Grundlagen der Theoretischen Informatik

Sommersemester 2017

27.04.2017

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

1. Terminologie
2. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
3. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
4. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
5. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
6. Komplexitätsklassen P und NP

Bis jetzt

- **Alphabete, Wörter**
  - Operationen auf Wörtern

    Konkatenation, i-te Potenz, Reverse
- **Sprache**
  - Operationen auf Sprachen

    Konkatenation, i-te Potenz, Reverse, Kleene-Hülle
- **Reguläre Ausdrücke**
- **Grammatiken**
  - Ableitung
  - Die von einer Grammatik erzeugte Sprache.
- **Darstellung von Problemen**

Warum Sprachen?

Darstellung von Problemen

Fakt: So ziemlich alle Probleme können als Probleme über Sprachen formuliert werden.

Beispiel: Primzahlen

Alphabet $\Sigma_{\text{num}} := \{|\}$

Sprache $L_{\text{primes}} := \{\underbrace{||\ldots|}_{p \text{ mal}} \mid p \text{ prim}\}$

Darstellung von Problemen

Eingabealphabet

$$\Sigma = \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

erlaubt Darstellung einer Ganzzahl zur Basis n

Beispiel:

5 binär: 101

5 unär: ||||| (oder auch 11111)

Darstellung von Problemen

Speicheraufwand

n-äre Darstellung ($n > 1$) einer Zahl k führt zu einer Speicherersparnis:

$$\log_n k \quad (n\text{-är}) \qquad \text{statt} \qquad k \quad (\text{unär})$$

Nur der Schritt von unär auf binär ist wesentlich, denn

$$\log_n k \;=\; \frac{1}{\log_2 n} \cdot \log_2 k = c \cdot \log_2 k$$

(von binär auf n-är nur lineare Einsparung)

Darstellung des Erfüllbarkeitsproblems SAT

Problem SAT

Gegeben: Eine aussagenlogische Formel w

Frage: Gibt es eine Belegung der booleschen Variablen in w, so dass w zu *true* auswertet?

Darstellung des Erfüllbarkeitsproblems SAT

Problem SAT

Gegeben: Eine aussagenlogische Formel w

Frage: Gibt es eine Belegung der booleschen Variablen in w, so dass w zu *true* auswertet?

Signatur für aussagenlogische Formeln

Signatur: $\Sigma_{\text{sat}} := \{\wedge, \vee, \neg, (,), x, 0, 1\}$

Dabei Darstellung von boolscher Variablen x_i als x gefolgt von i binär kodiert.
Dadurch Formel der Länge n um (unerheblichen) Faktor $\log n$ länger.

Darstellung des Erfüllbarkeitsproblems SAT

Satisfiability

Sprache

$$L_{\text{sat}} := \{w \in \Sigma^*_{sat} : \quad w \text{ ist eine aussagenlogische Formel,}$$
$$\text{und es gibt eine Belegung für die } x_i,$$
$$\text{so dass die Formel } w \text{ zu } \textit{true} \text{ auswertet } \}$$

Darstellung des Erreichbarkeitsproblems in Graphen

Erreichbarkeitsproblem

Gegeben: Ein Graph mit Ecken v_1 bis v_n

Frage: Gibt es einen Weg von Ecke v_1 zu Ecke v_n?

Signatur für Graphen

Signatur: $\Sigma_{\text{graph}} := \{v, e, 0, 1, (,), \#\}$

Darstellung von

Ecke v_i als v gefolgt i binär kodiert

Kante $e_{i,j}$ als $e(string_1 \# string_2)$, wobei

- $string_1$ die binäre Darstellung von i,
- $string_2$ die binäre Darstellung von j

