

Grundlagen der Theoretischen Informatik

Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen (V)

13.07.2016

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Übersicht

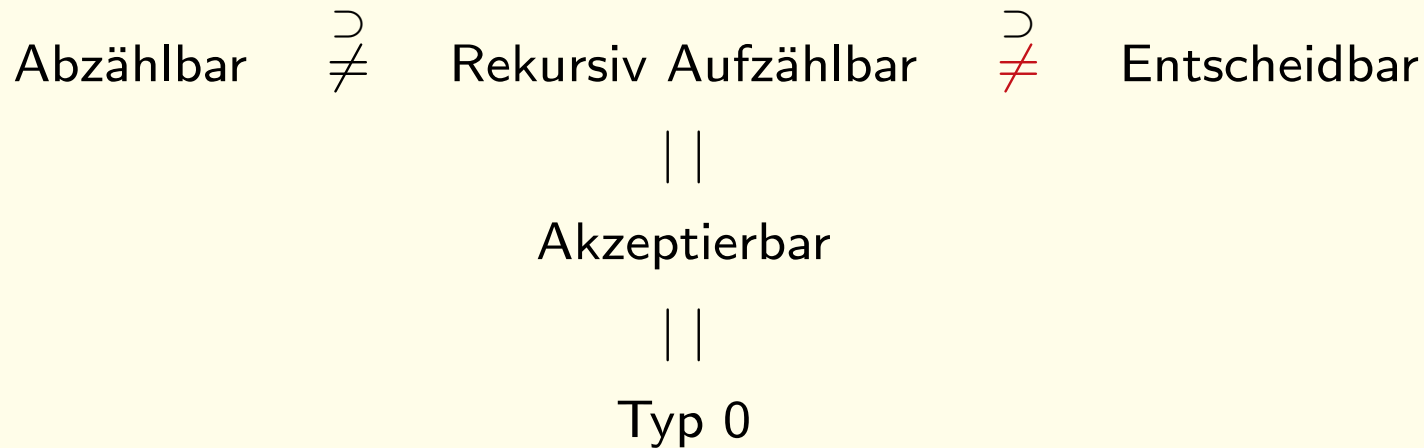
1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- **Entscheidbar/Aufzählbar**
- **Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0**
- Unentscheidbarkeit

Übersicht

Sprachen



- Das Komplement einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar.
- Eine Sprache L ist genau dann entscheidbar, wenn sie und ihr Komplement akzeptierbar sind.

Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- Entscheidbar/Aufzählbar
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- **Unentscheidbarkeit**

Gödelisierung von DTMs

Definition (Gödelnummern von DTMs)

DTMn werden als Gödelzahlen kodiert:

- DTMs können als Gödelwörter dargestellt werden.
- Die Buchstaben der Gödelwörter können in Ziffern kodiert wrden, um Gödelnummern zu bekommen.
- Notation: $\hat{g}(\mathcal{M})$ für die Gödelnummer der DTM \mathcal{M} .

Gödelisierung von DTMs

Definition (Jede Zahl ist Gödelnummer)

Jede natürliche Zahl n soll Gödelnummer einer DTM \mathcal{M}_n sein.

Wir definieren

$$\mathcal{M}_n := \begin{cases} \mathcal{M}, & \text{falls } \hat{g}(\mathcal{M}) = n \\ \mathcal{M}_{halt} & \text{falls } \nexists \mathcal{M} \hat{g}(\mathcal{M}) = n \end{cases}$$

\mathcal{M}_{halt} ist eine TM, die sofort anhält und weiter nichts tut.

Halteproblem

Definition [Allgemeines Halteproblem]

Das **allgemeine Halteproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n bei Eingabe i hält.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{H}_{allg} := \{ \langle n, i \rangle \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } i \}.$$

Halteproblem

Definition [Spezielles Halteproblem]

Das **spezielle Halteproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n bei Eingabe n hält.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{H} := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } n\}.$$

Halteproblem

Definition [Null-Halteproblem]

Das **Null-Halteproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n bei leerer Eingabe hält.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{H}_0 := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei leerer Eingabe}\}$$

Manchmal auch:

“bei Eingabe 0” anstatt “bei leerer Eingabe”.

Leerheitsproblem

Definition [Leerheitsproblem]

Das **Leerheitsproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n bei **keiner** Eingabe aus Σ^* hält.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{E} := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei keiner Eingabe aus } \Sigma^*\}.$$

Totalitätsproblem

Definition [Totalitätsproblem]

Das **Totalitätsproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n bei **jeder** Eingabe aus Σ^* hält.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{T} := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei jeder Eingabe aus } \Sigma^*\}.$$

Gleichheitsproblem

Definition [Gleichheitsproblem]

Das **Gleichheitsproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n die gleiche Sprache über Σ akzeptiert wie die DTM mit Gödelnummer m .

