Grundlagen der Theoretischen Informatik

Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen (VII)

13.07.2017

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Übersicht

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- Entscheidbar/Aufzählbar
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- Unentscheidbarkeit

Gödelisierung von DTMs

Definition (Gödelnummern von DTMs)
DTMs werden als Gödelzahlen kodiert:

- DTMs können als Gödelwörter dargestellt werden.
- Die Buchstaben der Gödelwörter können in Ziffern kodiert werden, um Gödelnummern zu bekommen.
- Notation: $\hat{g}(\mathcal{M})$ für die Gödelnummer der DTM $\mathcal{M}$.

Definition Jede natürliche Zahl n soll Gödelnummer einer DTM $\mathcal{M}_n$ sein.

Wir definieren

$$\mathcal{M}_n := \begin{cases} \mathcal{M}, & \text{falls } \hat{g}(\mathcal{M}) = n \\ \mathcal{M}_{halt} & \text{falls } \nexists \mathcal{M} \;\; \hat{g}(\mathcal{M}) = n \end{cases}$$

$\mathcal{M}_{halt}$ ist eine TM, die sofort anhält und weiter nichts tut.

Halteproblem

Definition [Allgemeines Halteproblem]

Das **allgemeine Halteproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n bei Eingabe i hält.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{H}_{allg} := \{\langle n, i\rangle \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } i\}.$$

Halteproblem

Definition [Spezielles Halteproblem]

Das **spezielle Halteproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n bei Eingabe n hält.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{H} := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } n\}.$$

Halteproblem

Definition [Null-Halteproblem]
Das **Null-Halteproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n bei leerer Eingabe hält.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{H}_0 := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei leerer Eingabe}\}$$

Manchmal auch:
“bei Eingabe 0” anstatt “bei leerer Eingabe”.

Leerheitsproblem

Definition [Leerheitsproblem]
Das **Leerheitsproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n bei keiner Eingabe aus Σ^* hält.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{E} := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei keiner Eingabe aus } \Sigma^*\}.$$

Totalitätsproblem

Definition [Totalitätsproblem]

Das **Totalitätsproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n bei jeder Eingabe aus Σ^* hält.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{T} := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei jeder Eingabe aus } \Sigma^*\}.$$

Gleichheitsproblem

Definition [Gleichheitsproblem]

Das **Gleichheitsproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n die gleiche Sprache über Σ akzeptiert wie die DTM mit Gödelnummer m.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{E}q := \{\langle n, m\rangle \mid \quad \mathcal{M}_n \text{ akzeptiert die gleiche Sprache über } \Sigma \text{ wie } \mathcal{M}_m \}.$$

Entscheidbarkeitsproblem

Definition [Entscheidbarkeitsproblem]

Das **Entscheidbarkeitsproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n eine entscheidbare Sprache über Σ akzeptiert.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{E}nt := \{n \mid \quad \mathcal{M}_n \text{ akzeptiert eine entscheidbare Sprache über } \Sigma\}.$$

Das spezielle Halteproblems

Theorem (Halteproblem ist unentscheidbar)
Das spezielle Halteproblem $\mathcal{H} := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } n\}$ ist unentscheidbar.

Beweis: Letzte Vorlesung.

Theorem (Akzeptierbarkeit von $\mathcal{H}$)
Das spezielle Halteproblem $\mathcal{H}$ ist aufzählbar. D. h. die Sprache

$$\mathcal{H} = \{n \mid \ \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } n \ \}$$

ist akzeptierbar.

Beweis: Letzte Vorlesung.

Das spezielle Halteproblems

Theorem (Halteproblem ist unentscheidbar)
Das spezielle Halteproblem $\mathcal{H} := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } n\}$ ist unentscheidbar.

Beweis: Letzte Vorlesung.

Theorem (Akzeptierbarkeit von $\mathcal{H}$)
Das spezielle Halteproblem $\mathcal{H}$ ist aufzählbar. D. h. die Sprache

$$\mathcal{H} = \{n \mid \ \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } n \ \}$$

ist akzeptierbar.

Beweis: Letzte Vorlesung.

Korollar Das Komplement von $\mathcal{H}$ ist nicht aufzählbar.

Reduktion von Problemen

Wie zeigt man, dass ein Problem unentscheidbar ist?

Reduktion (informell)

Wir geben eine **totale, berechenbare Funktion** f an, die

- eine Instanz p_1 von P_1
- in eine Instanz p_2 von P_2 umwandelt,
- und zwar so, dass die Antwort zu p_1 „ja“ ist gdw die Antwort zu p_2 „ja“ ist.

Wenn P_1 unentscheidbar ist, dann ist auch P_2 unentscheidbar.

Reduktion von Problemen

Definition

Seien L_1, L_2 Sprachen über $\mathbb{N}$.