Darstellung des Erreichbarkeitsproblems in Graphen

Erreichbarkeitsproblem

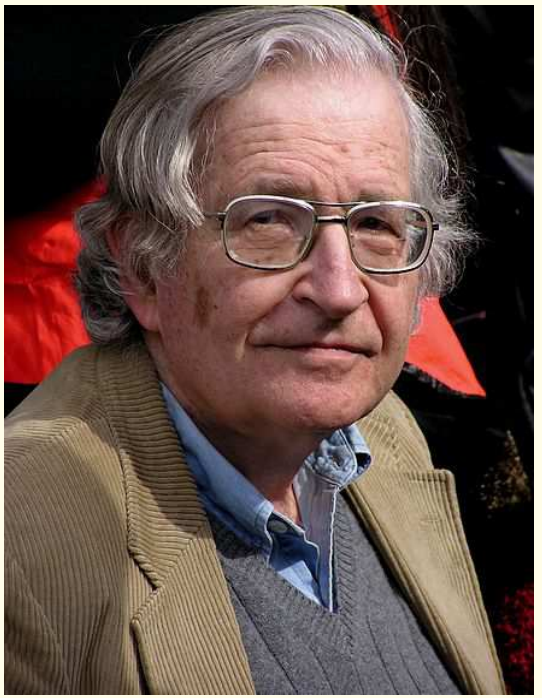
Sprache

$$L_{\text{reach}} := \{w \in \Sigma^*_{\text{graph}} : \quad \text{es gibt einen Weg in } w \text{ von der ersten Ecke } v_1 \text{ zur letzten Ecke } v_n\}$$

Die Chomsky-Hierarchie

Die Chomsky-Hierarchie

Noam Chomsky (geboren 1928)



- Professor für Linguistik und Philosophie am MIT
- Bedeutender Linguist
- Bedeutender Beitrag zur Informatik:
  Erste Beschreibung der Chomsky-Hierarchie (1956)
- Bedeutender linker Intellektueller und Globalisierungskritiker

Die Chomsky-Hierarchie

Was muss eine Grammatik erfüllen?

- Sie darf nur **endlich viele Regeln** haben
- Jede Regelprämisse muss **mindestens eine Variable** enthalten

Die Chomsky-Hierarchie

Was muss eine Grammatik erfüllen?

- Sie darf nur **endlich viele Regeln** haben
- Jede Regelprämisse muss **mindestens eine Variable** enthalten

Das Wort kann im Lauf der Ableitung beliebig wachsen und wieder schrumpfen.

(Weitere) Beschränkung der Form, die Regeln haben dürfen, führt zu
– **Grammatiktypen** und damit auch zu
– **Sprachtypen**
von verschiedenen Schwierigkeitsgraden.

Die Chomsky-Hierarchie

Definition (Rechtslineare Grammatik)
Eine Grammatik $G = (V, T, R, S)$ heißt **rechtslinear** gdw

$$\forall (P \to Q) \in R \ \left(P \in V \text{ und } Q \in T^* \cup T^+ V\right)$$

Die Chomsky-Hierarchie

Definition (Rechtslineare Grammatik)
Eine Grammatik $G = (V, T, R, S)$ heißt **rechtslinear** gdw

$$\forall (P \to Q) \in R \ \left(P \in V \text{ und } Q \in T^* \cup T^+ V\right)$$

Das heißt, bei jeder Regelanwendung:

- Links eine **einzelne Variable**
- Rechts **höchstens eine Variable**
- Wenn rechts eine Variable steht, steht sie **ganz rechts im Wort**.

Die Chomsky-Hierarchie

Definition (Kontextfreie Grammatik)
Eine Grammatik $G = (V, T, R, S)$ heißt **kontextfrei** gdw

$$\forall (P \to Q) \in R \ \left(P \in V \text{ und } Q \in (V \cup T)^*\right)$$

Die Chomsky-Hierarchie

Definition (Kontextfreie Grammatik)
Eine Grammatik $G = (V, T, R, S)$ heißt **kontextfrei** gdw

$$\forall (P \to Q) \in R \ \left(P \in V \text{ und } Q \in (V \cup T)^*\right)$$

Das heißt, bei jeder Regelanwendung:

- Links eine **einzelne Variable**
- Die Prämisse macht keine Aussage, was der Kontext dieser Variablen ist („kontextfrei“)
- Rechts steht etwas beliebiges

Die Chomsky-Hierarchie

Definition (Kontextsensitive Grammatik)
Eine Grammatik $G = (V, T, R, S)$ heißt **kontextsensitiv** gdw

$\forall (P \to Q) \in R$:

1. $\exists u, v, \alpha \in (V \cup T)^* \; \exists A \in V \; \big(P = uAv \text{ und } Q = u\alpha v \text{ mit } |\alpha| \geq 1\big)$,
   oder die Regel hat die Form $S \to \varepsilon$
2. S nicht in Q

Die Chomsky-Hierarchie

Definition (Kontextsensitive Grammatik)
Eine Grammatik $G = (V, T, R, S)$ heißt **kontextsensitiv** gdw

$\forall (P \to Q) \in R$:

1. $\exists u, v, \alpha \in (V \cup T)^* \; \exists A \in V \; \big(P = uAv$ und $Q = u\alpha v$ mit $|\alpha| \geq 1\big)$, **oder** die Regel hat die Form $S \to \varepsilon$
2. S nicht in Q

Das heißt, bei jeder Regelanwendung:

- Eine Variable A wird in einen String α mit $|\alpha| \geq 1$ überführt
- Die Ersetzung von A durch α findet nur statt, wenn der in der Regel geforderte **Kontext (u und v) vorhanden ist**
- **Das Wort wird nicht kürzer, außer bei $\varepsilon \in L$**

Beschränkte Grammatik

Definition (Beschränkte Grammatik)
Eine Grammatik $G = (V, T, R, S)$ heißt **beschränkt** gdw

$\forall (P \to Q) \in R$:

1. $|P| \leq |Q|$, **oder**
   die Regel hat die Form $S \to \varepsilon$

2. S nicht in Q

Beschränkte Grammatik

Definition (Beschränkte Grammatik)
Eine Grammatik $G = (V, T, R, S)$ heißt **beschränkt** gdw

$\forall (P \to Q) \in R$:

1. $|P| \leq |Q|$, **oder**
   die Regel hat die Form $S \to \varepsilon$

2. S nicht in Q

Das heißt, bei jeder Regelanwendung:

- Die Conclusio ist mindestens so lang wie die Prämisse, außer bei $\varepsilon \in L$.
- Das Wort wird nicht kürzer, außer bei $\varepsilon \in L$

Beispiele

Regel	rechtslinear	kontextfrei	kontextsensitiv	beschränkt
$S \to bA$	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt
$S \to aSa$	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt
$BC \to A$	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt
$Ca \to CbC$	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt
$B \to AB$	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt

Beispiele

Regel	rechtslinear	kontextfrei	kontextsensitiv	beschränkt
$S \to bA$	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt
$S \to aSa$	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt
$BC \to A$	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt
$Ca \to CbC$	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt
$B \to AB$	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt

Beispiele

Regel	rechtslinear	kontextfrei	kontextsensitiv	beschränkt
$S \to bA$	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt
$S \to aSa$	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt
$BC \to A$	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt
$Ca \to CbC$	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt
$B \to AB$	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt

Beispiele

Regel	rechtslinear	kontextfrei	kontextsensitiv	beschränkt
$S \to bA$	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt
$S \to aSa$	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt
$BC \to A$	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt
$Ca \to CbC$	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt
$B \to AB$	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt

Beispiele

Regel	rechtslinear	kontextfrei	kontextsensitiv	beschränkt
$S \to bA$	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt
$S \to aSa$	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt
$BC \to A$	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt
$Ca \to CbC$	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt
$B \to AB$	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☐ nicht erlaubt

Beispiele

Regel	rechtslinear	kontextfrei	kontextsensitiv	beschränkt
$S \to bA$	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt
$S \to aSa$	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt
$BC \to A$	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt
$Ca \to CbC$	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt
$B \to AB$	☐ erlaubt ☒ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt	☒ erlaubt ☐ nicht erlaubt

Die Chomsky-Hierarchie

Aufbauend auf den Grammatikarten kann man Sprachklassen definieren.