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{E}q := \{ \langle n, m \rangle \mid \mathcal{M}_n \text{ akzeptiert die gleiche Sprache über } \Sigma \text{ wie } \mathcal{M}_m \}.$$

Entscheidbarkeitsproblem

Definition [Entscheidbarkeitsproblem]

Das **Entscheidbarkeitsproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n eine entscheidbare Sprache über Σ akzeptiert.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{E}nt := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ akzeptiert eine entscheidbare Sprache über } \Sigma\}.$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Theorem (Halteproblem ist unentscheidbar)

Das spezielle Halteproblem $\mathcal{H} := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } n\}$ ist unentscheidbar.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Theorem (Halteproblem ist unentscheidbar)

Das spezielle Halteproblem $\mathcal{H} := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } n\}$ ist unentscheidbar.

Beweis (A. Turing)

Beweis durch Widerspruch mit einem **Diagonalisierungsargument**.

Angenommen, es gebe eine DTM $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$, die das spezielle Halteproblem \mathcal{H} entscheidet.

Konstruiere eine neue Maschine \mathcal{M}' aus $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$:

- Wenn $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ „Y“ antwortet, geht \mathcal{M}' in eine Endlosschleife (terminiert nicht).
- Wenn $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ „N“ antwortet, terminiert \mathcal{M}' .

Die neue Maschine habe Gödelnummer n (also: $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}'$)

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Beweis (A. Turing), Forts.

Was macht \mathcal{M}_n bei Eingabe n ?

- Falls \mathcal{M}_n bei Eingabe n terminiert, dann antwortet $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ auf Eingabe n mit „Y“, dann terminiert \mathcal{M}_n auf Eingabe von n **nicht**
Widerspruch!
- Falls \mathcal{M}_n bei Eingabe n nicht terminiert, dann antwortet $\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$ auf Eingabe n mit „N“, dann terminiert \mathcal{M}_n auf Eingabe von n
Widerspruch!

Akzeptierbarkeit des Halteproblems

Theorem (Akzeptierbarkeit von \mathcal{H})

Das spezielle Halteproblem \mathcal{H} ist aufzählbar. D. h. die Sprache

$$\mathcal{H} = \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } n \}$$

ist akzeptierbar.

Akzeptierbarkeit des Halteproblems

Theorem (Akzeptierbarkeit von \mathcal{H})

Das spezielle Halteproblem \mathcal{H} ist aufzählbar. D. h. die Sprache

$$\mathcal{H} = \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } n \}$$

ist akzeptierbar.

Beweis:

Idee:

Akzeptieren durch Simulation von \mathcal{M}_n mit Hilfe der universellen DTM.

Akzeptierbarkeit des Halteproblems

Theorem (Akzeptierbarkeit von \mathcal{H})

Das spezielle Halteproblem \mathcal{H} ist aufzählbar. D. h. die Sprache

$$\mathcal{H} = \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } n \}$$

ist akzeptierbar.

Beweis:

Sei $\mathcal{M}_{\text{prep}}$ die TM, die die Eingabe auf dem Arbeitsband in die Form bringt, die \mathcal{U} fordert.

Sei $\mathcal{M}_{\mathcal{H}} := \mathcal{M}_{\text{prep}}\mathcal{U}$

$s, \#n\# \vdash_{\mathcal{M}_{\text{prep}}}^* q, \#n\#w_{\delta, \mathcal{M}_n}\#$ \mathcal{U} simuliert dann die Arbeit von \mathcal{M}_n bei Input n .

$\mathcal{M}_{\mathcal{H}} := \mathcal{M}_{\text{prep}}\mathcal{U}$ hält bei Input n genau dann, wenn \mathcal{M}_n bei Input n hält
genau dann, wenn $n \in \mathcal{H}$.

Halteproblem

Theorem (Halteproblem ist unentscheidbar)

Das spezielle Halteproblem $\mathcal{H} := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } n\}$ ist unentscheidbar.

Theorem (Akzeptierbarkeit von \mathcal{H})

Das spezielle Halteproblem \mathcal{H} ist aufzählbar. D. h. die Sprache

$$\mathcal{H} = \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } n \}$$

ist akzeptierbar.

Korollar Das Komplement von \mathcal{H} ist nicht aufzählbar.

Reduktion von Problemen

Wie zeigt man, dass ein Problem unentscheidbar ist?

Reduktion (informell)

Wir geben eine **totale, berechenbare Funktion** f an, die

- eine Instanz p_1 von P_1
- in eine Instanz p_2 von P_2 umwandelt,
- und zwar so, dass die Antwort zu p_1 „ja“ ist gdw die Antwort zu p_2 „ja“ ist.

Wenn P_1 unentscheidbar ist, dann ist auch P_2 unentscheidbar.

Reduktion von Problemen

Definition

Seien L_1, L_2 Sprachen über \mathbb{N} .

L_1 wird auf L_2 reduziert,

$$L_1 \preceq L_2$$

gdw

es gibt eine TM-berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \in L_1 \text{ gdw } f(n) \in L_2).$$

Reduktion von Problemen

Lemma

Ist $L_1 \preceq L_2$, und ist L_1 **unentscheidbar**, so ist auch L_2 **unentscheidbar**.

Reduktion von Problemen

Lemma

Ist $L_1 \preceq L_2$, und ist L_1 **unentscheidbar**, so ist auch L_2 **unentscheidbar**.

Beweis

- Angenommen, L_2 ist entscheidbar.
- Sei \mathcal{M}_2 eine Turing-Maschine, die L_2 entscheidet.
- Wegen $L_1 \preceq L_2$ gibt es eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \in TM$ mit $n \in L_1$ gdw $f(n) \in L_2$.
- Sei \mathcal{M}_f eine DTM, die f berechnet.
- Dann kann man daraus die Maschine $\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_f \mathcal{M}_2$ konstruieren, für die gilt:
 - \mathcal{M}_1 , gestartet mit Input n , hält mit $h, \#Y\#$, falls $f(n) \in L_2$, d.h. wenn $n \in L_1$ ist.
 - \mathcal{M}_1 , gestartet mit Input n , hält mit $h, \#N\#$, falls $f(n) \notin L_2$, d.h. wenn $n \notin L_1$ ist.
- Die Maschine \mathcal{M}_1 entscheidet also L_1 , ein Widerspruch.

Unentscheidbarkeit

Theorem [Unentscheidbarkeit von \mathcal{H}_0].

Das Null-Halteproblem

$$\mathcal{H}_0 = \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ h\u00e4lt bei Eingabe } 0\}$$

ist unentscheidbar.

Unentscheidbarkeit

Beweis: Gegeben eine TM \mathcal{M}_n .

Kombiniere diese mit einer DTM, die n aufs Band schreibt.

$f(n)$ sei definiert als die Gödelnummer dieser neuen Maschine.

$\mathcal{M}_{f(n)}$ terminiert auf Eingabe von 0

gdw

\mathcal{M}_n terminiert auf Eingabe von n

Damit:

Reduktion des speziellen Halteproblems auf das Null-Halteproblem.

(f ist total und berechenbar!)

Also:

Unentscheidbarkeit des Null-Halteproblems folgt aus

Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Unentscheidbarkeit

Theorem [Unentscheidbarkeit von \mathcal{K}_0].

Das allgemeine Halteproblem

$$\mathcal{H}_{\text{allg}} = \{ \langle n, i \rangle \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } i \}$$

ist unentscheidbar.

Unentscheidbarkeit

Theorem [Unentscheidbarkeit von \mathcal{K}_0].

Das allgemeine Halteproblem

$$\mathcal{H}_{\text{allg}} = \{ \langle n, i \rangle \mid \mathcal{M}_n \text{ h\u00e4lt bei Eingabe } i \}$$

ist unentscheidbar.

Beweis 1:

Wir zeigen, dass $\mathcal{H}_0 \preceq \mathcal{H}_{\text{allg}}$:

Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(n) = \langle n, 0 \rangle$ (TM berechenbar).

Dann $n \in \mathcal{H}_0$ gdw. \mathcal{M}_n h\u00e4lt bei Eingabe 0 gdw. $f(n) \in \mathcal{H}_{\text{allg}}$.

Unentscheidbarkeit

Theorem [Unentscheidbarkeit von \mathcal{K}_0].

Das allgemeine Halteproblem

$$\mathcal{H}_{\text{allg}} = \{\langle n, i \rangle \mid \mathcal{M}_n \text{ h\u00e4lt bei Eingabe } i\}$$

ist unentscheidbar.

Beweis 2:

Wir zeigen, dass $\mathcal{H} \preceq \mathcal{H}_{\text{allg}}$:

Sei $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $g(n) = \langle n, n \rangle$ (TM berechenbar).

Dann $n \in \mathcal{H}$ gdw. \mathcal{M}_n h\u00e4lt bei Eingabe n gdw. $g(n) \in \mathcal{H}_{\text{allg}}$.

Unentscheidbarkeit

Ähnlich kann man per Reduktion die Unentscheidbarkeit der folgenden Probleme zeigen:

- \mathcal{E} , das Leerheitsproblem.

$$\mathcal{E} := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei keiner Eingabe aus } \Sigma^*\}$$

- \mathcal{T} , das Totalitätsproblem.

$$\mathcal{T} := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei jeder Eingabe aus } \Sigma^*\}.$$

- $\mathcal{E}q$, das Gleichheitsproblem.

$$\mathcal{E}q := \{\langle n, m \rangle \mid \mathcal{M}_n \text{ akzeptiert die gleiche Sprache über } \Sigma \text{ wie } \mathcal{M}_m \}.$$

- $\mathcal{E}nt$, das Entscheidbarkeitsproblem.

$$\mathcal{E}nt := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ akzeptiert eine entscheidbare Sprache über } \Sigma\}.$$

Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- Entscheidbar/Aufzählbar
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- **Unentscheidbarkeit**

Übersicht

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

Übersicht

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP