Grundlagen der Theoretischen Informatik

3. Endliche Automaten (II)

26.04.2018

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Übersicht

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

Letzte Vorlesung

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping-Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

Endlicher Automat: Definition

Definition. Ein **endlicher Automat (e.a.) (finite automaton)** ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F).$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von **Zuständen**,
- Σ ein **endliches Alphabet** (aus dessen Buchstaben die Eingabewörter bestehen können),
- $\delta : K \times \Sigma \to K$ die totale(!) **Übergangsfunktion**,
- $s_0 \in K$ der **Startzustand**, und
- $F \subseteq K$ die Menge der **finalen Zustände**.

Endlicher Automat: Übergangsfunktion

Bedeutung der Übergangsfunktion

$\delta(q, a) = q'$ bedeutet:

- Der Automat ist im Zustand q,
- liest ein a und
- geht in den Zustand q' über.

Wir erweitern δ zu δ^*

$\delta^* : K \times \Sigma^* \to K$ ist strukturell rekursiv über Σ^* definiert:

$$\begin{array}{rcl} \delta^*(q, \varepsilon) & := & q \\ \delta^*(q, wa) & := & \delta(\delta^*(q, w), a) \end{array}$$

Wenn klar ist, was gemeint ist, wird δ^* auch einfach als δ geschrieben.

Endlicher Automat: Akzeptierte Sprache

Definition (Von einem endlichen Automaten akzeptierte Sprache)
Die von einem Automaten $\mathcal{A}$ **akzeptierte** Sprache, ist definiert als

$$L(\mathcal{A}) \; := \; \{w \in \Sigma^* \;\mid\; \delta^*(s_0, w) \in F\}$$

Definition (Von endlichen Automaten akzeptierte Sprachen)
Die Menge

$$\textbf{RAT} \; := \; \{L \;\mid\; \text{es gibt einen endlichen Automaten } \mathcal{A} \text{ mit } L = L(\mathcal{A})\}$$

der von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen
heißt Menge der **rationalen** Sprachen

Jetzt

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)

Determiniert / indeterminiert

Determinierter endlicher Automat

- Für einen Zustand q und eine Eingabe a
  genau ein einziger Nachfolgezustand
- festgelegt durch Übergangsfunktion δ

Indeterminierter endlicher Automat

- Für einen Zustand q und eine Eingabe a
  evtl. **mehrere Nachfolgezustände** – oder **gar keiner**
- festgelegt durch Übergangsrelation Δ

Indeterminierter endlicher Automat

Definition (Indeterminierter endlicher Automat)
Ein **indeterminierter** endlicher Automat (NDEA) ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ein endliches Alphabet,
- $\Delta \subseteq (K \times \Sigma) \times K$ eine Übergangsrelation,
- $I \subseteq K$ eine **Menge von** Startzuständen,
- $F \subseteq K$ eine Menge von finalen Zuständen.

NDEA: Übergangsrelation

Definition (Erweiterung von Δ zu Δ^*)

$$\Delta^* \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$$

ist definiert durch:

$$\Delta^*(\ (q, \varepsilon),\ q'\ ) \quad \underline{\text{gdw}} \quad q' = q$$

$$\Delta^*(\ (q, wa),\ q'\ ) \quad \underline{\text{gdw}} \quad \exists q'' \in K\ \big(\Delta^*(\ (q, w),\ q''\ )\ \wedge\ \Delta(\ (q'', a),\ q'\ )\big)$$

NDEA: Akzeptierte Sprache

Wann akzeptiert ein indeterminierter Automat ein Wort?

Ein indeterminierter endlicher Automat $\mathcal{A}$ akzeptiert ein Wort w, wenn

- es **mindestens einen** Weg mit der Beschriftung w durch $\mathcal{A}$ gibt,
- der in einem finalen Zustand endet.

NDEA: Akzeptierte Sprache

Wann akzeptiert ein indeterminierter Automat ein Wort?

Ein indeterminierter endlicher Automat $\mathcal{A}$ akzeptiert ein Wort w, wenn

- es **mindestens einen** Weg mit der Beschriftung w durch $\mathcal{A}$ gibt,
- der in einem finalen Zustand endet.

Definition (Von einem NDEA akzeptierte Sprache)
Die von einem indeterminierten endlichen Automaten $\mathcal{A}$ **akzeptierte** Sprache ist

$$L(\mathcal{A}) \quad := \quad \{w \in \Sigma^* \mid \exists s_0 \in I \; \exists q \in F \; : \Delta^*(\,(s_0, w),\; q\,)\}$$

NDEA: Beispiel

Der Automat

$$\mathcal{A} = (\{S_0, S_1, S_2\}, \{a, b\}, \Delta, \{S_0\}, \{S_0\})$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta(S_0, a) &= \{S_1\} \\ \Delta(S_1, b) &= \{S_0, S_2\} \\ \Delta(S_2, a) &= \{S_0\} \end{aligned}$$

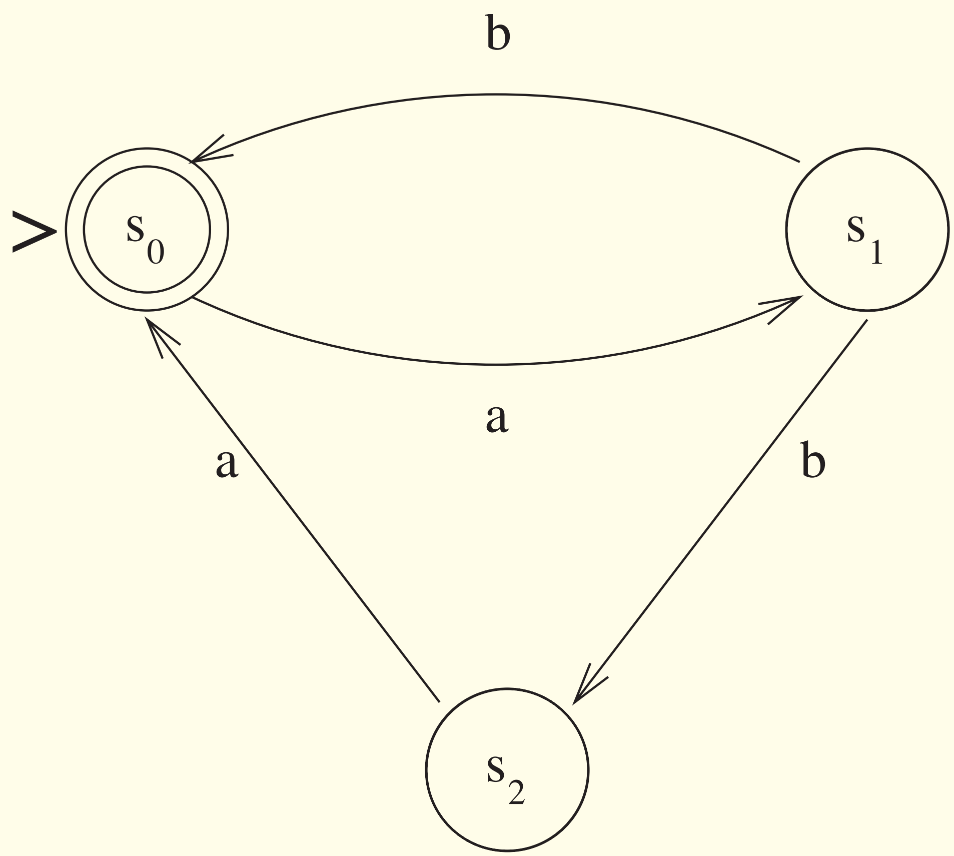
akzeptiert die Sprache

$$L = \{ab, aba\}^*$$

NDEA: Graphische Darstellung

Der indeterminierte Automat für Beispiel auf Seite 14

A':



Akzeptiert: $\{ab, aba\}^*$

Indeterminierter endlicher Automat

Vom indeterminierten Automaten zum Algorithmus?

Vom Automaten zum Algorithmus (für das Wortproblem):

- **DEA** $=$ **Algorithmus**
- **NDEA** $+$ **Suchstrategie** $=$ **Algorithmus**

Indeterminierter endlicher Automat

Vom indeterminierten Automaten zum Algorithmus?

Vom Automaten zum Algorithmus (für das Wortproblem):

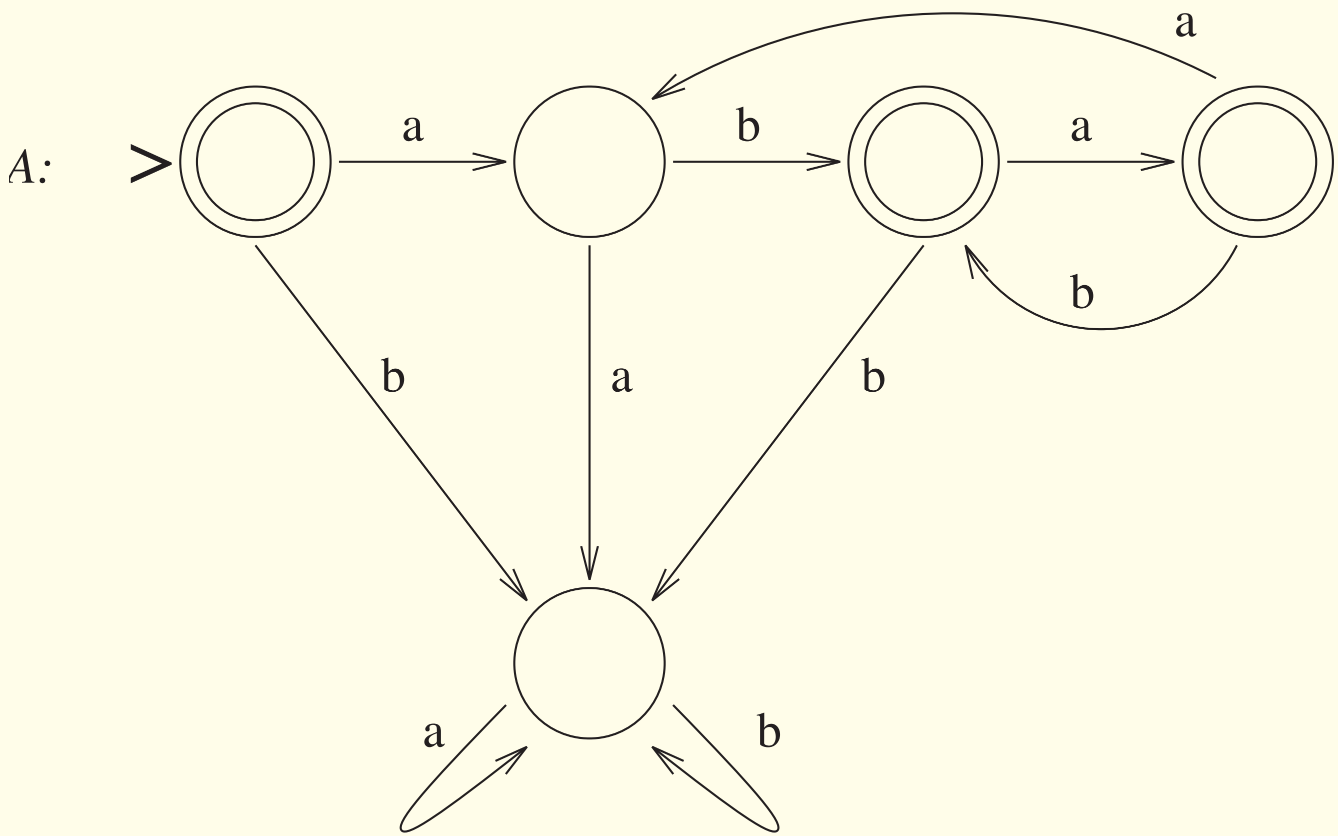
- **DEA** = **Algorithmus**
- **NDEA** + **Suchstrategie** = **Algorithmus**

Zwei Sichtweisen auf indeterminierte Automaten

- Der Automat durchläuft **alle** Wege (**parallel** oder mittels **Backtracking**)
- Der Automat **rät**, welcher von mehreren möglichen Folgezuständen der richtige ist

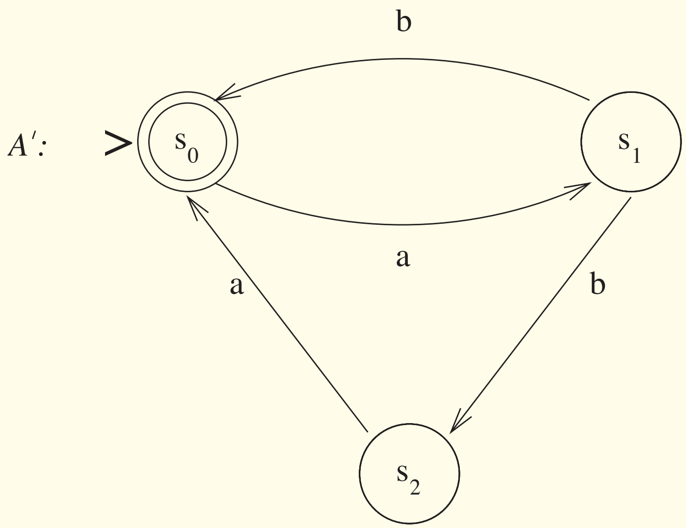
NDEA und DEA: Beispiel

DEA für gleiche Sprache wie NDEA auf Seite 15

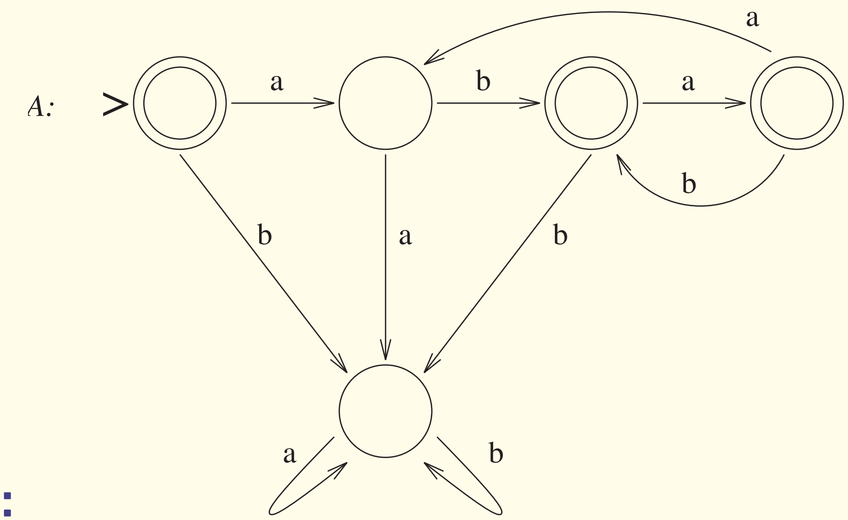


NDEA und DEA

Vergleich NDEA / DEA



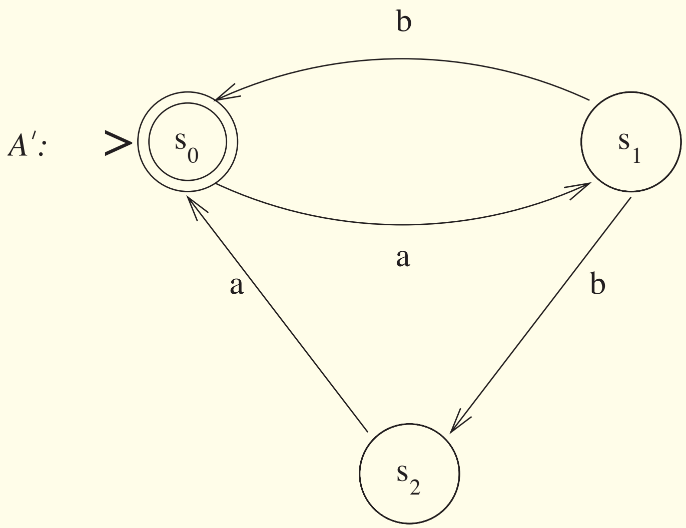
NDEA:



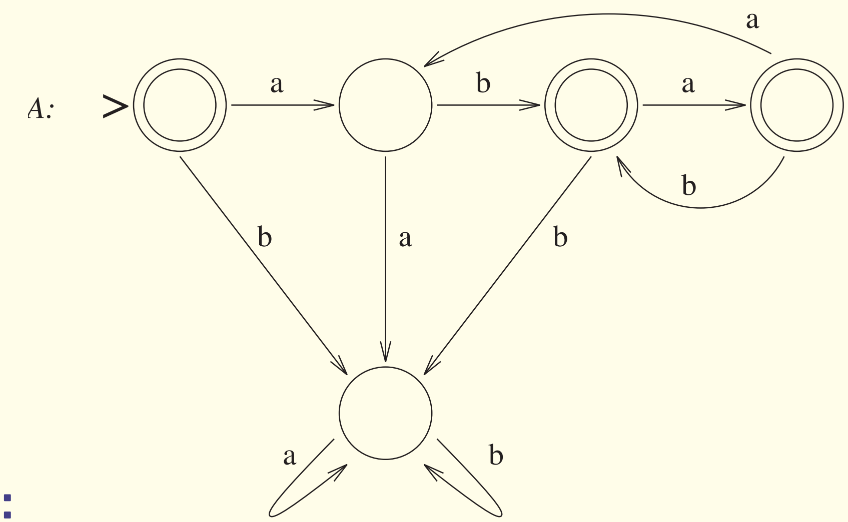
DEA:

NDEA und DEA

Vergleich NDEA / DEA



NDEA:



DEA:

- DEA hat mehr Zustände, komplizierter
- DEA muss nicht „raten“
- DEA braucht genauso viele Schritte

NDEA und DEA

Wir zeigen später:

Für jeden indeterminierten Automaten A_{NDEA}
gibt es einen determinierten Automaten A_{DEA} mit

$$L(A_{\mathrm{NDEA}}) = L(A_{\mathrm{DEA}})$$

NDEA und DEA: Weiteres Beispiel

Determinierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^*\{a\}\{a, b\}$$

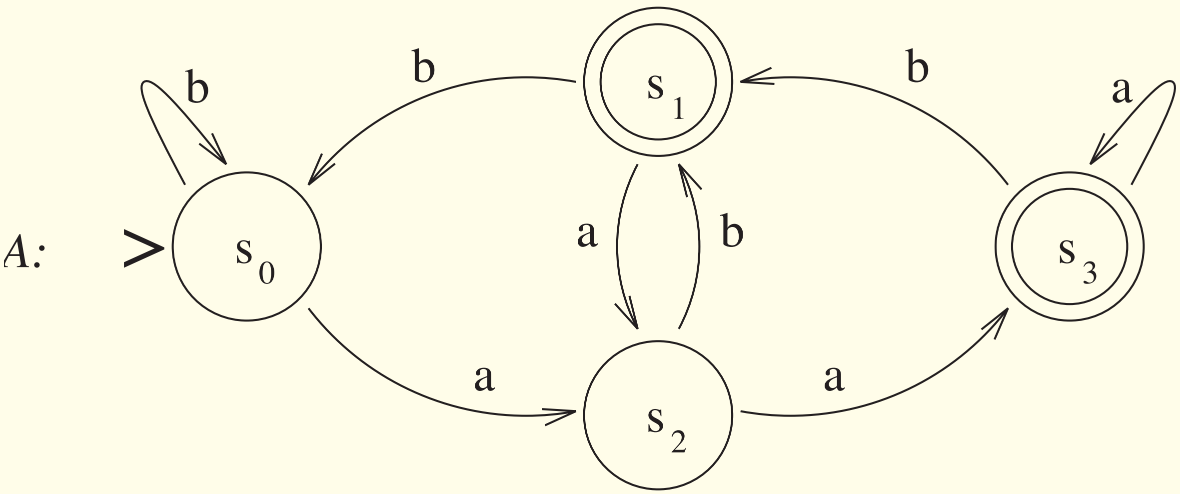
(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe a ist)

NDEA und DEA: Weiteres Beispiel

Determinierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^*\{a\}\{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe a ist)



Idee: Im Zustand jeweils die letzten zwei Buchstaben merken

NDEA und DEA: Weiteres Beispiel

Indeterminierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^*\{a\}\{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe a ist)

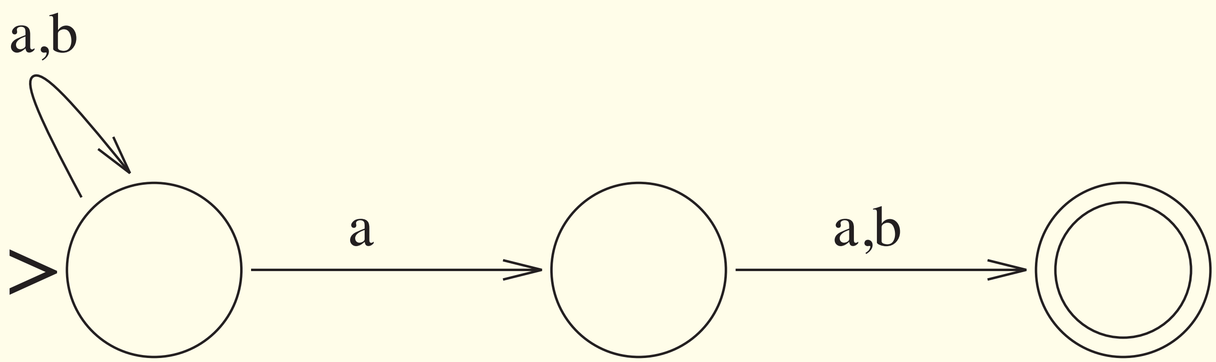
NDEA und DEA: Weiteres Beispiel

Indeterminierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^*\{a\}\{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe a ist)

A':



NDEA und DEA: Größenvergleich

Größenvergleich (Worst case)

Sprache über $\{a, b\}$ der Wörter, deren nt-letzter Buchstabe ein a ist

Determinierter Automat: $\mathbf{2^n}$ Zustände

(einen für jede Buchstabenkombination der Länge n)

Indeterminierter Automat: $\mathbf{n+1}$ Zustände

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Theorem. DEA gleich mächtig wie NDEA
Eine Sprache ist rational
(es gibt einen determinierten endlichen Automaten, der sie akzeptiert)

gdw

es gibt einen indeterminierten endlichen Automaten, der sie akzeptiert.

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Theorem. DEA gleich mächtig wie NDEA
Eine Sprache ist rational
(es gibt einen determinierten endlichen Automaten, der sie akzeptiert)

gdw

es gibt einen indeterminierten endlichen Automaten, der sie akzeptiert.

Beweis. **„⇒“:**

- Sei L eine rationale Sprache.
- Dann gibt es laut Definition einen determinierten endlichen Automaten $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$ mit $L = L(\mathcal{A}_{\text{DEA}})$.
- Jeder determinierte endliche Automat ist aber insbesondere auch ein (besonderer) indeterminierter endlicher Automat.

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Theorem. DEA gleich mächtig wie NDEA
Eine Sprache ist rational
(es gibt einen determinierten endlichen Automaten, der sie akzeptiert)

gdw

es gibt einen indeterminierten endlichen Automaten, der sie akzeptiert.

Beweis „$\Leftarrow$“:

Sei $\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$ ein (beliebiger) indeterminierter endlicher Automat. Er akzeptiert die Sprache $L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}})$.

Beweisidee: Konstruiere aus $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$ einen determinierten Automaten $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$ mit

$$L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}}) = L(\mathcal{A}_{\text{DEA}})$$

mit Hilfe einer Potenzmengenkonstruktion ...

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Forsetzung)

Fortsetzung . . .

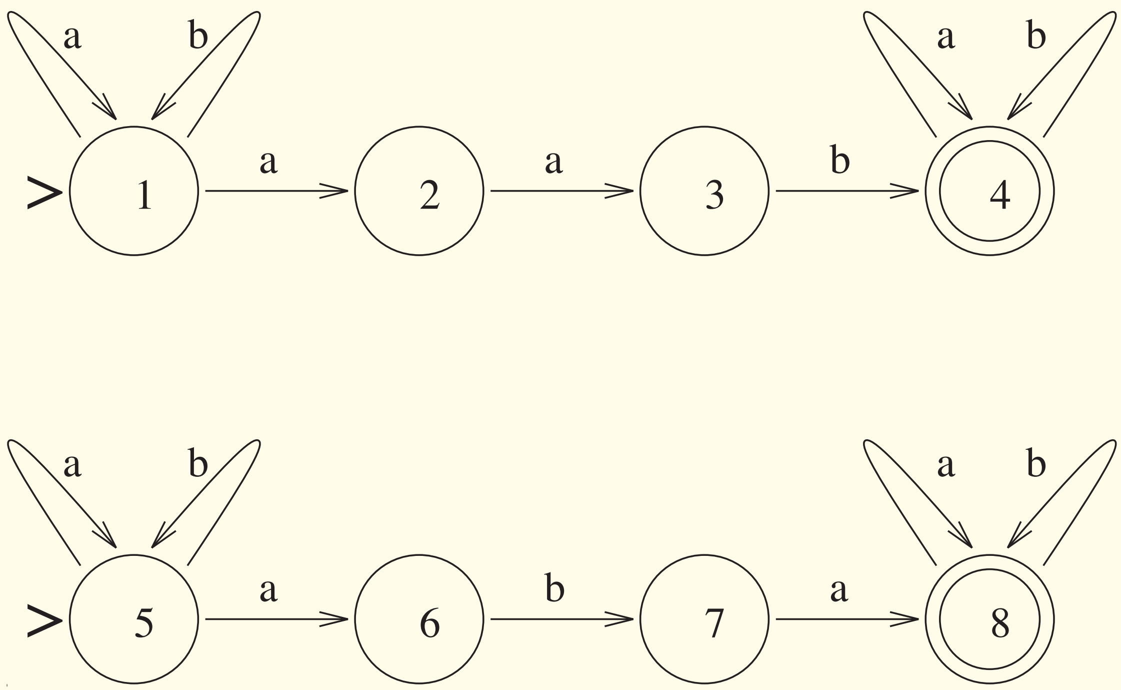
- Zustände in $\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}$ bestehen aus Mengen von Zuständen von $\mathcal{A}_{\mathrm{NDEA}}$
- Wenn man in $\mathcal{A}_{\mathrm{NDEA}}$ mit w nach $q_1, \ldots, q_n$ gelangt,
  dann gelangt man in $\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}$ mit w nach $q' = \{q_1, \ldots, q_n\}$.
- Initialer Zustand von $\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}$:
  Menge aller initialen Zustände von $\mathcal{A}_{\mathrm{NDEA}}$
- Finale Zustände von $\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}$:
  Jede Menge von Zuständen, die einen finalen Zustand von $\mathcal{A}_{\mathrm{NDEA}}$ enthält

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Ein NDEA, der die folgende Sprache akzeptiert:

$$L_{aab/aba} \; = \; \{w \in \{a, b\}^* \; | \; w \text{ hat } aab \text{ oder } aba \text{ als Teilwort}\}$$



Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Startzustand:
Menge der alten Startzustände, also $\{1, 5\}$.

Nächster Schritt:
Übergang von $\{1, 5\}$ mit a

$$
\begin{aligned}
\Delta(1, a) &= \{1, 2\} \\
\Delta(5, a) &= \{5, 6\}
\end{aligned}
$$

Also neuer Zustand $\{1, 2, 5, 6\}$ mit

$$\delta_{\mathcal{A}_{\text{DEA}}}(\{1, 5\}, a) = \{1, 2, 5, 6\}$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Nächster Schritt:
Übergang von $\{1, 5\}$ mit b.

$$\begin{aligned} \Delta(1, b) &= \{1\} \\ \Delta(5, b) &= \{5\} \end{aligned}$$

Für den Eingabebuchstaben b bleibt $\mathcal{A}_{\mathsf{DEA}}$ also im Startzustand.

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Nächster Schritt:

Übergang von $\{1, 2, 5, 6\}$ mit a

$$\begin{aligned} \Delta(1, a) &= \{1, 2\} \\ \Delta(2, a) &= \{3\} \\ \Delta(5, a) &= \{5, 6\} \\ \Delta(6, a) &= \emptyset \end{aligned}$$

Also neuer Zustand $\{1, 2, 3, 5, 6\}$ mit

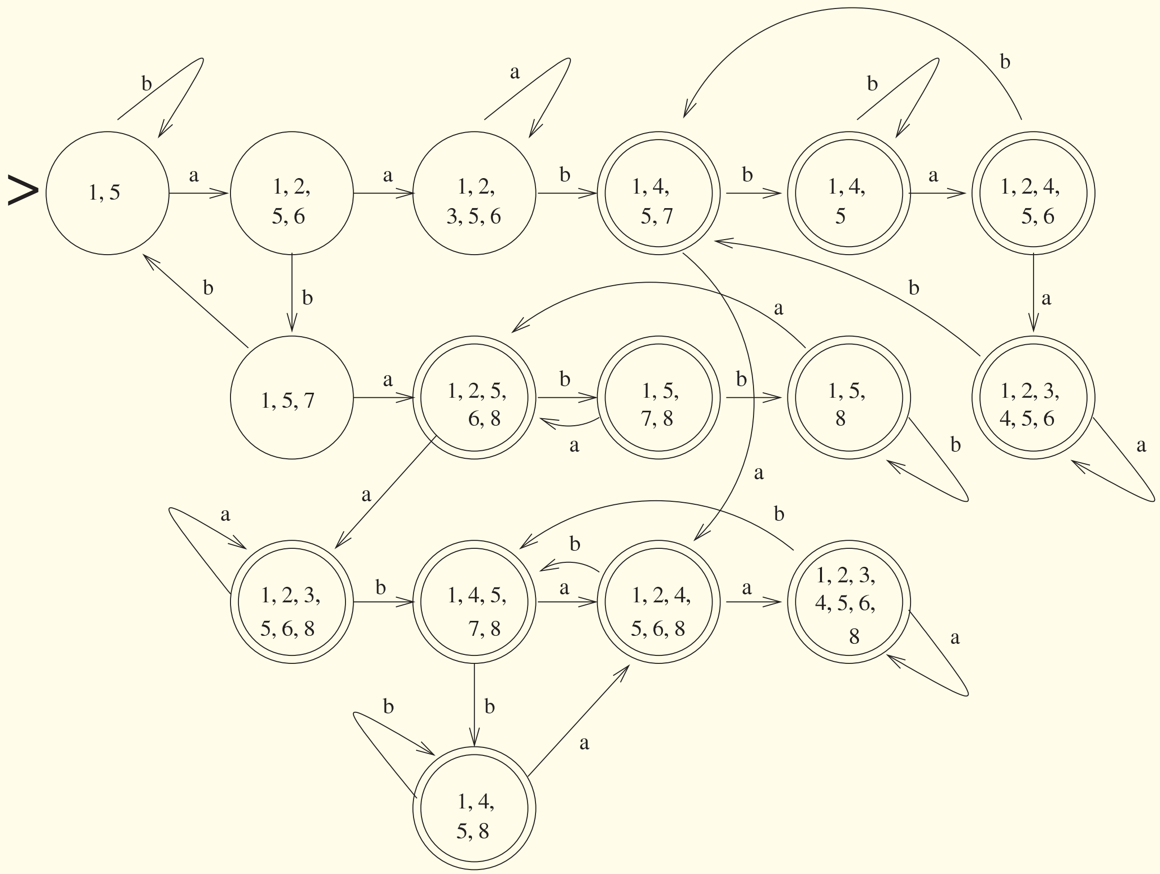
$$\delta_{\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}}(\{1, 2, 5, 6\}, a) = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

usw.

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

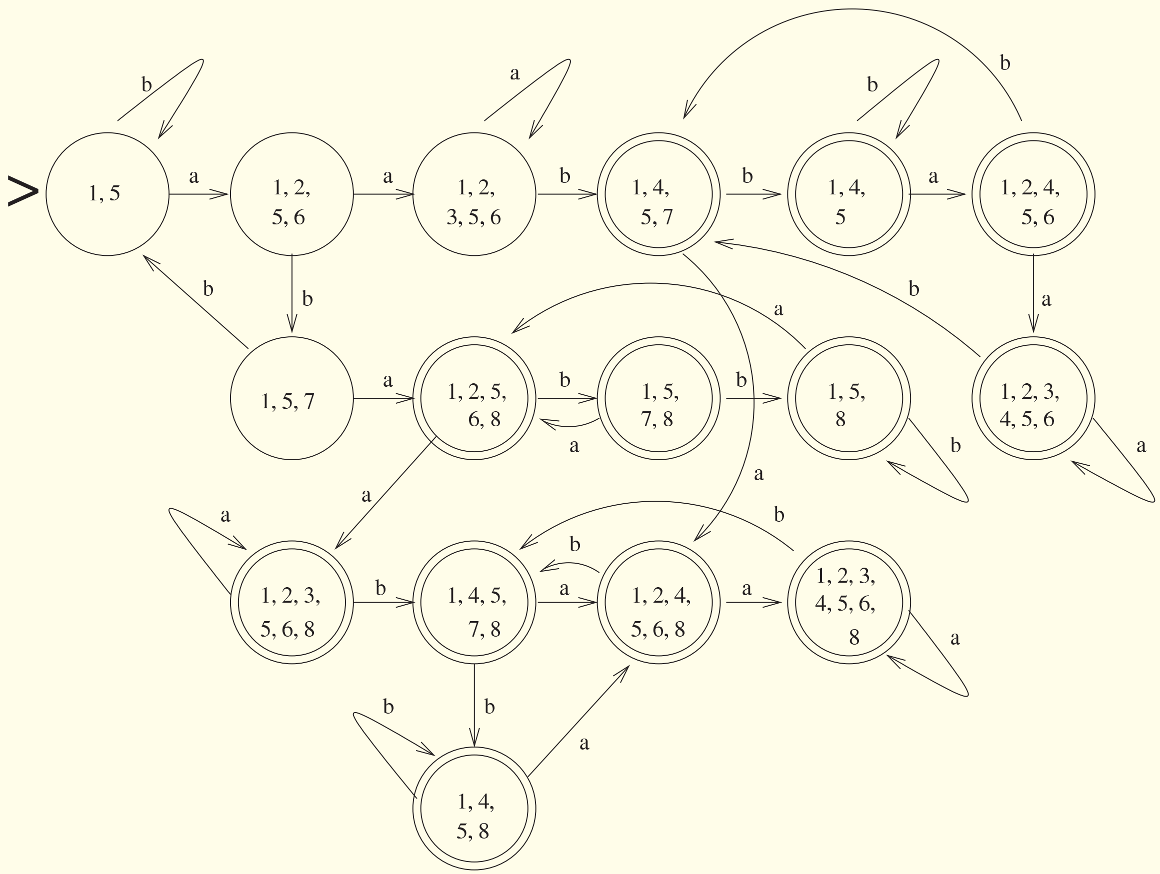
Es ergibt sich folgender determinierter Automat $\mathcal{A}_{\mathsf{DEA}}$:



Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Zunächst ein konkretes Beispiel

Es ergibt sich folgender determinierter Automat $\mathcal{A}_{\mathsf{DEA}}$:



Übergänge aller finalen Zustände führen in finale Zustände.

Vereinfachung: Man könnte die finalen Zustände zu einem zusammenfassen

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Konstruktion des determinierten endlichen Automaten $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$ formal:

Gegeben: Indeterminierter endlicher Automat

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Wir konstruieren: Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

mit

- $K' = 2^K$ (die Potenzmenge von K)
- Übergangsfunktion

$$\delta' : 2^K \times \Sigma \to 2^K \qquad \text{mit} \qquad \delta'(M, a) := \bigcup_{q \in M} \Delta(q, a)$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Konstruktion des determinierten endlichen Automaten $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$ formal:

Gegeben: Indeterminierter endlicher Automat

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Wir konstruieren: Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

mit

- $I' = I$ (die Menge der initialen Zustände von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$)
- $F' = \{M \subseteq K \mid M \cap F \neq \emptyset\}$
  (alle Zustandsmengen von $\mathcal{A}_{\text{NDEA}}$, die einen finalen Zustand enthalten)

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Konstruktion des determinierten endlichen Automaten $\mathcal{A}_{\text{DEA}}$ formal:

Gegeben: Indeterminierter endlicher Automat

$$\mathcal{A}_{\text{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Wir konstruieren: Determinierten endlichen Automaten

$$\mathcal{A}_{\text{DEA}} = (K', \Sigma, \delta', I', F')$$

mit

Merke:

- $\emptyset \in K'$
- $\delta'(\emptyset, x) = \emptyset$ für alle $x \in \Sigma$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Lemma: Für alle $w \in \Sigma^*$: $\quad \delta'^*(M, w) = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w)$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Lemma: Für alle $w \in \Sigma^*$: $\quad \delta'^*(M, w) = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w)$

Beweis durch Induktion über die Länge von w:

Induktionsanfang: $|w| = 0$

$$\delta'^*(M, \varepsilon) = M = \bigcup_{q \in M} \{q\} = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, \varepsilon)$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Fortsetzung)

Lemma: Für alle $w \in \Sigma^*$: $\quad \delta'^*(M, w) = \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, w)$

Induktionsschritt:

$$
\begin{array}{lll}
 & \delta'^*(M, wa) & \\
= & \delta'(\delta'^*(M, w), a) & \text{Def. von } * \\
= & \bigcup_{p \in \delta'^*(M,w)} \Delta(p, a) & \text{Definition von } \delta' \\
= & \bigcup_{p \in \left(\bigcup\limits_{q \in M} \Delta^*(q, w) \right)} \Delta(p, a) & \text{Ind.-Vor. für } \delta'(M, w) \\
= & \{q' \mid \exists q \in M \; \exists p \in \Delta^*(q, w) : q' \in \Delta(p, a)\} & \\
= & \{q' \mid \exists q \in M \; q' \in \Delta^*(q, wa)\} & \text{Def. von } * \\
= & \bigcup_{q \in M} \Delta^*(q, wa) &
\end{array}
$$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Schluss)

Es gilt für alle $w \in \Sigma^*$:

$w \in L(\mathcal{A}_{\text{DEA}})$

<u>**gdw**</u> $\delta'^*(I', w) \in F'$ (Def. der Sprache eines Automaten)

<u>**gdw**</u> $\delta'^*(I, w) \in F'$ (da $I' = I$ per Def.)

<u>**gdw**</u> $\delta'^*(I, w) \cap F \neq \emptyset$ (Def. von F')

<u>**gdw**</u> $\bigcup_{q \in I} \Delta^*(q, w) \cap F \neq \emptyset$ (nach Lemma)

<u>**gdw**</u> $\exists q \in I\ \exists q' \in F\ \ \big(q' \in \Delta^*(q, w)\big)$

<u>**gdw**</u> $w \in L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}})$ (Def. der Sprache eines Automaten)

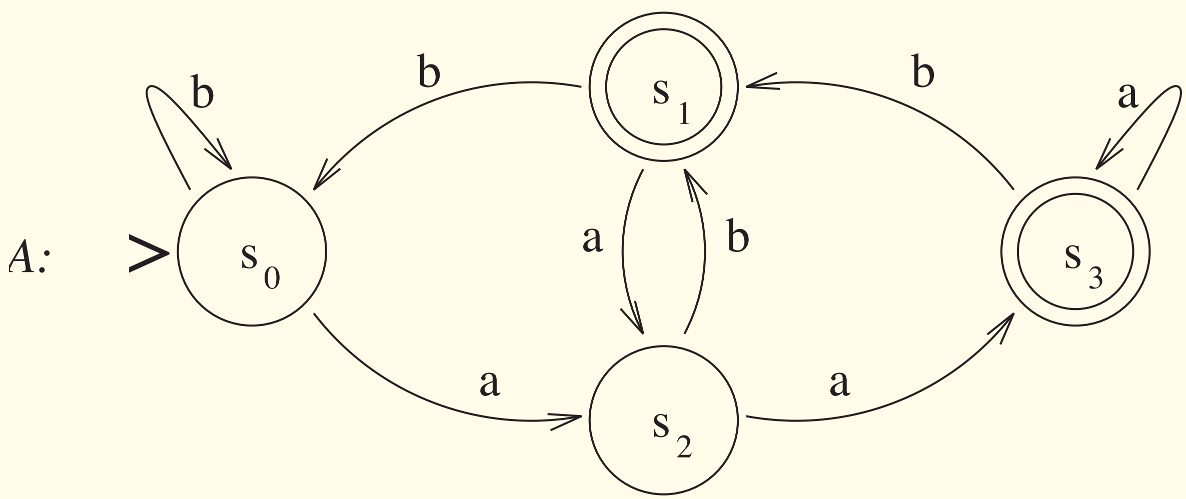
Damit: $L(\mathcal{A}_{\text{DEA}}) = L(\mathcal{A}_{\text{NDEA}})$ $\square$

Beispiel

Determinierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^*\{a\}\{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe a ist)



Idee: Im Zustand jeweils die letzten zwei Buchstaben merken

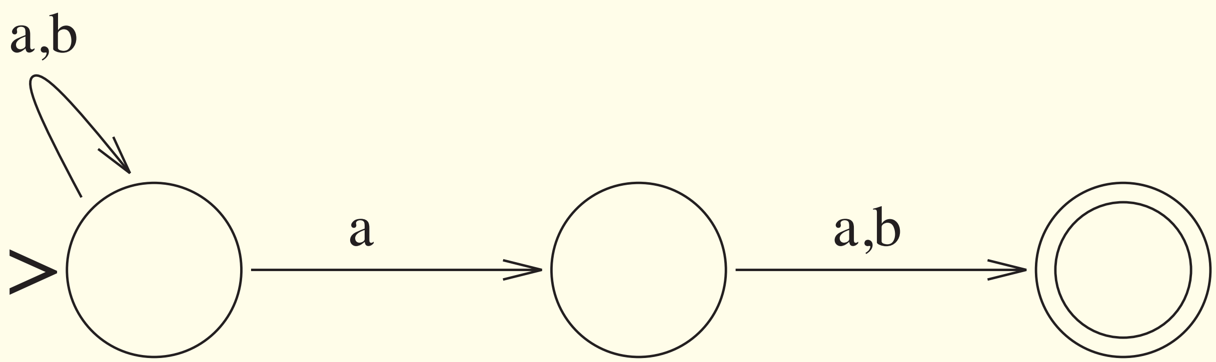
Beispiel

Indeterminierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^*\{a\}\{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe a ist)

A′:



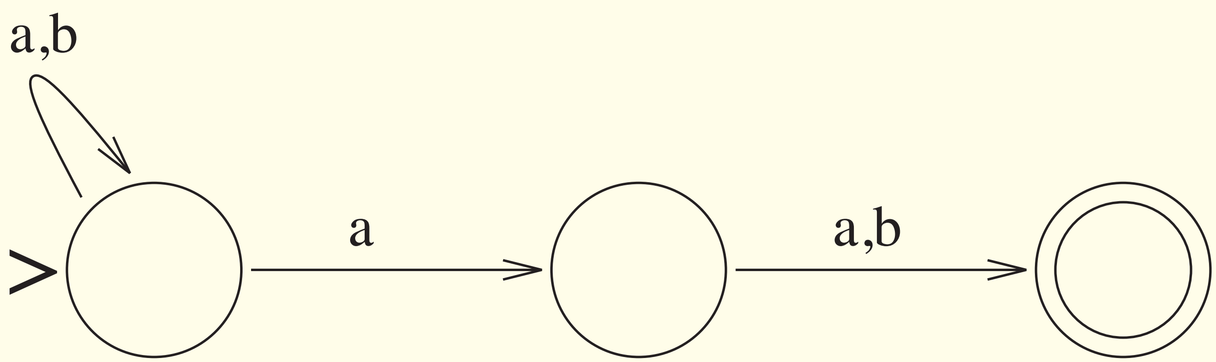
Beispiel

Indeterminierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^*\{a\}\{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe a ist)

A':



Konstruktion des determinierten endlichen Automaten: an der Tafel.

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping-Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Automaten mit epsilon-Kanten

Automaten mit ε-Kanten

Vom NDEA zum Automaten mit ε-Kanten

Bisher (NDEA): Kanten mit einem Buchstaben beschriftet

Jetzt (Automat mit ε-Kanten): Kanten mit einem Wort beschriftet

Es darf auch das leere Wort ε sein!

Automaten mit ε-Kanten

Vom NDEA zum Automaten mit ε-Kanten

Bisher (NDEA): Kanten mit einem Buchstaben beschriftet

Jetzt (Automat mit ε-Kanten): Kanten mit einem Wort beschriftet

Es darf auch das leere Wort ε sein!

Ein Automaten mit ε-Kanten kann ...

- in einem Schritt ein ganzes Wort verarbeiten
- einen Zustandsübergang machen, ohne dabei einen Buchstaben zu lesen

Automaten mit ε-Kanten: Definition

Definiton. Ein **Automat mit ε-Kanten (ε-NDEA)** A ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ein endliches Alphabet,
- $\Delta \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$ eine eine (endliche) Übergangsrelation,
- $I \subseteq K$ eine Menge von Startzuständen,
- $F \subseteq K$ eine Menge von finalen Zuständen

Automaten mit ε-Kanten: Übergangsrelation

Definition. (Erweiterung von Δ zu Δ^*)

$$\Delta^* \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$$

ist (ähnlich wie für NDEAs) definiert durch:

$$\Delta^*(\ (q, \varepsilon),\ q'\ ) \quad \underline{\text{gdw}} \quad q' = q \quad \text{oder} \quad \Delta(\ (q, \varepsilon),\ q'\ )$$

$$\begin{aligned} \Delta^*(\ (q, w_1 w_2),\ q'\ ) \quad \underline{\text{gdw}} \quad & \exists q'' \in K \\ & \quad \Delta^*(\ (q, w_1),\ q''\ ) \lor \Delta(\ (q, w_1),\ q''\ ) \\ & \quad \land \\ & \quad \Delta^*(\ (q'', w_2),\ q'\ ) \lor \Delta(\ (q'', w_2),\ q'\ ) \end{aligned}$$

Automaten mit ε-Kanten: Akzeptierte Sprache

Definition. Die von einem Automaten mit ε-Kanten

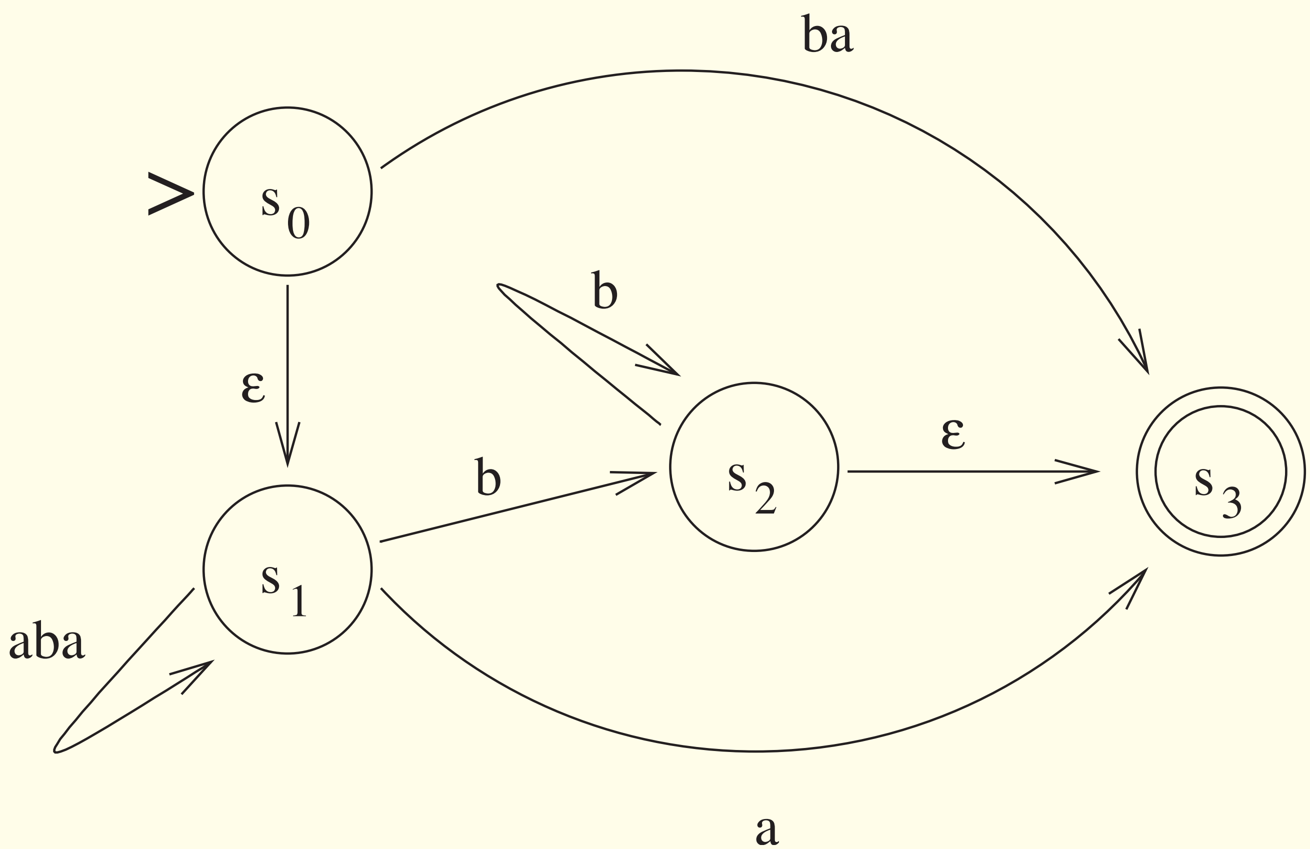
$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

akzeptierte Sprache ist

$$L(\mathcal{A}) := \{\ w \in \Sigma^* \quad | \quad \exists s_0 \in I\ \exists q \in F \ \ \Delta^*(\ (s_0, w)\ q)\ \}$$

Automaten mit ε-Kanten: Beispiel

Beispiel



Akzeptiert: $\{aba\}^*\{b\}\{b\}^* \cup \{aba\}^*\{a\} \cup \{ba\}$

Gleichmächtigkeit von Automaten mit ε-Kanten und NDEAs

Theorem (ε-NDEA gleich mächtig wie NDEA)
Zu jedem Automaten mit ε-Kanten $\mathcal{A}$ existiert ein indeterminierter endlicher Automat $\mathcal{A}'$ mit

$$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$$

Gleichmächtigkeit: Beweis

Transformation von $\mathcal{A}$ in einen NDEA ohne ε-Kanten

1. Ersetze Übergänge:

- mit nur einem Buchstaben markiert $\rightarrow$ beibehalten
- mit einem Wort w markiert ($|w| = n$) $\rightarrow$ ersetze durch n Übergänge (verwende $n - 1$ neue, zusätzlicher Zustände)
- ε-Übergänge $\rightarrow$ statt diesen

$$\Delta(\ (q, a),\ q''\ )$$

für jedes Paar

$$\Delta(\ (q, a),\ q'\ ) \quad \text{und} \quad \Delta(\ (q', \varepsilon),\ q''\ )$$

Gleichmächtigkeit von Automaten mit ε-Kanten und NDEAs

Beweis (Fortsetzung)

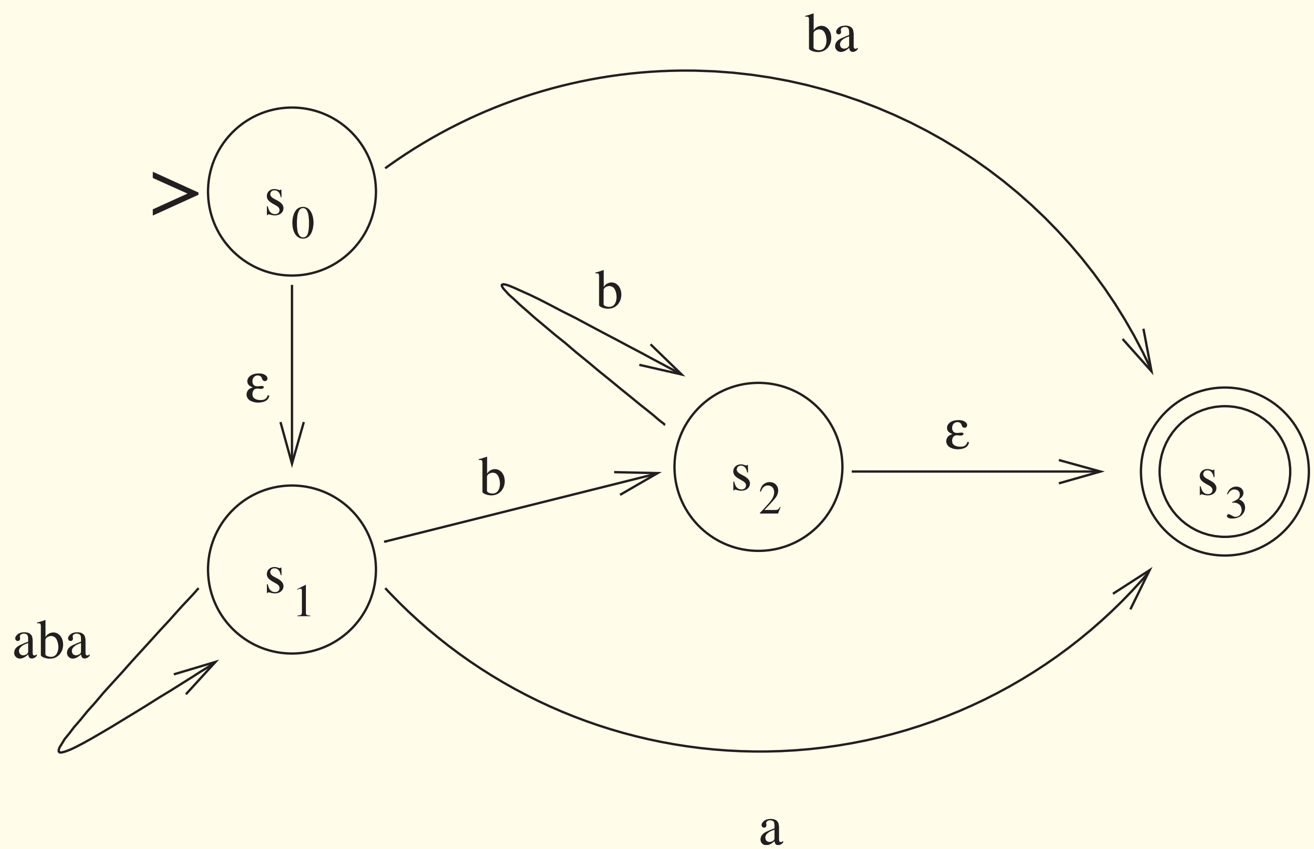
Transformation von $\mathcal{A}$ in einen NDEA ohne ε-Kanten

2. Zusätzliche Initialzustände:
Falls $q \in I$ und $\Delta^*(\ (q, \varepsilon),\ q')$, dann auch $q' \in I$

3. Finalzustände bleiben unverändert

Gleichmächtigkeit: Beispiel

Beispiel. Der Automat mit ε-Kanten . . .



Akzeptiert: $\{aba\}^*\{b\}\{b\}^* \cup \{aba\}^*\{a\} \cup \{ba\}$

Gleichmächtigkeit: Beispiel

1. Ersetze Übergänge:

- Die mit einem Buchstaben markierten Übergänge: beibehalten.
  $s_1 \xrightarrow{b} s_2$ und $s_2 \xrightarrow{b} s_2$ bleiben.

- Übergang $s_1 \xrightarrow{aba} s_1$:
  Neue Zustände: $p_{(aba,1)}, p_{(aba,2)}$.
  Übergang $s_1 \xrightarrow{aba} s_1$ ersetzt durch
  $s_1 \xrightarrow{a} p_{(aba,1)} \xrightarrow{b} p_{(aba,2)} \xrightarrow{a} s_1$.

- Übergang $s_0 \xrightarrow{ba} s_3$:
  Neuer Zustand: $p_{(ba,1)}$.
  Übergang $s_0 \xrightarrow{ba} s_3$ ersetzt durch $s_0 \xrightarrow{b} p_{(ba,1)} \xrightarrow{a} s_3$.

Gleichmächtigkeit: Beispiel

1. Ersetze Übergänge:

(Fortsetzung)

Statt ε-Übergänge:

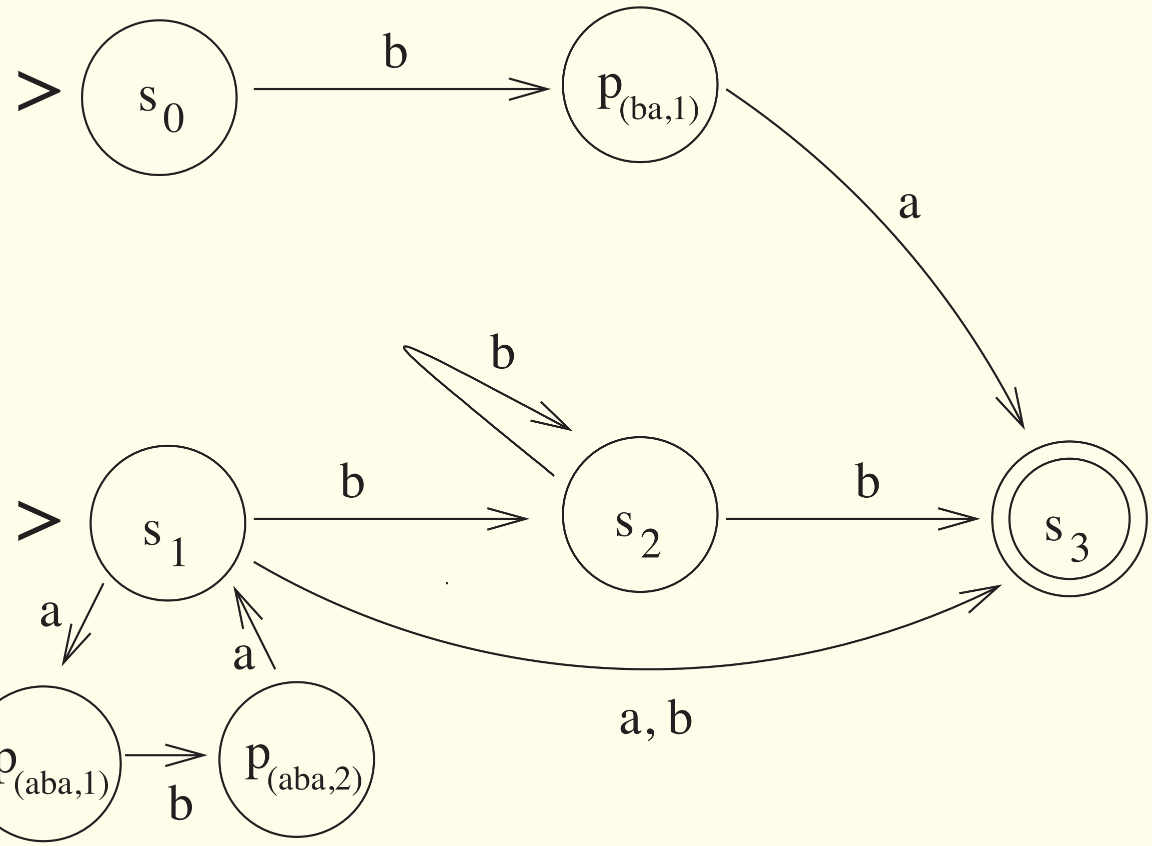
- $\Delta((s_1, b), s_2)$ und $\Delta((s_2, \varepsilon), s_3)$: neuer Übergang: $\Delta((s_1, b), s_3)$.
- $\Delta((s_2, b), s_2)$ und $\Delta((s_2, \varepsilon), s_3)$: neuer Übergang: $\Delta((s_2, b), s_3)$.

2. Zusätzliche Initialzustände:
Da $s_0 \in I$ und $\Delta((s_0, \varepsilon), s_1)$, dann auch $s_1 \in I$.

3. Finalzustände bleiben unverändert

Gleichmächtigkeit: Beispiel

Beispiel. . . . wird transformiert in den äquivalenten NDEA



Gleichmächtigkeit von Automaten mit ε-Kanten und NDEAs

Theorem (ε-NDEA gleich mächtig wie NDEA)
Zu jedem Automaten mit ε-Kanten $\mathcal{A}$ existiert ein indeterminierter endlicher Automat $\mathcal{A}'$ mit

$$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$$

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Jetzt

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Satz von Kleene

Theorem (Satz von Kleene: RAT = L_3)
Eine Sprache L ist rational <u>gdw</u> L ist regulär.

Merke:

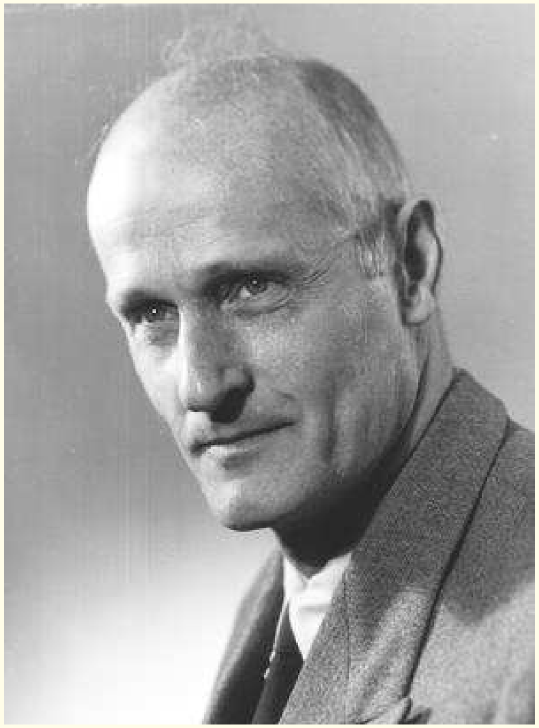
L **ist rational heißt:** es gibt einen endlichen Automaten, der L akzeptiert

L **ist regulär heißt:** es gibt eine rechtslineare Grammatik für L

Satz von Kleene

Stephen Cole Kleene (1909 – 1994)

- Mathematiker und Logiker
- Promovierte bei Church in Princeton
  (wie Turing und viele andere)
- Professor an der Universität von Wisconsin
- Einer der Begründer der theoretischen Informatik
- Unter anderem:
  Erfinder der Regulären Ausdrücke



Satz von Kleene

Theorem (Satz von Kleene: RAT $=$ L_3)
Eine Sprache L ist rational <u>gdw</u> L ist regulär.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ zu zeigen:
Wenn eine Sprache L von einem endlichen Automaten $\mathcal{A}$ akzeptiert wird, ist sie regulär (wird von einer rechtslinearen Grammatik akzeptiert).

Sei also $L = L(\mathcal{A})$ für einen endlichen Automaten $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$

Dazu konstruieren wir eine Grammatik $G = (V, T, R, S)$:

Automat $\mathcal{A}$:	in **Zustand** q,	**liest** a,	geht in **Zustand** q'
Grammatik:	**Variable** q,	**erzeugt** a	neue **Variable** q'

Satz von Kleene

Beweis (Fortsetzung) Formale Definition der Grammatik:

$$
\begin{array}{rcl}
V & := & K \\
T & := & \Sigma \\
S & := & s_0 \\
R & := & \{\, q \to aq' \mid \delta(q,a) = q' \,\} \cup \\
  &   & \{\, q \to \varepsilon \quad \mid q \in F \,\}
\end{array}
$$

Durch Induktion über die Länge eines Wortes w:

$$S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} wq \qquad \underline{\text{gdw}} \qquad \delta^*(s_0, w) = q$$

Daraus: $S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w$ $\underline{\text{gdw}}$ $\exists q \in F \ \big(S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} wq \Longrightarrow w\big)$

$\underline{\text{gdw}}$ $\exists q \in F \ \big(\delta^*(s_0, w) = q\big)$

$\underline{\text{gdw}}$ $w \in L(\mathcal{A})$

Satz von Kleene

Beweis (Fortsetzung) "$\Leftarrow$" zu zeigen:
Wenn eine Sprache L regulär ist
(sie wird von einer rechtslinearen Grammatik akzeptiert),
dann gibt es einen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ der sie akzeptiert.

Sei also $L = L(G)$ für eine rechtslineare Grammatik $G = (V, T, R, S)$

Dazu konstruieren wir einen ε-NDEA $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$ mit:

$$\begin{array}{rcll} K & := & V \cup \{q_{stop}\} & \quad (q_{stop} \text{ neu}) \\ I & := & \{S\} & \\ \Sigma & := & T & \\ F & := & \{q_{stop}\} & \end{array}$$

Satz von Kleene

Beweis (Fortsetzung)

Definition von Δ:

$$\begin{aligned} \Delta(\ (X, u),\ X'\ ) \quad &:\Longleftrightarrow_{def} \quad X \to uX' \in R \\ \Delta(\ (X, u),\ q_{stop}\ ) \quad &:\Longleftrightarrow_{def} \quad X \to u \in R \end{aligned}$$

für $X, X' \in K$ und $u \in \Sigma^*$

Durch Induktion über die Länge einer Ableitung:

$$S \Longrightarrow_G^* w \quad \underline{\text{gdw}} \quad \Delta^*(\ (S, w),\ q_{stop}\ ) \quad \underline{\text{gdw}} \quad w \in L(\mathcal{A})$$

Wegen Gleichmächtigkeit von ϵ-NDEA- mit DEA-Automaten gibt es dann auch einen determinierten endlichen Automaten, der L akzeptiert.

$\square$

Satz von Kleene

Beispiel:

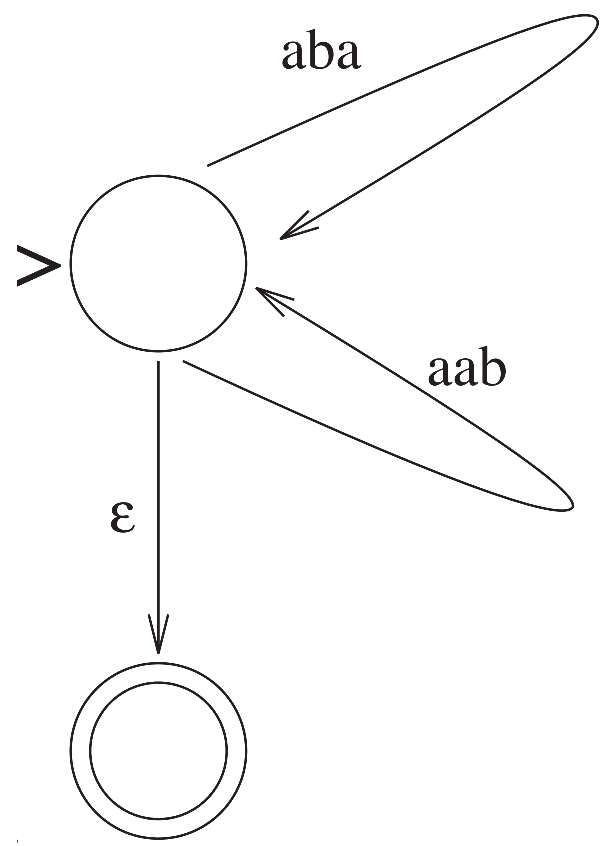
Grammatik G mit Regeln

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow abaS \\
S &\rightarrow aabS \\
S &\rightarrow \varepsilon
\end{aligned}
$$

Sprache

$$L(G) = \{aba, aab\}^*$$

ε-NDEA:



Nächste Vorlesung

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke