

Grundlagen der Theoretischen Informatik

3. Endliche Automaten (II)

4.05.2017

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Übersicht

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

Letzte Vorlesung

- **Determinierte endliche Automaten (DEAs)**
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping-Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

Endlicher Automat: Definition

Definition. Ein endlicher Automat (e.a.) (finite automaton) ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F).$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von **Zuständen**,
- Σ ein **endliches Alphabet** (aus dessen Buchstaben die Eingabewörter bestehen können),
- $\delta : K \times \Sigma \rightarrow K$ die totale(!) **Übergangsfunktion**,
- $s_0 \in K$ der **Startzustand**, und
- $F \subseteq K$ die Menge der **finalen Zustände**.

Endlicher Automat: Übergangsfunktion

Bedeutung der Übergangsfunktion

$\delta(q, a) = q'$ bedeutet:

- Der Automat ist im Zustand q ,
- liest ein a und
- geht in den Zustand q' über.

Wir erweitern δ zu δ^*

$\delta^* : K \times \Sigma^* \rightarrow K$ ist strukturell rekursiv über Σ^* definiert:

$$\begin{aligned}\delta^*(q, \varepsilon) &:= q \\ \delta^*(q, wa) &:= \delta(\delta^*(q, w), a)\end{aligned}$$

Wenn klar ist, was gemeint ist, wird δ^* auch einfach als δ geschrieben.

Endlicher Automat: Akzeptierte Sprache

Definition (Von einem endlichen Automaten akzeptierte Sprache)

Die von einem Automaten \mathcal{A} **akzeptierte** Sprache, ist definiert als

$$L(\mathcal{A}) := \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(s_0, w) \in F\}$$

Definition (Von endlichen Automaten akzeptierte Sprachen)

Die Menge

$$\mathbf{RAT} := \{L \mid \text{es gibt einen endlichen Automaten } \mathcal{A} \text{ mit } L = L(\mathcal{A})\}$$

der von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen
heißt Menge der **rationalen** Sprachen

Jetzt

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)

Determiniert / indeterminiert

Determinierter endlicher Automat

- Für einen Zustand q und eine Eingabe a
genau ein einziger Nachfolgezustand
- festgelegt durch Übergangsfunktion δ

Indeterminierter endlicher Automat

- Für einen Zustand q und eine Eingabe a
evtl. mehrere Nachfolgezustände – oder gar keiner
- festgelegt durch Übergangsrelation Δ

Indeterminierter endlicher Automat

Definition (Indeterminierter endlicher Automat)

Ein **indeterminierter** endlicher Automat (NDEA) ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ein endliches Alphabet,
- $\Delta \subseteq (K \times \Sigma) \times K$ eine Übergangsrelation,
- $I \subseteq K$ eine Menge von Startzuständen,
- $F \subseteq K$ eine Menge von finalen Zuständen.

NDEA: Übergangsrelation

Definition (Erweiterung von Δ zu Δ^*)

$$\Delta^* \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$$

ist definiert durch:

$$\Delta^*((q, \varepsilon), q') \quad \underline{\text{gdw}} \quad q' = q$$

$$\Delta^*((q, wa), q') \quad \underline{\text{gdw}} \quad \exists q'' \in K (\Delta^*((q, w), q'') \wedge \Delta((q'', a), q'))$$

NDEA: Akzeptierte Sprache

Wann akzeptiert ein indeterminierter Automat ein Wort?

Ein indeterminierter endlicher Automat \mathcal{A} akzeptiert ein Wort w , wenn

- es **mindestens einen** Weg mit der **Beschriftung** w durch \mathcal{A} gibt,
- der in einem **finalen** Zustand endet.

NDEA: Akzeptierte Sprache

Wann akzeptiert ein indeterminierter Automat ein Wort?

Ein indeterminierter endlicher Automat \mathcal{A} akzeptiert ein Wort w , wenn

- es **mindestens einen** Weg mit der **Beschriftung** w durch \mathcal{A} gibt,
- der in einem **finalen** Zustand endet.

Definition (Von einem NDEA akzeptierte Sprache)

Die von einem indeterminierten endlichen Automaten \mathcal{A} **akzeptierte** Sprache ist

$$L(\mathcal{A}) := \{w \in \Sigma^* \mid \exists s_0 \in I \exists q \in F : \Delta^*((s_0, w), q)\}$$

NDEA: Beispiel

Der Automat

$$\mathcal{A} = (\{S_0, S_1, S_2\}, \{a, b\}, \Delta, \{S_0\}, \{S_0\})$$

mit

$$\Delta(S_0, a) = \{S_1\}$$

$$\Delta(S_1, b) = \{S_0, S_2\}$$

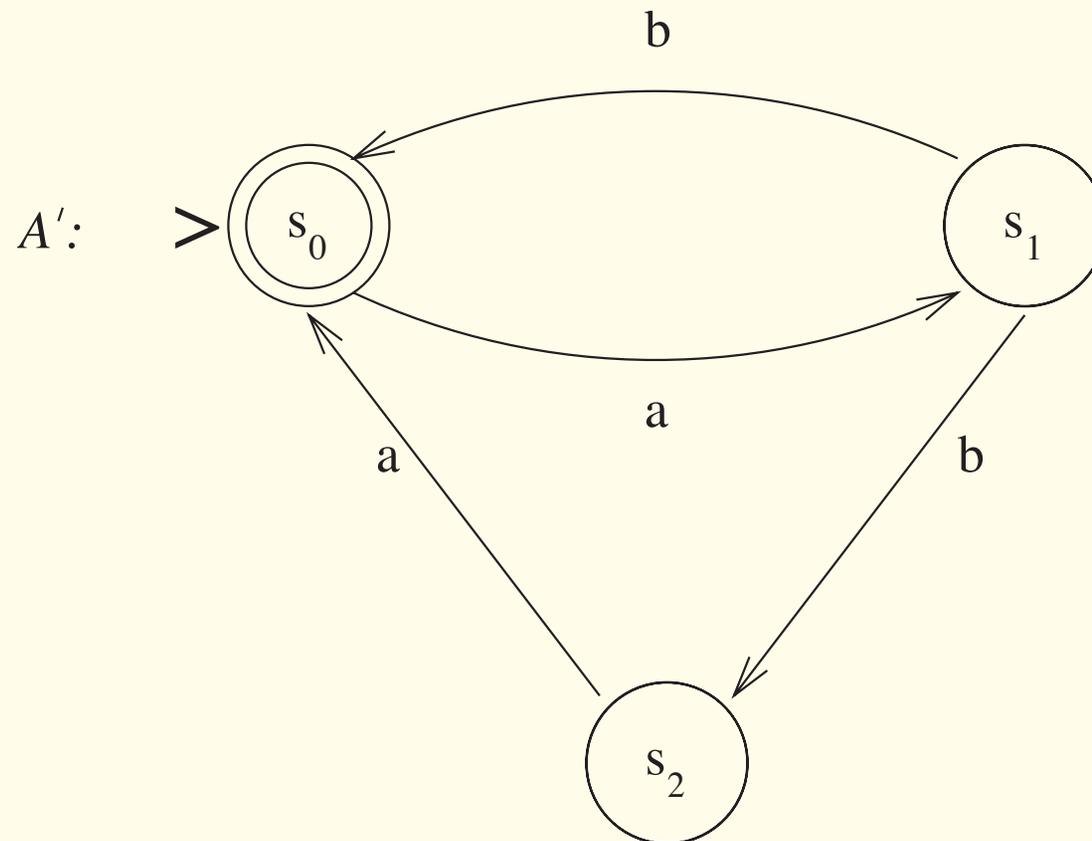
$$\Delta(S_2, a) = \{S_0\}$$

akzeptiert die Sprache

$$L = \{ab, aba\}^*$$

NDEA: Graphische Darstellung

Der indeterminierte Automat für Beispiel auf Seite 14



Akzeptiert: $\{ab, aba\}^*$

Indeterminierter endlicher Automat

Vom indeterminierten Automaten zum Algorithmus?

Vom Automaten zum Algorithmus (für das Wortproblem):

- **DEA** = **Algorithmus**
- **NDEA** + **Suchstrategie** = **Algorithmus**

Indeterminierter endlicher Automat

Vom indeterminierten Automaten zum Algorithmus?

Vom Automaten zum Algorithmus (für das Wortproblem):

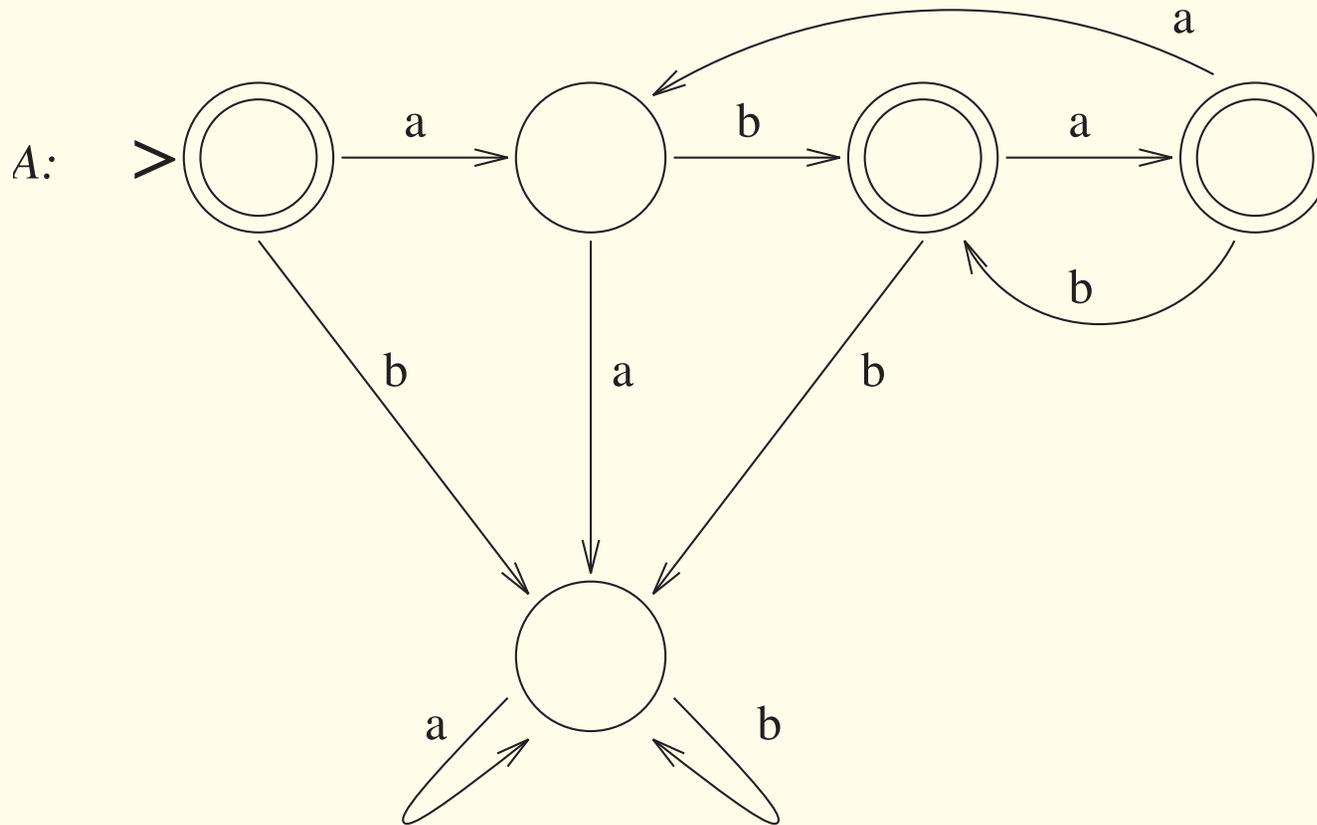
- **DEA** = **Algorithmus**
- **NDEA** + **Suchstrategie** = **Algorithmus**

Zwei Sichtweisen auf indeterminierte Automaten

- Der Automat durchläuft **alle** Wege
(**parallel** oder mittels **Backtracking**)
- Der Automat **rät**, welcher von mehreren
möglichen Folgezuständen der richtige ist

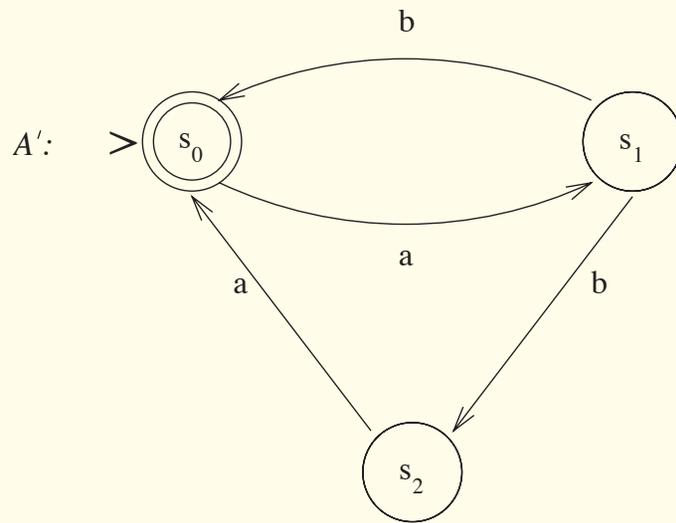
NDEA und DEA: Beispiel

DEA für gleiche Sprache wie NDEA auf Seite 15

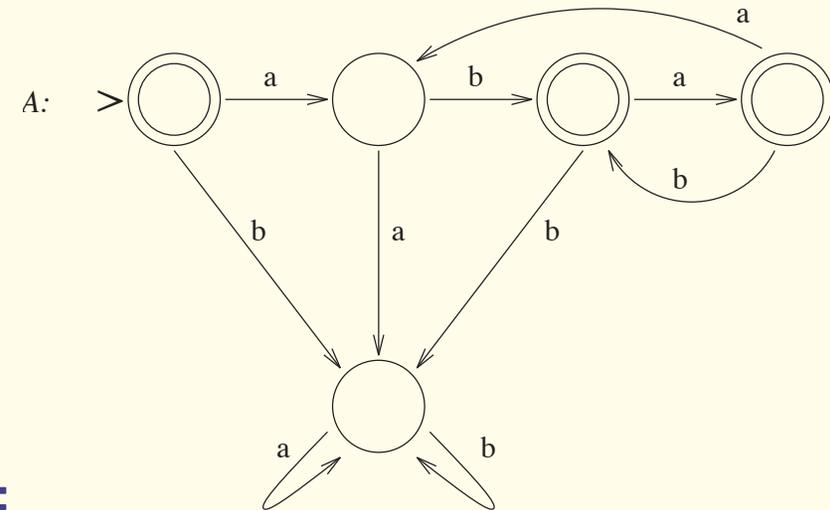


NDEA und DEA

Vergleich NDEA / DEA



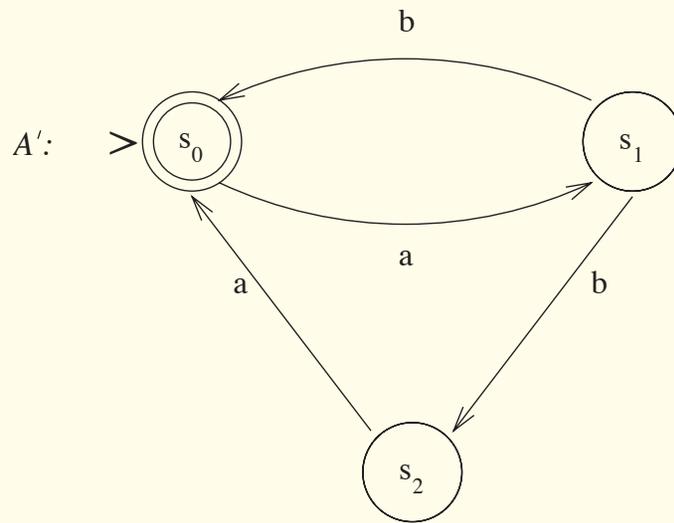
NDEA:



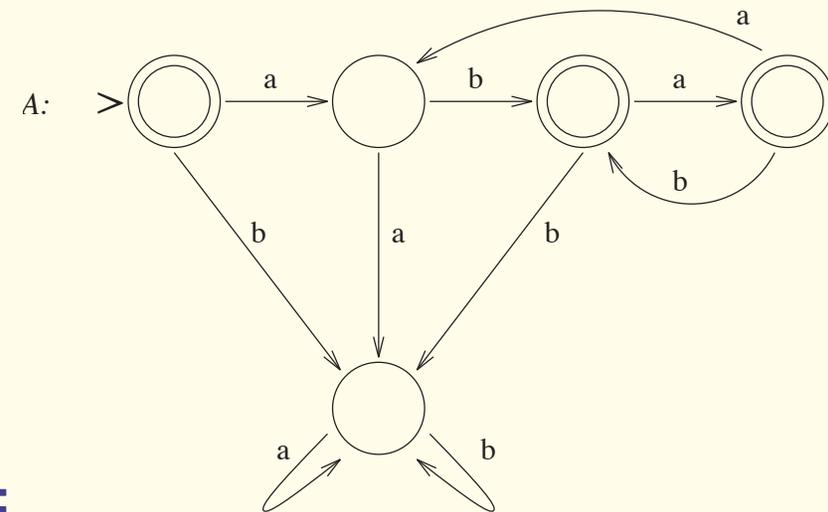
DEA:

NDEA und DEA

Vergleich NDEA / DEA



NDEA:



DEA:

- DEA hat mehr Zustände, komplizierter
- DEA muss nicht „raten“
- DEA braucht genauso viele Schritte

NDEA und DEA

Wir zeigen später:

Für jeden indeterminierten Automaten A_{NDEA}
gibt es einen determinierten Automaten A_{DEA} mit

$$L(A_{\text{NDEA}}) = L(A_{\text{DEA}})$$

NDEA und DEA: Weiteres Beispiel

Determinierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^* \{a\} \{a, b\}$$

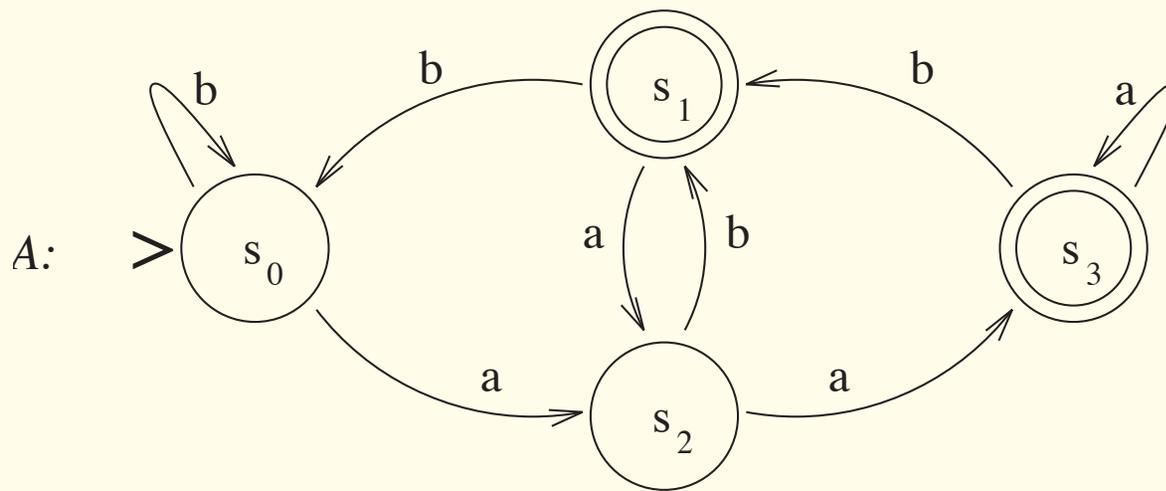
(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe a ist)

NDEA und DEA: Weiteres Beispiel

Determinierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^* \{a\} \{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe a ist)



Idee: Im Zustand jeweils die letzten zwei Buchstaben merken

NDEA und DEA: Weiteres Beispiel

Indeterminierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^* \{a\} \{a, b\}$$

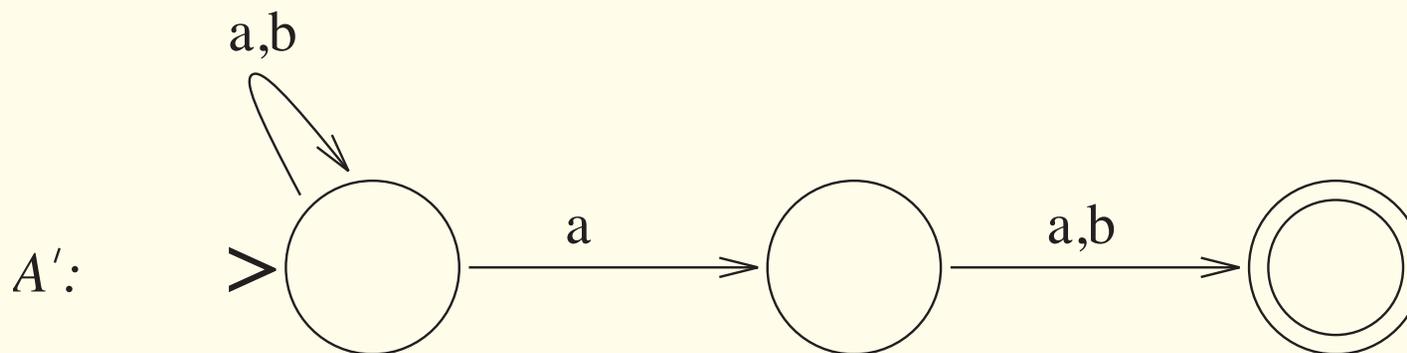
(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe a ist)

NDEA und DEA: Weiteres Beispiel

Indeterminierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^* \{a\} \{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe a ist)



NDEA und DEA: Größenvergleich

Größenvergleich (Worst case)

Sprache über $\{a, b\}$ der Wörter, deren n -letzter Buchstabe ein a ist

Determinierter Automat: 2^n Zustände

(einen für jede Buchstabenkombination der Länge n)

Indeterminierter Automat: $n + 1$ Zustände

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Theorem. DEA gleich mächtig wie NDEA

Eine Sprache ist rational

(es gibt einen **determinierten** endlichen Automaten, der sie akzeptiert)

gdw

es gibt einen **indeterminierten** endlichen Automaten, der sie akzeptiert.

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Theorem. DEA gleich mächtig wie NDEA

Eine Sprache ist rational

(es gibt einen **determinierten** endlichen Automaten, der sie akzeptiert)

gdw

es gibt einen **indeterminierten** endlichen Automaten, der sie akzeptiert.

Beweis. „ \Rightarrow “:

- Sei L eine rationale Sprache.
- Dann gibt es laut Definition einen determinierten endlichen Automaten \mathcal{A}_{DEA} mit $L = L(\mathcal{A}_{\text{DEA}})$.
- Jeder determinierte endliche Automat ist aber insbesondere auch ein (besonderer) indeterminierter endlicher Automat.

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Theorem. DEA gleich mächtig wie NDEA

Eine Sprache ist rational

(es gibt einen **determinierten** endlichen Automaten, der sie akzeptiert)

gdw

es gibt einen **indeterminierten** endlichen Automaten, der sie akzeptiert.

Beweis „ \Leftarrow “:

Sei $\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein (beliebiger) indeterminierter endlicher Automat. Er akzeptiert die Sprache $L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}})$.

Beweisidee: Konstruiere aus $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$ einen determinierten Automaten \mathcal{A}_{DEA} mit

$$L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}}) = L(\mathcal{A}_{\text{DEA}})$$

mit Hilfe einer Potenzmengenkonstruktion ...

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Fortsetzung ...

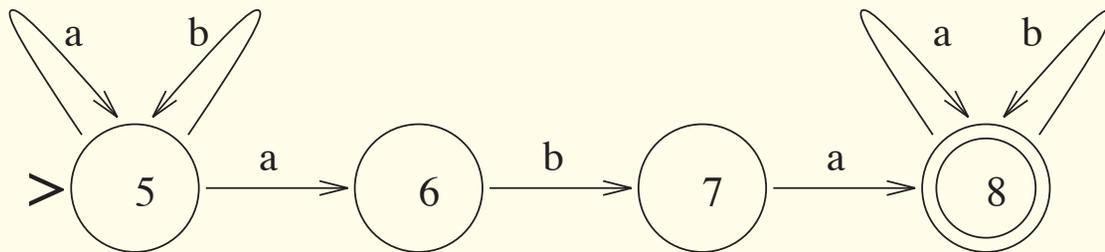
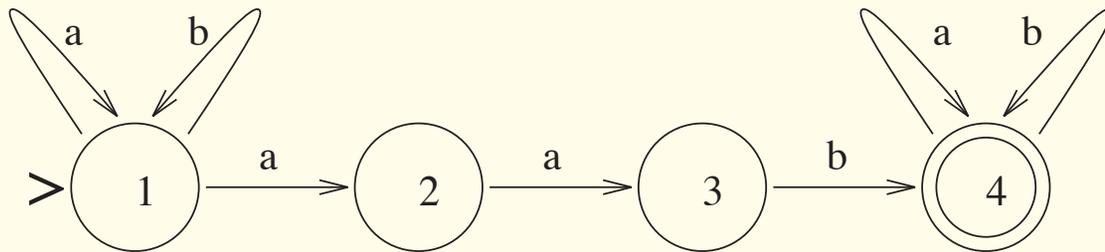
- Zustände in \mathcal{A}_{DEA} bestehen aus Mengen von Zuständen von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$
- Wenn man in $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$ mit w nach q_1, \dots, q_n gelangt, dann gelangt man in \mathcal{A}_{DEA} mit w nach $q' = \{q_1, \dots, q_n\}$.
- Initialer Zustand von \mathcal{A}_{DEA} :
Menge aller initialen Zustände von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$
- Finale Zustände von \mathcal{A}_{DEA} :
Jede Menge von Zuständen, die einen finalen Zustand von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$ enthält

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Ein NDEA, der die folgende Sprache akzeptiert:

$$L_{aab/aba} = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ hat } aab \text{ oder } aba \text{ als Teilwort}\}$$



Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Startzustand:

Menge der alten Startzustände, also $\{1, 5\}$.

Nächster Schritt:

Übergang von $\{1, 5\}$ mit a

$$\Delta(1, a) = \{1, 2\}$$

$$\Delta(5, a) = \{5, 6\}$$

Also neuer Zustand $\{1, 2, 5, 6\}$ mit

$$\delta_{\mathcal{A}_{\text{DEA}}}(\{1, 5\}, a) = \{1, 2, 5, 6\}$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Nächster Schritt:

Übergang von $\{1, 5\}$ mit b .

$$\Delta(1, b) = \{1\}$$

$$\Delta(5, b) = \{5\}$$

Für den Eingabebuchstaben b bleibt \mathcal{A}_{DEA} also im Startzustand.

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Nächster Schritt:

Übergang von $\{1, 2, 5, 6\}$ mit a

$$\Delta(1, a) = \{1, 2\}$$

$$\Delta(2, a) = \{3\}$$

$$\Delta(5, a) = \{5, 6\}$$

$$\Delta(6, a) = \emptyset$$

Also neuer Zustand $\{1, 2, 3, 5, 6\}$ mit

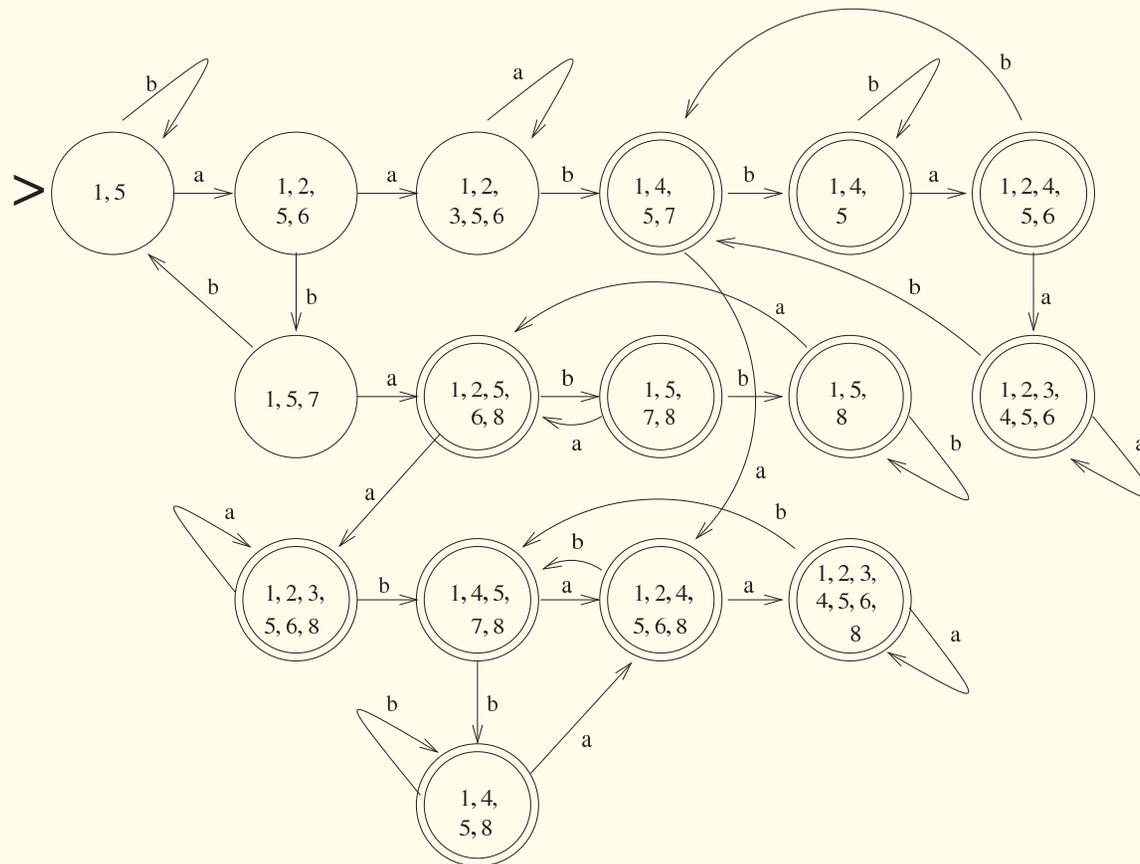
$$\delta_{\mathcal{A}_{\text{DEA}}}(\{1, 2, 5, 6\}, a) = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

usw.

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Es ergibt sich folgender determinierter Automat \mathcal{A}_{DEA} :



Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Konstruktion des determinierten endlichen Automaten \mathcal{A}_{DEA} formal:

Gegeben: Indeterminierter endlicher Automat

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Wir konstruieren: Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

mit

- $K' = 2^K$ (die Potenzmenge von K)
- Übergangsfunktion

$$\delta' : 2^K \times \Sigma \rightarrow 2^K \quad \text{mit} \quad \delta'(M, a) := \bigcup_{q \in M} \Delta(q, a)$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Konstruktion des determinierten endlichen Automaten \mathcal{A}_{DEA} formal:

Gegeben: Indeterminierter endlicher Automat

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Wir konstruieren: Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

mit

- $I' = I$ (die Menge der initialen Zustände von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$)
- $F' = \{M \subseteq K \mid M \cap F \neq \emptyset\}$
(alle Zustandsmengen von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$, die einen finalen Zustand enthalten)

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Konstruktion des determinierten endlichen Automaten \mathcal{A}_{DEA} formal:

Gegeben: Indeterminierter endlicher Automat

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Wir konstruieren: Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

mit

Merke:

- $\emptyset \in K'$
- $\delta'(\emptyset, x) = \emptyset$ für alle $x \in \Sigma$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Lemma: Für alle $w \in \Sigma^*$: $\delta'^*(M, w) = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w)$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Lemma: Für alle $w \in \Sigma^*$: $\delta'^*(M, w) = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w)$

Beweis durch Induktion über die Länge von w :

Induktionsanfang: $|w| = 0$

$$\delta'^*(M, \varepsilon) = M = \bigcup_{q \in M} \{q\} = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, \varepsilon)$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Lemma: Für alle $w \in \Sigma^*$: $\delta'^*(M, w) = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w)$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} & \delta'^*(M, wa) \\ = & \delta'(\delta'^*(M, w), a) && \text{Def. von } * \\ = & \bigcup_{p \in \delta'^*(M, w)} \Delta(p, a) && \text{Definition von } \delta' \\ = & \bigcup_{p \in \left(\bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w) \right)} \Delta(p, a) && \text{Ind.-Vor. für } \delta'(M, w) \\ = & \{q' \mid \exists q \in M \exists p \in \Delta^*(q, w) : q' \in \Delta(p, a)\} \\ = & \{q' \mid \exists q \in M q' \in \Delta^*(q, wa)\} && \text{Def. von } * \\ = & \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, wa) \end{aligned}$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Schluss)

Es gilt für alle $w \in \Sigma^*$:

$w \in L(\mathcal{A}_{\text{DEA}})$

gdw $\delta'^*(I', w) \in F'$ (Def. der Sprache eines Automaten)

gdw $\delta'^*(I, w) \in F'$ (da $I' = I$ per Def.)

gdw $\delta'^*(I, w) \cap F \neq \emptyset$ (Def. von F')

gdw $\bigcup_{q \in I} \Delta^*(q, w) \cap F \neq \emptyset$ (nach Lemma)

gdw $\exists q \in I \exists q' \in F (q' \in \Delta^*(q, w))$

gdw $w \in L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}})$ (Def. der Sprache eines Automaten)

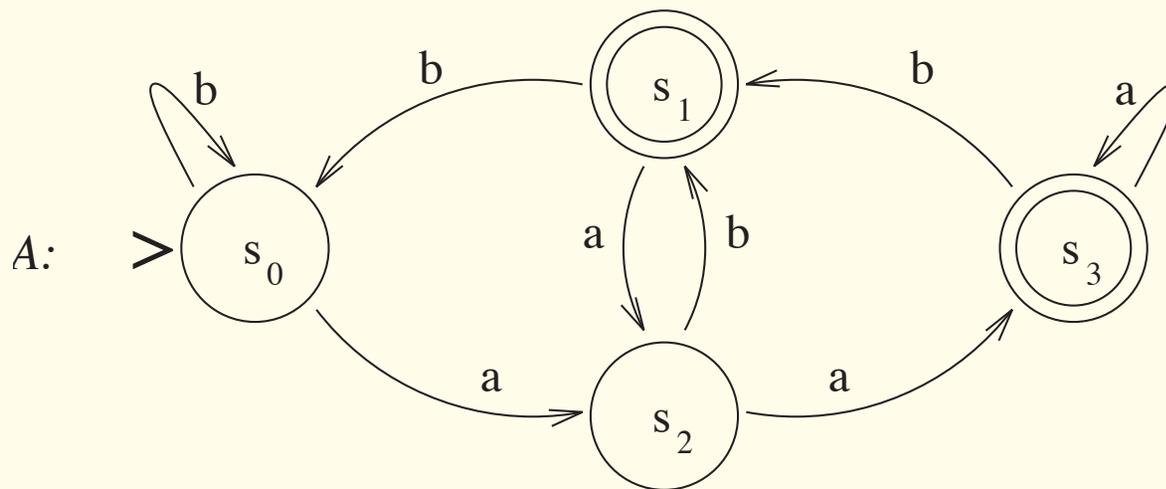
Damit: $L(\mathcal{A}_{\text{DEA}}) = L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}})$ \square

Beispiel

Determinierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^* \{a\} \{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe a ist)



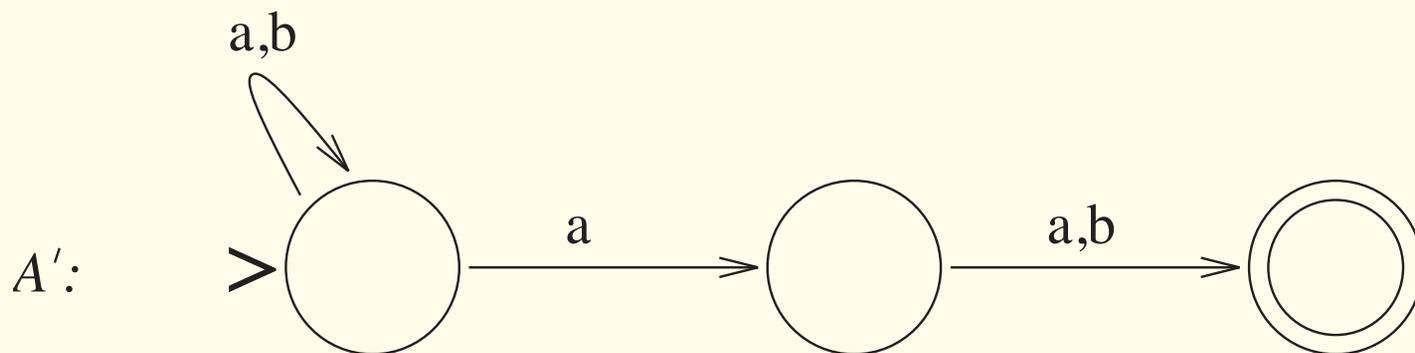
Idee: Im Zustand jeweils die letzten zwei Buchstaben merken

Beispiel

Indeterminierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^* \{a\} \{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe a ist)

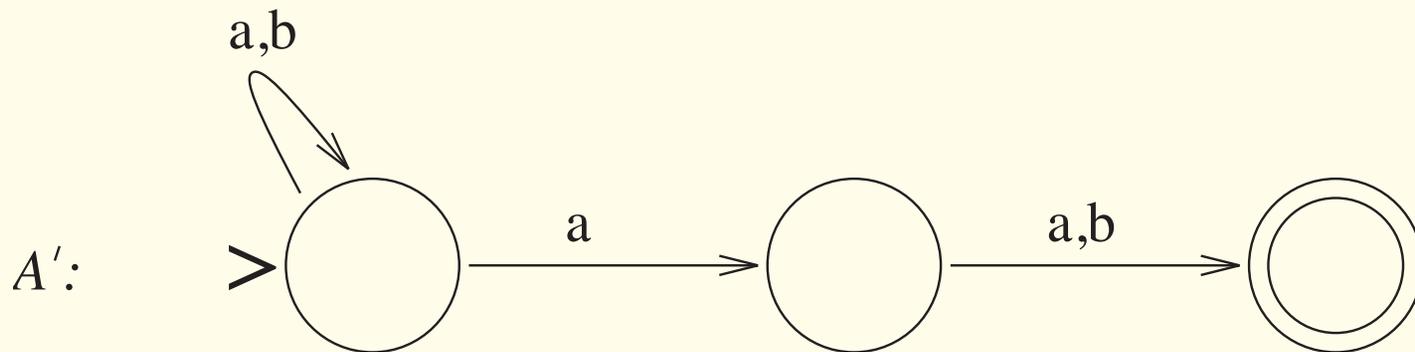


Beispiel

Indeterminierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^* \{a\} \{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe a ist)



Konstruktion des determinierten endlichen Automaten: an der Tafel.

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping-Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

Automaten mit epsilon-Kanten

Automaten mit ε -Kanten

Vom NDEA zum Automaten mit ε -Kanten

Bisher (NDEA): Kanten mit einem **Buchstaben** beschriftet

Jetzt (**Automat mit ε -Kanten**): Kanten mit einem **Wort** beschriftet
Es darf auch das leere Wort ε sein!

Automaten mit ε -Kanten

Vom NDEA zum Automaten mit ε -Kanten

Bisher (NDEA): Kanten mit einem **Buchstaben** beschriftet

Jetzt (**Automat mit ε -Kanten**): Kanten mit einem **Wort** beschriftet
Es darf auch das leere Wort ε sein!

Ein Automaten mit ε -Kanten kann ...

- in einem Schritt ein ganzes Wort verarbeiten
- einen Zustandsübergang machen, ohne dabei einen Buchstaben zu lesen

Automaten mit ε -Kanten: Definition

Definiton. Ein **Automat mit ε -Kanten (ε -NDEA)** A ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ein endliches Alphabet,
- $\Delta \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$ eine (endliche) Übergangsrelation,
- $I \subseteq K$ eine Menge von Startzuständen,
- $F \subseteq K$ eine Menge von finalen Zuständen

Automaten mit ε -Kanten: Übergangsrelation

Definition. (Erweiterung von Δ zu Δ^*)

$$\Delta^* \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$$

ist (ähnlich wie für NDEAs) definiert durch:

$$\Delta^*((q, \varepsilon), q') \quad \underline{\text{gdw}} \quad q' = q \quad \text{oder} \quad \Delta((q, \varepsilon), q')$$

$$\begin{aligned} \Delta^*((q, w_1 w_2), q') \quad \underline{\text{gdw}} \quad & \exists q'' \in K \\ & \Delta^*((q, w_1), q'') \vee \Delta((q, w_1), q'') \\ & \wedge \\ & \Delta^*((q'', w_2), q') \vee \Delta((q'', w_2), q') \end{aligned}$$

Automaten mit ε -Kanten: Akzeptierte Sprache

Definition. Die von einem Automaten mit ε -Kanten

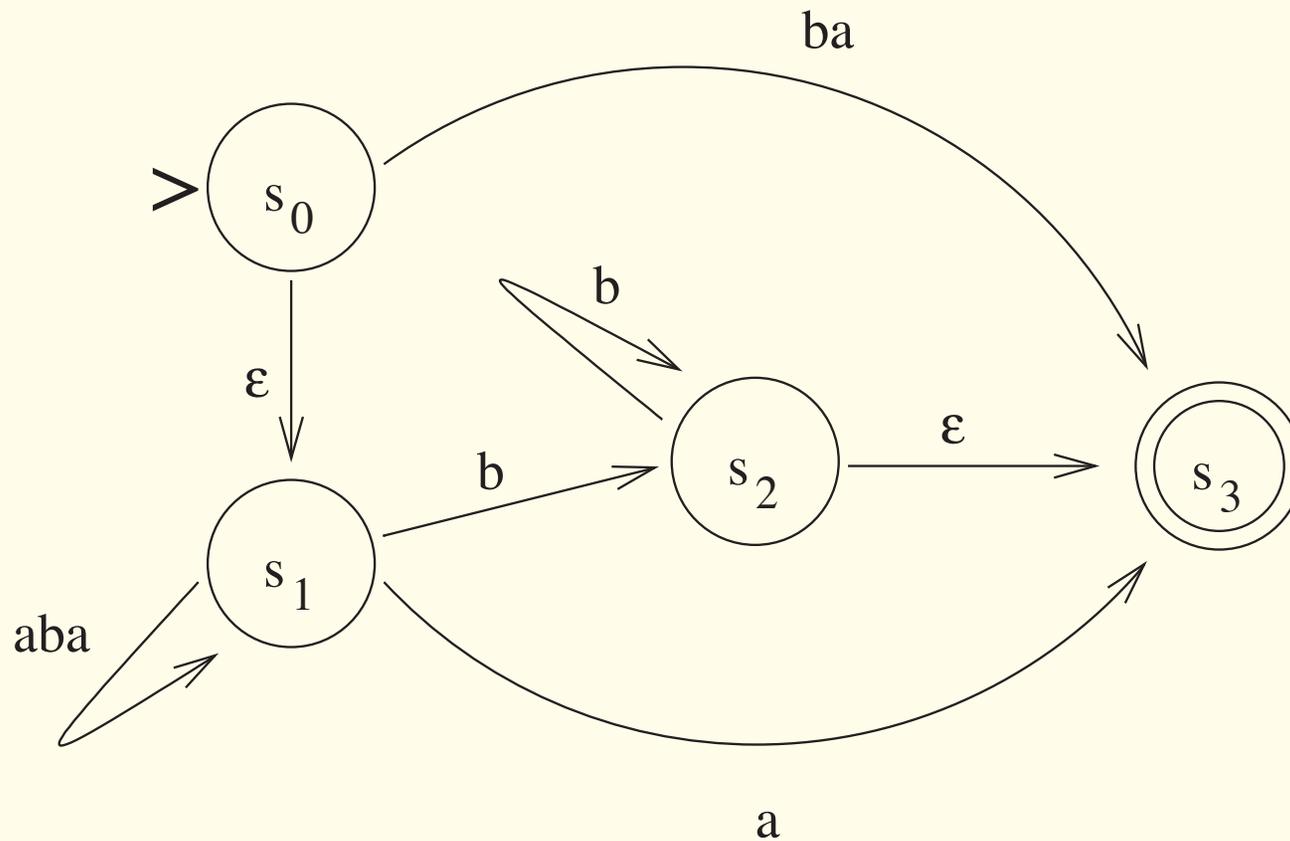
$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

akzeptierte Sprache ist

$$L(\mathcal{A}) := \{ w \in \Sigma^* \mid \exists s_0 \in I \exists q \in F \Delta^*((s_0, w) q) \}$$

Automaten mit ε -Kanten: Beispiel

Beispiel



Akzeptiert: $\{aba\}^* \{b\} \{b\}^* + \{aba\}^* \{a\} + \{ba\}$