Definition (Sprachklassen)

Klasse	**definiert als**	**Sprache heißt**
$\mathbf{L_3}$, REG	$\{L(G) \mid G$ ist rechtslinear$\}$	Typ 3, **regulär**
$\mathbf{L_2}$, CFL	$\{L(G) \mid G$ ist kontextfrei$\}$	Typ 2, **kontextfrei**
$\mathbf{L_1}$, CSL	$\{L(G) \mid G$ ist kontextsensitiv$\}$	Typ 1, **kontextsensitiv**
$\mathbf{L_1}$, CSL	$\{L(G) \mid G$ ist beschränkt$\}$	Typ 1, **beschränkt**
$\mathbf{L_0}$, r.e.	$\{L(G) \mid G$ beliebig$\}$	Typ 0, **aufzählbar**
$\mathbf{L}$	$\{L \mid \ L \subseteq \Sigma^* \ \}$	**beliebige** Sprache

Die Chomsky-Hierarchie

Grammatiken können kompliziert sein!

Beispiel (Grammatik für $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$):
Grammatik $G_{abc} = (\{S, X_1, X_2\}, \{a, b, c\}, \{R_1, \ldots R_5\}, S)$ mit

$$
\begin{array}{lllll}
R_1 = & S & \rightarrow & abc \mid aX_1bc \\
R_2 = & X_1b & \rightarrow & bX_1 \\
R_3 = & X_1c & \rightarrow & X_2bcc \\
R_4 = & bX_2 & \rightarrow & X_2b \\
R_5 = & aX_2 & \rightarrow & aa \mid aaX_1
\end{array}
$$

- Ist diese Grammatik **kontextsensitiv?**
- **Ist sie beschränkt?**

Probleme über Sprachen

Probleme über Sprachen

Interessante Probleme (informell)

- Ist ein gegebenes Wort in einer Sprache (definiert durch eine Grammatik) enthalten?
- Erzeugen zwei gegebene Grammatiken dieselbe Sprache?

Mit welchen Algorithmen können diese Probleme gelöst werden?

Probleme und Algorithmen im Allgemeinen

Definition (Problem, Algorithmus)
Ein **Problem** P ist die Frage, ob eine bestimmte Eigenschaft auf gegebene Objekte zutrifft.

Dabei ist eine bekannte, abzählbare Grundmenge solcher Objekte gegeben.

Für jedes Objekt o gilt: die Eigenschaft trifft auf o zu oder nicht.

Ein **Algorithmus** für ein Problem P ist eine Vorschrift (ein Programm), die zu beliebigem Objekt o berechnet, ob die Eigenschaft für o zutrifft oder nicht.

Probleme und Algorithmen im Allgemeinen

Beispiel (Einige Probleme)

- Für $n \in \mathbb{N}$:
  Ist n eine Primzahl?
- Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ und
  ein Element G aus der Menge aller Grammatiken über Σ:
  Gilt $w \in L(G)$?
- Für ein Element G aus der Menge aller Grammatiken:
  Ist $L(G)$ leer (endlich, unendlich)?
- Für $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$:
  Hat $a^n + b^n = c^n$ eine Lösung in den natürlichen Zahlen?
- Für ein Programm p aus der Menge aller Java-Programme:
  Terminiert p?

Endlich, unendlich und dann?

Abzählbarkeit

Definition (Abzählbarkeit)
Eine Menge M heißt **abzählbar**, wenn

- es eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \to M$ gibt,
- oder M leer ist.

Intuition

Eine Menge ist abzählbar, wenn sie höchstens so mächtig wie $\mathbb{N}$ ist.

Abzählbarkeit

Lemma. Eine Menge M ist abzählbar genau dann, wenn es eine injektive Funktion

$$f : M \to \mathbb{N}$$

gibt.

Abzählbarkeit

Beispiel:

Abzählbar sind:

- $\mathbb{N}$
- $\mathbb{Q}$
- alle endlichen Mengen
- die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen
- die Vereiningung abzählbar vieler abzählbarer Mengen

David Hilbert

David Hilbert (1862-1943)

- Einer der bedeutendsten und einflussreichsten Mathematiker aller Zeiten
- Professor in Königsberg und Göttingen
- Wichtige Beiträge zu
  - Logik
  - Funktionalanalysis
  - Zahlentheorie
  - Mathematische Grundlagen der Physik
  - uvm.