L_1 wird auf L_2 reduziert,

$$L_1 \preceq L_2$$

<u>gdw</u>

es gibt eine TM-berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \in L_1 \ \underline{\text{gdw}}\ f(n) \in L_2\big).$$

Reduktion von Problemen

Lemma

Ist $L_1 \preceq L_2$, und ist L_1 **unentscheidbar**, so ist auch L_2 **unentscheidbar**.

Reduktion von Problemen

Lemma

Ist $L_1 \preceq L_2$, und ist L_1 **unentscheidbar**, so ist auch L_2 **unentscheidbar**.

Beweis

- Angenommen, L_2 ist entscheidbar.
- Sei $\mathcal{M}_2$ eine Turing-Maschine, die L_2 entscheidet.
- Wegen $L_1 \preceq L_2$ gibt es eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \in TM$ mit $n \in L_1$ gdw $f(n) \in L_2$.
- Sei $\mathcal{M}_f$ eine DTM, die f berechnet.
- Dann kann man daraus die Maschine $\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_f \mathcal{M}_2$ konstruieren, für die gilt:
  - $\mathcal{M}_1$, gestartet mit Input n, hält mit $h, \#Y\underline{\#}$, falls $f(n) \in L_2$, d.h. wenn $n \in L_1$ ist.
  - $\mathcal{M}_1$, gestartet mit Input n, hält mit $h, \#N\underline{\#}$, falls $f(n) \notin L_2$, d.h. wenn $n \notin L_1$ ist.
- Die Maschine $\mathcal{M}_1$ entscheidet also L_1, ein Widerspruch.

Unentscheidbarkeit

Theorem [Unentscheidbarkeit von $\mathcal{H}_0$].
Das Null-Halteproblem

$$\mathcal{H}_0 = \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } 0\}$$

ist unentscheidbar.

Unentscheidbarkeit

Beweis: Gegeben eine TM $\mathcal{M}_n$.

Kombiniere diese mit einer DTM, die n aufs Band schreibt.

$f(n)$ sei definiert als die Gödelnummer dieser neuen Maschine.

$\mathcal{M}_{f(n)}$ hält auf Eingabe von 0
<u>gdw</u>
$\mathcal{M}_n$ hält auf Eingabe von n

Damit:
Reduktion des speziellen Halteproblems auf das Null-Halteproblem.
(f ist total und berechenbar!)

Also:
Unentscheidbarkeit des Null-Halteproblems folgt aus
Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Unentscheidbarkeit

Theorem [Unentscheidbarkeit von $\mathcal{K}_0$].
Das allgemeine Halteproblem

$$\mathcal{H}_{\text{allg}} = \{\langle n, i\rangle \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } i\}$$

ist unentscheidbar.

Unentscheidbarkeit

Theorem [Unentscheidbarkeit von $\mathcal{K}_0$].
Das allgemeine Halteproblem

$$\mathcal{H}_{\text{allg}} = \{\langle n, i\rangle \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } i\}$$

ist unentscheidbar.

Beweis 1:

Wir zeigen, dass $\mathcal{H}_0 \preceq \mathcal{H}_{\text{allg}}$:

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = \langle n, 0\rangle$ (TM berechenbar).

Dann $n \in \mathcal{H}_0$ gdw. $\mathcal{M}_n$ hält bei Eingabe 0 gdw. $f(n) \in \mathcal{H}_{\text{allg}}$.

Unentscheidbarkeit

Theorem [Unentscheidbarkeit von $\mathcal{K}_0$].
Das allgemeine Halteproblem

$$\mathcal{H}_{\mathsf{allg}} = \{\langle n, i \rangle \mid \ \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } i\}$$

ist unentscheidbar.

Beweis 2:

Wir zeigen, dass $\mathcal{H} \preceq \mathcal{H}_{\mathsf{allg}}$:

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(n) = \langle n, n \rangle$ (TM berechenbar).

Dann $n \in \mathcal{H}$ gdw. $\mathcal{M}_n$ hält bei Eingabe n gdw. $g(n) \in \mathcal{H}_{\mathsf{allg}}$.

Unentscheidbarkeit

Ähnlich kann man per Reduktion die Unentscheidbarkeit der folgenden Probleme zeigen:

- $\mathcal{E}$, das Leerheitsproblem.

  $$\mathcal{E} := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei keiner Eingabe aus } \Sigma^*\}$$

- $\mathcal{T}$, das Totalitätsproblem.

  $$\mathcal{T} := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei jeder Eingabe aus } \Sigma^*\}.$$

- $\mathcal{E}q$, das Gleichheitsproblem.

  $$\mathcal{E}q := \{\langle n, m\rangle \mid \mathcal{M}_n \text{ akzeptiert die gleiche Sprache über } \Sigma \text{ wie } \mathcal{M}_m\ \}.$$

- $\mathcal{E}nt$, das Entscheidbarkeitsproblem.

  $$\mathcal{E}nt := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ akzeptiert eine entscheidbare Sprache über } \Sigma\}.$$

Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- Entscheidbar/Aufzählbar
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- Unentscheidbarkeit

Übersicht

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

Übersicht

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP