Grundlagen der Theoretischen Informatik

Sommersemester 2016

20.04.2016

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

1. Terminologie
2. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
3. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
4. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
5. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
6. Komplexitätsklassen P und NP

Bis jetzt

- **Alphabete, Wörter**
  - Operationen auf Wörtern

    Konkatenation, i-te Potenz, Reverse
- **Sprache**
  - Operationen auf Sprachen

    Konkatenation, i-te Potenz, Reverse, Kleene-Hülle
- **Reguläre Ausdrücke**

  Reguläre Ausdrücke als Suchmuster für `grep`

Grammatik

- Beschreibt eine Sprache
- Menge von Regeln, mit deren Hilfe man Wörter ableiten kann

Grammatik

Definition (Grammatik)

Eine Grammatik G über einem Alphabet Σ ist ein Tupel

$$G = (V, T, R, S)$$

Dabei ist

- V eine endliche Menge von **Variablen**
- $T \subseteq \Sigma$ eine endliche Menge von **Terminalen** mit $V \cap T = \emptyset$
- R eine endliche Menge von **Regeln**
- $S \in V$ das **Startsymbol**

Grammatik

Definition (Regel)

Eine Regel ist ein Element

$$(P, Q) \in \big((V \cup T)^* \; V \; (V \cup T)^*\big) \times (V \cup T)^*$$

Das heißt:

- P und Q sind Wörter über $(V \cup T)$
- P muss mindestens eine Variable enthalten
- Q ist beliebig

Bezeichnung:

P**:** Prämisse

Q**:** Conclusio

Grammatik

Schreibweise für Regeln

- Schreibweise für Regel (P, Q):

$$P \rightarrow_G Q \qquad \text{bzw.} \qquad P \rightarrow Q$$

- Abkürzung für mehrere Regeln mit derselben Prämisse:

$$P \rightarrow Q_1 \mid Q_2 \mid Q_3 \qquad \text{für} \qquad P \rightarrow Q_1,\ P \rightarrow Q_2,\ P \rightarrow Q_3$$

Konvention (meistens)

- **Variablen** als Großbuchstaben
- **Terminale** als Kleinbuchstaben

Grammatik

Beispiel

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow B \\
B &\rightarrow do\ \ begin\ \ B\ \ end \\
B &\rightarrow A \\
A &\rightarrow nop\ \ A \\
A &\rightarrow \varepsilon
\end{aligned}$$

Rechnung einer Grammatik

Algorithmus

Eingabe: Eine Grammatik

1. *aktuellWort* $:= S$ (Startsymbol)
2. Wähle eine Regel $P \to Q$, so dass P in *aktuellWort* vorkommt
3. Ersetze (ein) Vorkommen von P in *aktuellWort* durch Q
4. Falls *aktuellWort* noch Variablen enthält (nicht terminal), GOTO 2

Rechnung einer Grammatik

Algorithmus

Eingabe: Eine Grammatik

1. $aktuellWort := S$ (Startsymbol)
2. Wähle eine Regel $P \to Q$, so dass P in $aktuellWort$ vorkommt
3. Ersetze (ein) Vorkommen von P in $aktuellWort$ durch Q
4. Falls $aktuellWort$ noch Variablen enthält (nicht terminal), GOTO 2

Ausgabe: Das terminale Wort $aktuellWort$

Rechnung einer Grammatik

Algorithmus

Eingabe: Eine Grammatik

1. $\mathit{aktuellWort} := S$ (Startsymbol)
2. Wähle eine Regel $P \to Q$, so dass P in *aktuellWort* vorkommt
3. Ersetze (ein) Vorkommen von P in *aktuellWort* durch Q
4. Falls *aktuellWort* noch Variablen enthält (nicht terminal), GOTO 2

Ausgabe: Das terminale Wort *aktuellWort*

Beachte: Die Berechnung

- ist nicht deterministisch (Auswahl der Regel)
- kann mehr als ein Ergebnis liefern (oder auch keines)
- kann in Endlosschleifen geraten

Rechnung einer Grammatik

Beispiel:

Welche Wörter kann man ableiten?

- $G_a = (\{S\}, \{a\}, \{R_1, R_2\}, S)$

$$R_1 = S \rightarrow aS$$
$$R_2 = S \rightarrow \epsilon$$

Rechnung einer Grammatik

Beispiel:

Welche Wörter kann man ableiten?

- $G_a = (\{S\}, \{a\}, \{R_1, R_2\}, S)$

$$\begin{aligned} R_1 &= S \to aS \\ R_2 &= S \to \epsilon \end{aligned}$$

- $G_{ab} = (\{S\}, \{a, b\}, \{R_1, R_2\}, S)$

$$\begin{aligned} R_1 &= S \to aSb \\ R_2 &= S \to \epsilon \end{aligned}$$

Rechnung einer Grammatik

Beispiel:

Welche Wörter kann man ableiten?

- $G_a = (\{S\}, \{a\}, \{R_1, R_2\}, S)$

$$\begin{aligned} R_1 &= S \to aS \\ R_2 &= S \to \epsilon \end{aligned}$$

- $G_{ab} = (\{S\}, \{a, b\}, \{R_1, R_2\}, S)$

$$\begin{aligned} R_1 &= S \to aSb \\ R_2 &= S \to \epsilon \end{aligned}$$

- Sei $G_{gerade} = (\{S, S_0\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \{R_1, R_2\}, S)$

$$\begin{aligned} R_1 &= S \to 1S \mid 2S_0 \mid 3S \mid 4S_0 \mid 5S \mid 6S_0 \mid 7S \mid 8S_0 \mid 9S \\ R_2 &= S_0 \to S \mid \epsilon \end{aligned}$$

Rechnung einer Grammatik

Beispiel:

Welche Wörter kann man ableiten?

- $G_a = (\{S\}, \{a\}, \{R_1, R_2\}, S)$

$$\begin{aligned} R_1 &= S \rightarrow aS \\ R_2 &= S \rightarrow \epsilon \end{aligned}$$

- $G_{ab} = (\{S\}, \{a, b\}, \{R_1, R_2\}, S)$

$$\begin{aligned} R_1 &= S \rightarrow aSb \\ R_2 &= S \rightarrow \epsilon \end{aligned}$$

- Sei $G_{gerade} = (\{S, S_0\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \{R_1, R_2\}, S)$

$$\begin{aligned} R_1 &= S \rightarrow 1S \mid 2S_0 \mid 3S \mid 4S_0 \mid 5S \mid 6S_0 \mid 7S \mid 8S_0 \mid 9S \\ R_2 &= S_0 \rightarrow S \mid \epsilon \end{aligned}$$

Beispiel

Grammatik $G_{ab} = (\{S\}, \{a, b\}, \{R_1, R_2\}, S)$

$$R_1 = S \rightarrow aSb$$
$$R_2 = S \rightarrow \epsilon$$

Mögliche Ableitung:

$S \Rightarrow_{R_1} aSb \Rightarrow_{R_1} aaSbb \Rightarrow_{R_1} aaaSbbb \Rightarrow_{R_2} aaabbb$

Also: $a^3 b^3 \in L(G_{ab})$

Rechnung einer Grammatik

Definition (Ableitung, Rechnung)

Gegeben:

- Grammatik $G = (V, T, R, S)$
- Wörter w, w' aus $(V \cup T)^*$

Rechnung einer Grammatik

Definition (Ableitung, Rechnung)

Gegeben:

- Grammatik $G = (V, T, R, S)$
- Wörter w, w' aus $(V \cup T)^*$

Es gilt

$$w \Longrightarrow_G w' \qquad (\text{„}w \text{ geht über in } w'\text{“})$$

falls

$$\exists u, v \in (V \cup T)^* \; \exists P \to Q \in R \; \big(w = uPv \text{ und } w' = uQv\big)$$

Rechnung einer Grammatik

Schreibweise für Ableitung

$$w \Longrightarrow_G^* w'$$

falls es Wörter $w_0, \ldots, w_n \in (V \cup T)^*$ $(n \geq 0)$ gibt mit

- $w = w_0$
- $w_m = w'$
- $w_i \Longrightarrow_G w_{i+1}$ für $0 \leq i < n$

Rechnung einer Grammatik

Schreibweise für Ableitung

$$w \Longrightarrow_G^* w'$$

falls es Wörter $w_0, \ldots, w_n \in (V \cup T)^*$ $(n \geq 0)$ gibt mit

- $w = w_0$
- $w_m = w'$
- $w_i \Longrightarrow_G w_{i+1} \quad$ für $0 \leq i < n$

Merke: $\quad w \Longrightarrow_G^* w$ gilt stets $(n = 0)$

Rechnung einer Grammatik

Schreibweise für Ableitung

$$w \Longrightarrow_G^* w'$$

falls es Wörter $w_0, \ldots, w_n \in (V \cup T)^*$ $(n \geq 0)$ gibt mit

- $w = w_0$
- $w_m = w'$
- $w_i \Longrightarrow_G w_{i+1}$ für $0 \leq i < n$

Merke: $w \Longrightarrow_G^* w$ gilt stets $(n = 0)$

Die Folge $w_0, \ldots, w_n$ heißt Ableitung oder Rechnung

– von w_0 nach w_n

– in G

– der Länge n

Vorsicht: Indeterminismus

Beispiel

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, B\}, \{a, b, c\}, \{R_0, R_1, R_2, R_3\}, S)$

$$
\begin{aligned}
R_0 &= \quad S \to aBBc \\
R_1 &= \quad B \to b \\
R_2 &= \quad B \to ba \\
R_3 &= \quad BB \to bBa
\end{aligned}
$$

Vorsicht: Indeterminismus

Beispiel

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, B\}, \{a, b, c\}, \{R_0, R_1, R_2, R_3\}, S)$

$$\begin{aligned} R_0 &= \quad S \to aBBc \\ R_1 &= \quad B \to b \\ R_2 &= \quad B \to ba \\ R_3 &= \quad BB \to bBa \end{aligned}$$

Drei Möglichkeiten, das Wort *abbac* zu erzeugen:

$$\begin{array}{lllllll} S & \Longrightarrow_{R_0} & aBBc & \Longrightarrow_{R_1} & abBc & \Longrightarrow_{R_2} & abbac \\ S & \Longrightarrow_{R_0} & aBBc & \Longrightarrow_{R_2} & aBbac & \Longrightarrow_{R_1} & abbac \\ S & \Longrightarrow_{R_0} & aBBc & \Longrightarrow_{R_3} & abBac & \Longrightarrow_{R_1} & abbac \end{array}$$

Vorsicht: Indeterminismus

Warum ist das ein Feature und kein Bug?

- Erlaubt einfachere Definition von Grammatiken

- Für manche Sprachen gibt es keine eindeutige Grammatiken

- Eine Grammatik beschreibt die Struktur der Wörter.
  Ein Wort kann mehrere mögliche Strukturen haben.

- Für natürliche Sprachen braucht man das unbedingt:
  Manche Sätze sind mehrdeutig (in ihrer Grammatik),
  also müssen auch die Grammatiken mehrdeutig sein!

Vorsicht: Indeterminismus

Beispiel: Mehrdeutige Grammatik natürlichsprachlicher Sätze

Time flies like an arrow.
Fruit flies like a banana.

Vorsicht: Indeterminismus

Beispiel: Mehrdeutige Grammatik natürlichsprachlicher Sätze

Time flies like an arrow.
Fruit flies like a banana.

- Beide Sätze haben zwei mögliche grammatische Strukturen.
- Erst unser semantisches Verständnis wählt eine aus.

Erzeugte Sprache, Äquivalenz

Definition (Erzeugte Sprache)

Gegeben: Eine Grammatik G

Die von G erzeugte Sprache $L(G)$ ist die Menge aller **terminalen** Wörter, die durch G vom Startsymbol S aus erzeugt werden können:

$$L(G) \quad := \quad \{w \in T^* \mid S \Longrightarrow_G^* w\}$$

Erzeugte Sprache, Äquivalenz

Definition (Erzeugte Sprache)

Gegeben: Eine Grammatik G

Die von G erzeugte Sprache $L(G)$ ist die Menge aller **terminalen** Wörter, die durch G vom Startsymbol S aus erzeugt werden können:

$$L(G) \quad := \quad \{w \in T^* \mid S \Longrightarrow_G^* w\}$$

Definition (Äquivalenz)

Zwei Grammatiken G_1, G_2 heißen **äquivalent** <u>gdw</u>

$$L(G_1) = L(G_2)$$

Beispiel

Grammatik $G_{ab} \; = \; (\{S\}, \{a, b\}, \{R_1, R_2\}, S)$

$$R_1 \quad = \quad S \to aSb$$
$$R_2 \quad = \quad S \to \epsilon$$

Mögliche Ableitung:

$S \Rightarrow_{R_1} aSb \Rightarrow_{R_1} aaSbb \Rightarrow_{R_1} aaaSbbb \Rightarrow_{R_2} aaabbb$

Also: $a^3 b^3 \in L(G_{ab})$

$L(G_{ab}) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Beispiel

Grammatik $G_{ab} \;=\; (\{S\}, \{a, b\}, \{R_1, R_2\}, S)$

$$
\begin{array}{rcl}
R_1 & = & S \to aSb \\
R_2 & = & S \to \epsilon
\end{array}
$$

$L(G_{ab}) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Beweis:

Dass G_{ab} tatsächlich genau diese Sprache erzeugt, zeigen wir allgemein, indem wir alle möglichen Ableitungen von G_{ab} betrachten.

- $\subseteq$ Zu zeigen: Jedes terminale Wort, das von G_{ab} erzeugt wird, hat die Form $a^n b^n$. Induktion über die Länge der Ableitung
- $\supseteq$ Zu zeigen: Für alle n kann $a^n b^n$ von G_{ab} erzeugt werden.

Beweis

$\subseteq$: zu zeigen: Jedes terminale Wort, das von G_{ab} erzeugt wird, hat die Form $a^n b^n$.

Wir zeigen für alle $w \in (V \cup T)^*$: Falls $S \Longrightarrow^*_{G_{ab}} w$, dann gilt entweder $w = a^n S b^n$ oder $w = a^n b^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Dazu verwenden wir eine **Induktion über die Länge einer Ableitung** von S nach w.

Beweis

$\subseteq$: zu zeigen: Jedes terminale Wort, das von G_{ab} erzeugt wird, hat die Form $a^n b^n$.

Wir zeigen für alle $w \in (V \cup T)^*$: Falls $S \overset{*}{\underset{G_{ab}}{\Longrightarrow}} w$, dann gilt entweder $w = a^n S b^n$ oder $w = a^n b^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Dazu verwenden wir eine **Induktion über die Länge einer Ableitung** von S nach w.

Induktionsanfang: $w = S = a^0 S b^0$

Beweis

$\subseteq$: zu zeigen: Jedes terminale Wort, das von G_{ab} erzeugt wird, hat die Form $a^n b^n$.

Wir zeigen für alle $w \in (V \cup T)^*$: Falls $S \Longrightarrow^*_{G_{ab}} w$, dann gilt entweder $w = a^n S b^n$ oder $w = a^n b^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Dazu verwenden wir eine **Induktion über die Länge einer Ableitung** von S nach w.

Induktionsanfang: $w = S = a^0 S b^0$

Induktionsschritt: Es gelte $S \Longrightarrow^*_{G_{ab}} w \Longrightarrow_{G_{ab}} w'$, und für w gelte nach der Induktionsvoraussetzung bereits $w = a^n b^n$ oder $w = a^n S b^n$. Außerdem sei $w \Longrightarrow_{G_{ab}} w'$ eine Ableitung in einem Schritt. Nun ist zu zeigen: $w' = a^m b^m$ oder $w' = a^m S b^m$ für irgendein m.

Beweis

Fall 1: $w = a^n b^n$**.** Dann konnte keine Regel angewandt werden, da w schon terminal ist, also tritt dieser Fall nie auf.

Fall 2: $w = a^n S b^n$**.** Dann wurde von w nach w' entweder Regel R_1 oder R_2 angewandt.

Falls R_1 angewandt wurde, dann gilt $w = a^n S b^n \Longrightarrow_{R_1} a^n a S b b^n = a^{n+1} S b^{n+1} = w'$.

Falls R_2 angewandt wurde, dann gilt $w = a^n S b^n \Longrightarrow_{R_2} a^n \varepsilon b^n = w'$. Dies Wort ist terminal und hat die geforderte Form $a^n b^n$.

Beweis Forts.

$\supseteq$: zu zeigen: Für alle n kann $a^n b^n$ von G_{ab} erzeugt werden: $S \Longrightarrow^*_{G_{ab}} a^n b^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Um $a^n b^n$ zu erzeugen, wende man auf S n-mal die Regel R_1 und dann einmal die Regel R_2 an. $\square$

Beispiel: Dycksprache

Definition (Dycksprache)

Gegeben:

- $k \in \mathbb{N}$
- $\Sigma_k := \{x_1, \overline{x_1}, x_2 \dots, x_k, \overline{x_k}\}$ ein Alphabet mit $2k$ Symbolen

Beispiel: Dycksprache

Definition (Dycksprache)

Gegeben:

– $k \in \mathbb{N}$

– $\Sigma_k := \{x_1, \overline{x_1}, x_2 \ldots, x_k, \overline{x_k}\}$ ein Alphabet mit $2k$ Symbolen

Die Dycksprache D_k ist die kleinste Menge die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\epsilon \in D_k$,
2. Falls $w \in D_k$, so auch $x_i w \overline{x_i}$.
3. Falls $u, v \in D_k$, so auch uv.

Beispiel: Dycksprache

Definition (Dycksprache)

Gegeben:

– $k \in \mathbb{N}$

– $\Sigma_k := \{x_1, \overline{x_1}, x_2 \ldots, x_k, \overline{x_k}\}$ ein Alphabet mit $2k$ Symbolen

Die Dycksprache D_k ist die kleinste Menge die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\epsilon \in D_k$,
2. Falls $w \in D_k$, so auch $x_i w \overline{x_i}$.
3. Falls u, $v \in D_k$, so auch uv.

Interpretiert man die x_i als öffnende, die $\overline{x_i}$ als zugehörige schließende Klammern, so kann man die Dycksprache als die **Menge aller korrekten Klammerausdrücke** sehen.

Beispiel: Dycksprache

$k = 2$

$\Sigma_2 := \{\ [,], (,)\ \}$

- $[[()[]]()] \in D_2$
- $([)] \notin D_2$
- $)) \notin D_2$

Beispiel: Dycksprache

Definition (Dycksprache)

Gegeben:

– $k \in \mathbb{N}$, $\Sigma_k := \{x_1, \overline{x_1}, x_2 \ldots, x_k, \overline{x_k}\}$ ein Alphabet mit $2k$ Symbolen

Die Dycksprache D_k ist die kleinste Menge die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\epsilon \in D_k$,
2. Falls $w \in D_k$, so auch $x_i w \overline{x_i}$.
3. Falls u, $v \in D_k$, so auch uv.

Grammatik $G = (\{S\}, \{x_1, \overline{x_1}, x_2 \ldots, x_k, \overline{x_k}\}, R, S)$ mit $L(G) = D_k$

$R_1 : \quad S \to \varepsilon$

$R_2 : \quad S \to x_1 S \overline{x_1} \mid \ldots \mid x_k S \overline{x_k}$

$R_3 : \quad S \to SS$

Beispiel: Dycksprache

Um zu zeigen, dass $L(G) = D_k$, zeigen wir dass $L(G)$ die kleinste Menge ist die folgende Bedingungen erfüllt:

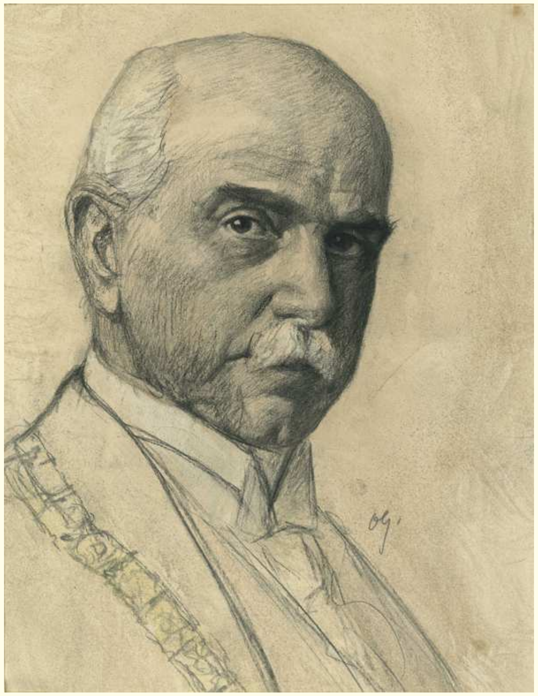
1. $\epsilon \in L(G)$,
2. Falls $w \in L(G)$, so auch $x_i w \overline{x_i}$.
3. Falls $u, v \in L(G)$, so auch uv.

Beweis: an der Tafel.

Beispiel: Dycksprache

Walther von Dyck (1856-1934)

- Mathematiker
- Hochschulpolitiker
- Erster Rektor der TU München
- Einer der Gründungsväter des Deutschen Museums



[Foto: Deutsches Museum]

Bis jetzt

- Reguläre Ausdrücke.
- Grammatik.
- Ableitung.
- die von einer Grammatik erzeugte Sprache.