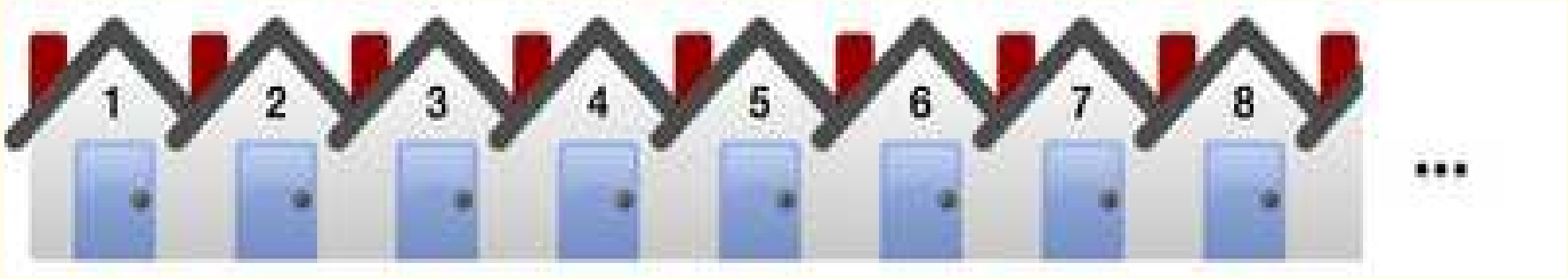
Hilbert's Hotel

In einem Hotel mit endlich vielen Zimmern können keine Gäste mehr aufgenommen werden, sobald alle Zimmer belegt sind (Schubfachprinzip).

Hilbert's Hotel

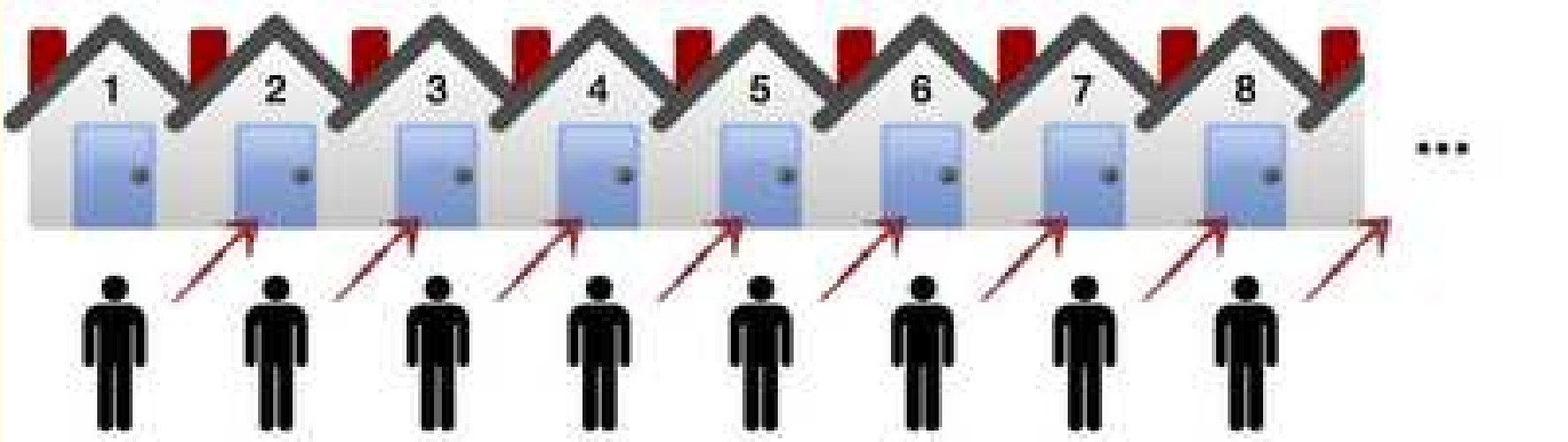
In einem Hotel mit endlich vielen Zimmern können keine Gäste mehr aufgenommen werden, sobald alle Zimmer belegt sind (Schubfachprinzip).

Hilberts Hotel hat nun unendlich viele Zimmer (durchnummeriert mit natürlichen Zahlen bei 1 beginnend).



Man könnte annehmen, dass dasselbe Problem auch hier auftreten würde, wenn alle Zimmer durch (unendlich viele) Gäste belegt sind.

Hilbert's Hotel

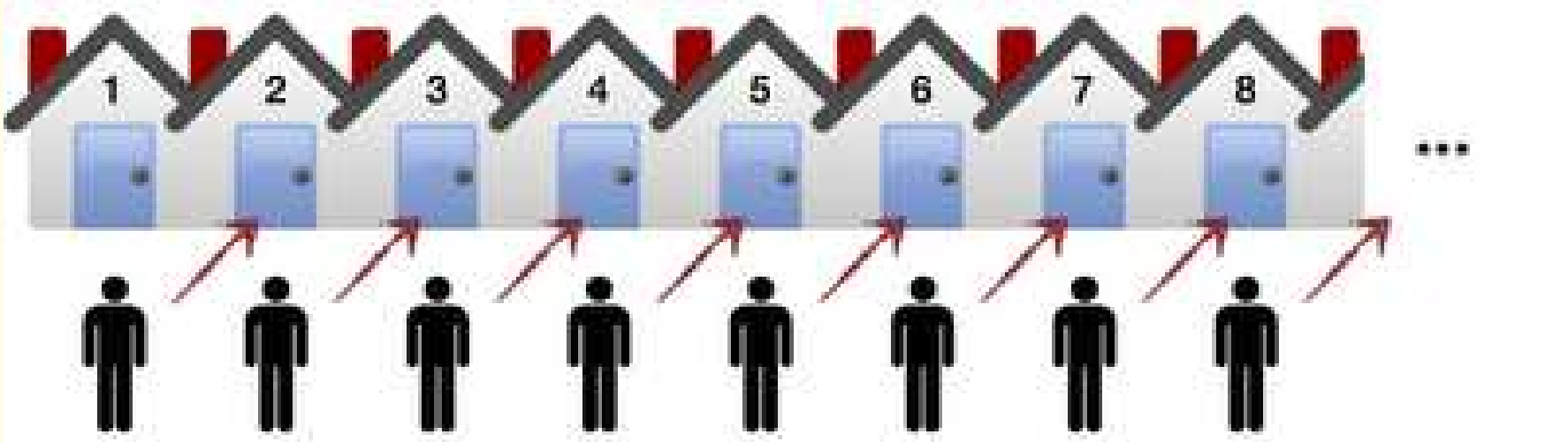


Es gibt einen Weg, Platz für einen weiteren Gast zu machen, obwohl alle Zimmer belegt sind:

- Der Gast von Zimmer 1 geht in Zimmer 2,
- der Gast von Zimmer 2 geht in Zimmer 3,
- der von Zimmer 3 nach Zimmer 4 usw.

Damit wird Zimmer 1 frei für den neuen Gast.

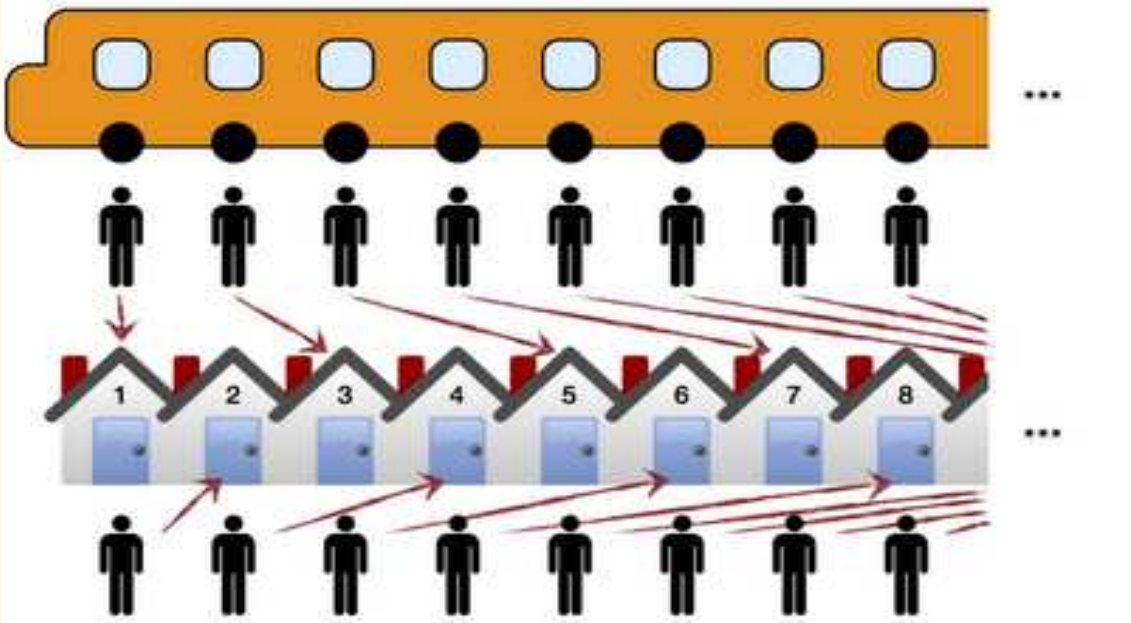
Hilbert's Hotel



Da die Anzahl der Zimmer unendlich ist, gibt es keinen "letzten" Gast, der nicht in ein weiteres Zimmer umziehen könnte. Wiederholt man das, erhält man Platz für eine beliebige, aber endliche Zahl neuer Gäste.

Hilbert's Hotel

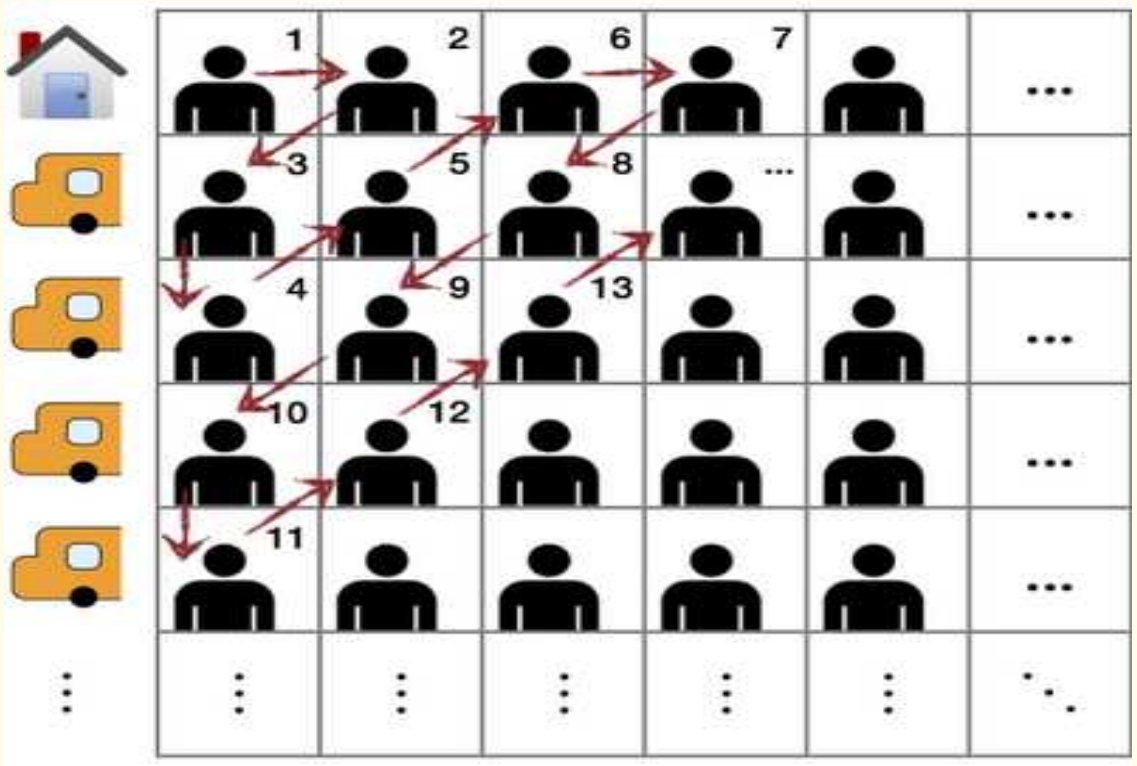
Es ist sogar möglich, Platz für abzählbar unendlich viele neue Gäste zu machen.



Der Gast von Zimmer 1 geht in Zimmer 2, der Gast von Zimmer 2 aber in Zimmer 4, der von Zimmer 3 in Zimmer 6 usw. Damit werden alle Zimmer mit ungerader Nummer frei für die abzählbar unendlich vielen Neuankömmlinge.

Hilbert's Hotel

Wenn abzählbar unendlich viele Busse mit je abzählbar unendlich vielen Gästen vorfahren, können auch diese Gäste alle im bereits vollen Hotel untergebracht werden.



Hilbert's Hotel

Andere Möglichkeit:

- die Zimmer mit ungeraden Nummern wie eben beschrieben wird frei gemacht
- die Gäste aus Bus 1 in die Zimmer 3, 9, 27, ... schickt (also in jene Zimmer, die mit Potenzen von 3 nummeriert sind; $3 = 3^1, 9 = 3^2, 27 = 3^3, \ldots$),
- die Gäste aus Bus 2 in die Zimmer 5, 25, 125, 625, etc., usw.,

also die Gäste aus Bus i in die Zimmer p_i, p_i^2, p_i^3 etc.,
wobei p_i die $i+1$-te Primzahl ist.

Dadurch sind alle angekommenen Gäste im Hotel untergebracht und sogar noch unendlich viele Zimmer (wie zum Beispiel das Zimmer 15, dessen Nummer keine Potenz einer Primzahl ist) frei.

Hilbert's Hotel

Weitere Möglichkeit:

Eine andere, effizientere Möglichkeit wäre die, die Hotelgäste jeweils aus den Zimmern n in die Zimmer $2n - 1$ umziehen zu lassen, sodass alle geraden Zimmer frei werden.

Dann können die neuen Gäste aus dem Bus mit der Nummer n die Zimmer belegen, deren Zimmernummern durch 2^n, nicht aber durch 2^{n+1} teilbar sind, sodass kein Zimmer frei bliebe.

Korollar

$\mathbb{N}$ ist abzählbar

Alle endlichen Mengen sind abzählbar

Korollar

- die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen ist abzählbar

  Falls Σ_1, Σ_2 abzählbar, so ist $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ abzählbar

- die Vereiningung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar

  Falls $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ abzählbar, so ist $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$ abzählbar

  Falls Σ abzählbar, so ist Σ^i abzählbar für alle $i \in \mathbb{N}$.

Diagonalisierungsargument für Überabzählbarkeit

Theorem. Die Menge $\mathbb{R}$ der rellen Zahlen ist überabzählbar.

Beweis. Wir zeigen, dass schon das Intervall $[0, 1]$ überabzählbar ist.

Annahme: Es gibt eine Aufzählung, also eine surjektive Funktion

$$f : \mathbb{N} \to [0, 1]$$

Dann sei

$$f(i) = 0, d_0^i d_1^i d_2^i \ldots$$

die Dezimaldarstellung der i-ten reellen Zahl.

Diagonalisierungsargument für Überabzählbarkeit

Beweis. Fortsetzung:

Wir definieren eine neue Zahl $d = 0, \overline{d}_0 \overline{d}_1 \overline{d}_2 \ldots$ durch

$$\overline{d}_n = \begin{cases} d_n^n + 1 & \text{falls } d_n^n < 9 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

d unterscheidet sich in der n-ten Stelle von d_n.

Also $d \neq d_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Also kommt d in der Aufzählung nicht vor. Widerspruch!