} ba^n \notin L_1$$

Widerspruch zum Lemma!

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_1 (Forts.)

1. Fall: $u = a^k, v = a^j, w = a^i ba^n$ mit $i, k \geq 0$, $j > 0$ und $k + j + i = n$.

Einmal aufpumpen ($m = 2$) ergibt:

$$uv^2w = a^k a^{2j} a^i ba^n = a^{k+2j+i} ba^n = a^{n+j} ba^n \notin L_1$$

Widerspruch zum Lemma!

2. Fall: $u = a^n ba^i, v = a^j, w = a^k$

Widerspruch zum Lemma! (analog zu Fall 1)

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_1 (Forts.)

1. Fall: $u = a^k, v = a^j, w = a^i b a^n$ mit $i, k \geq 0$, $j > 0$ und $k + j + i = n$.

Einmal aufpumpen ($m = 2$) ergibt:

$$uv^2w = a^k a^{2j} a^i b a^n = a^{k+2j+i} b a^n = a^{n+j} b a^n \notin L_1$$

Widerspruch zum Lemma!

2. Fall: $u = a^n b a^i, v = a^j, w = a^k$

Widerspruch zum Lemma! (analog zu Fall 1)

3. Fall: $u = a^k, v = a^j b a^i, w = a^l$ mit $k + j = i + l = n$ und $i, j, k, l \geq 0$

Einmal aufpumpen ($m = 2$) ergibt:

$$uv^2w = a^k a^j b a^i a^j b a^i a^l = a^{k+j} b a^{i+j} b a^{i+l} \notin L_1$$

Widerspruch zum Lemma!

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_1 (Forts.)

Also: Annahme falsch.

Also: L_1 nicht regulär. $\square$

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_2

Zu

$$L_2 := \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl } \}$$

Annahme: L_2 ist regulär.

Dann gilt für L_2 das Pumping-Lemma.

Sei n die Zahl aus dem Pumping-Lemma.

Dann muss sich jedes Wort

$$a^p \in L_2 \quad \text{mit} \quad p \geq n$$

aufpumpen lassen.

Sei $a^p = uvw$ eine passende Zerlegung laut Lemma.

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_2 (Forts.)

Sei

$$a^p = uvw = a^i a^j a^k$$

also

$$i + j + k = p \geq n \qquad \text{und} \qquad 0 < j < n$$

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_2 (Forts.)

Fall 1: $i + k > 1$.

Pumpe $(i + k)$ mal:

$$uv^{i+k}w = a^i a^{j(i+k)} a^k$$

Nach Pumping-Lemma liegt dieses Wort in L_2, d. h.

$$i + j(i + k) + k \quad \text{prim}$$

Aber **Widerspruch**:

$$\begin{aligned} i + j(i + k) + k &= i + ij + jk + k \\ &= i(1 + j) + (j + 1)k \\ &= i(1 + j) + k(1 + j) \\ &= (i + k)(1 + j) \end{aligned}$$

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_2 (Forts.)

Fall 2: $i + k = 1$.

Pumpe $(j+2)$ mal:

$$uv^{j+2}w = a^i a^{j(j+2)} a^k$$

Nach Pumping-Lemma liegt dieses Wort in L_2, d. h.

$$i + j(j+2) + k \quad \text{prim}$$

Aber **Widerspruch!**:

$$\begin{aligned} i + j(j+2) + k &= 1 + j(j+2) \\ &= 1 + 2j + j^2 \\ &= (1+j)^2 \end{aligned}$$

Also: Annahme falsch. L_2 nicht regulär. $\square$

Pumping-Lemma: Beweis

Theorem (Pumping-Lemma für L_3-Sprachen)

Sei $L \in \mathbf{RAT}$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass:

Für alle

$$x \in L \quad \text{mit} \quad |x| \geq n$$

existiert eine Zerlegung

$$x = uvw \qquad u, v, w \in \Sigma^*$$

mit

- $|v| \geq 1$
- $|v| < n$
- $uv^m w \in L \quad$ für alle $m \in \mathbb{N}$

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis. Sei L eine reguläre Sprache.

1. Fall: L ist endlich.

Sei w_{max} das längste Wort in L.

Wir setzen

$$n := |w_{max}| + 1$$

Dann gibt es keine Wörter $x \in L$, für die $|x| \geq n$ gilt.

Also gilt dann Pumping-Lemma trivialerweise.

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

2. Fall: L ist unendlich.

Sei

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$$

ein endlicher Automat (DEA), der L akzeptiert.

Wir setzen

$$n := |K| + 1$$

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

Wir betrachten ein beliebiges Wort

$$x \;=\; x_1 x_2 \ldots x_t \;\in\; L \quad \text{mit} \quad |x| = t \geq n, \quad x_i \in \Sigma$$

Zu zeigen: x lässt sich aufpumpen.

Seien

$$q_0, q_1, \ldots, q_t \in K,$$

die Zustände, die beim Akzeptieren von x durchlaufen werden:

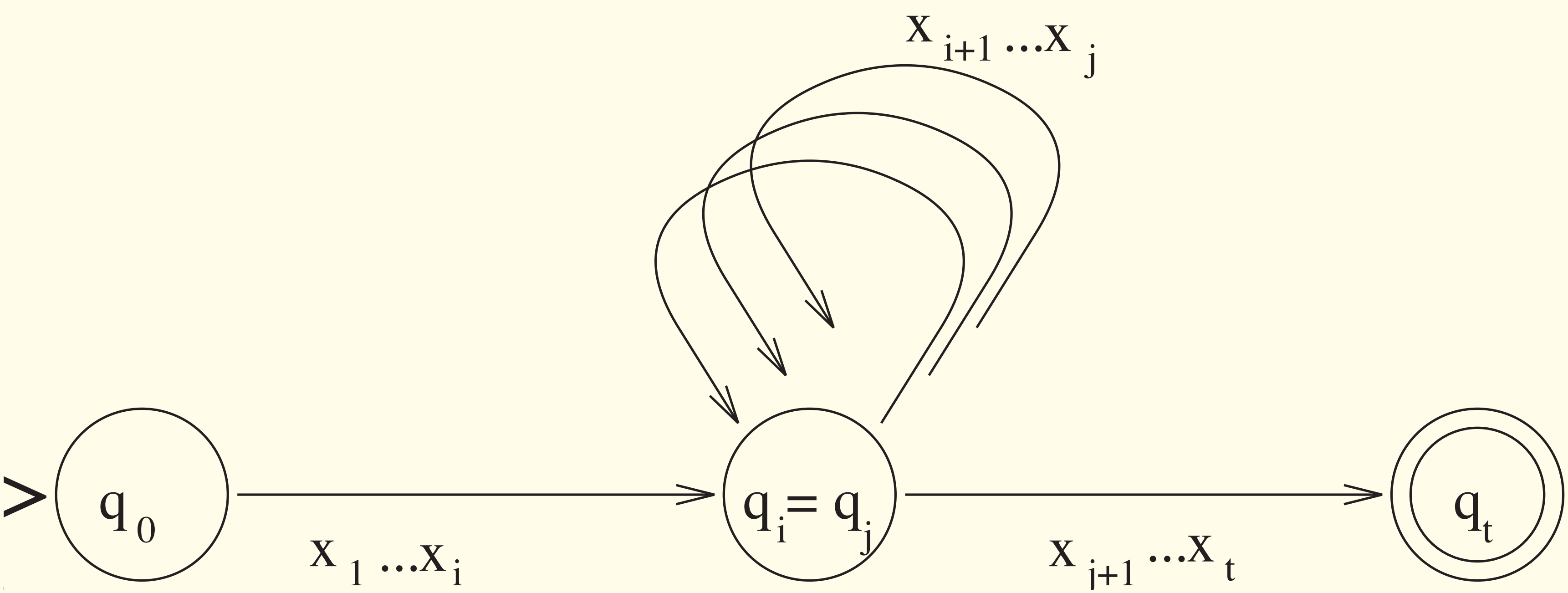
$$q_0 = s_0, \quad q_t \in F, \quad \delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1} \;\; \forall 0 \leq i \leq t-1$$

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

Da $t \geq |K| + 1$, muss es $0 \leq i < j \leq t - 1$ geben mit

- $q_i = q_j$
- $|j - i| \leq |K|$



Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

Wähle nun:

$$\left.\begin{array}{ll} u & x_1 \dots x_i \\ v & x_{i+1} \dots x_j \\ w & x_{j+1} \dots x_t \end{array}\right\} \qquad x = uvw \text{ mit } 1 \leq |v| < n.$$

Damit:

- Für alle $m \geq 0$ gibt es Wege

$$q_0, \dots, q_{i-1}, \underbrace{q_i, \dots, q_j = q_i, \dots, q_j = \cdots = q_i \dots, q_j}_{m \text{ mal}}, q_{j+1}, \dots, q_t$$

- Also: $uv^m w$ wird von $\mathcal{A}$ akzeptiert.
- Also: $uv^m w \in L \quad \square$

Pumping-Lemma: Stärkere Variante

Theorem (Pumping-Lemma für $\mathbf{L}_3$-Sprachen, stärkere Variante)
Sei $L \in \mathbf{RAT}$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass:

Für alle

$$x \in L \quad \text{mit} \quad |x| \geq n$$

existiert eine Zerlegung

$$x = uvw \qquad u, v, w \in \Sigma^*$$

mit

- $|v| \geq 1$
- $|uv| < n$ (statt $|v| < n$)
- $uv^m w \in L$ für alle $m \in \mathbb{N}$

Pumping-Lemma: Anwendung der stärkeren Variante

Beispiel (Palindrome)

Die Sprache der Palindrome

$$L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

ist nicht regulär

- Beweis gelingt **nicht** mit der schwächeren Variante des PL
  (die schwächere Version gilt für die Sprache)
- Beweis **gelingt** mit der stärkeren Varianten des PL

Pumping-Lemma: Anwendung der stärkeren Variante

Beispiel (Palindrome)

Die Sprache der Palindrome

$$L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

ist nicht regulär

Annahme: L ist regulär. Dann gilt für L_1 das Pumping-Lemma. Sei n die Zahl aus dem Pumping-Lemma.

Dann muss sich das Wort $a^n bba^n \in L$ aufpumpen lassen (da $|a^n bba^n| \geq n$).

Sei $a^n bba^n = uvw$ eine passende Zerlegung laut Lemma.

Da $|uv| < n$, ist $u = a^i, v = a^j, w = a^k bba^n$, wobei $j > 0$ und $i + j + k = n$

Aber dann $uv^0w = a^{i+k} bba^n \not\in L$, da $i + k < n$. Widerspruch.

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

Abschlusseigenschaften und Wortprobleme

Abschlusseigenschaften

Lemma. Seien zwei reguläre Sprachen L, L' gegeben.

Dann kann man folgende endlichen Automaten konstruieren:

- $\mathcal{A}_\neg$ akzeptiert $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$
- $\mathcal{A}_\cup$ akzeptiert $L \cup L'$
- $\mathcal{A}_\circ$ akzeptiert $L \circ L'$
- $\mathcal{A}_*$ akzeptiert L^*
- $\mathcal{A}_\cap$ akzeptiert $L \cap L'$

Beweis: An Tafel.

Abschlusseigenschaften

Idee:

1) $L = L(\mathcal{A})$ mit $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$

- $\mathcal{A}_\neg = (K, \Sigma, \delta, s_0, K \backslash F)$

2) $L = L(\mathcal{A})$, $L' = L(\mathcal{A}')$ mit $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$, $\mathcal{A}' = (K', \Sigma', \Delta', I', F')$

- $\mathcal{A}_\cup = (K \cup K', \Sigma, \Delta \cup \Delta', I \cup I', F \cup F')$
- $\mathcal{A}_\circ = (K \cup K', \Sigma, \Delta \cup \Delta' \cup (F \times \{\varepsilon\}) \times I', I, F')$
- $\mathcal{A}_* = (K \cup \{s_{neu}\}, \Sigma, \Delta \cup (F \times \{\varepsilon\}) \times I, I \cup \{s_{neu}\}, F \cup \{s_{neu}\})$
- $L \cap L' = \overline{(\overline{L} \cup \overline{L'})}$

Abschlusseigenschaften

Theorem. Wenn L, L' reguläre Sprachen sind, dann sind auch

- $\overline{L}$
- $L \cup L'$
- $L \circ L'$
- L^*
- $L \cap L'$

reguläre Sprachen.

Abschlusseigenschaften

Theorem. Wenn L, L' reguläre Sprachen sind, dann sind auch

- $\overline{L}$
- $L \cup L'$
- $L \circ L'$
- L^*
- $L \cap L'$

reguläre Sprachen.

Beweis.

Gemäß Lemma existieren Automaten, die diese Sprachen akzeptieren.

Also sind sie regulär.