Grundlagen der Theoretischen Informatik

3. Endliche Automaten (III)

2.05.2018

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Organisatorisches

- **1. Teilklausur:**

  Registration via MeToo opens soon.

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Automaten mit ε-Kanten

Vom NDEA zum Automaten mit ε-Kanten

Bisher (NDEA): Kanten mit einem Buchstaben beschriftet

Jetzt (Automat mit ε-Kanten): Kanten mit einem Wort beschriftet

Es darf auch das leere Wort ε sein!

Automaten mit ε-Kanten

Vom NDEA zum Automaten mit ε-Kanten

Bisher (NDEA): Kanten mit einem Buchstaben beschriftet

Jetzt (Automat mit ε-Kanten): Kanten mit einem Wort beschriftet
Es darf auch das leere Wort ε sein!

Ein Automat mit ε-Kanten kann ...

- in einem Schritt ein ganzes Wort verarbeiten
- einen Zustandsübergang machen, ohne dabei einen Buchstaben zu lesen

Automaten mit ε-Kanten: Definition

Definiton. Ein **Automat mit ε-Kanten (ε-NDEA)** A ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ein endliches Alphabet,
- $\Delta \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$ eine eine (endliche) Übergangsrelation,
- $I \subseteq K$ eine Menge von Startzuständen,
- $F \subseteq K$ eine Menge von finalen Zuständen

Automaten mit ε-Kanten: Übergangsrelation

Definition. (Erweiterung von Δ zu Δ^*)

$$\Delta^* \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$$

ist (ähnlich wie für NDEAs) definiert durch:

$$\Delta^*(\ (q, \varepsilon),\ q'\ ) \quad \underline{\text{gdw}} \quad q' = q \quad \text{oder} \quad \Delta(\ (q, \varepsilon),\ q'\ )$$

$$\Delta^*(\ (q, w_1 w_2),\ q'\ ) \quad \underline{\text{gdw}} \quad \exists q'' \in K$$

$$\Delta^*(\ (q, w_1),\ q''\ ) \vee \Delta(\ (q, w_1),\ q''\ )$$

$$\wedge$$

$$\Delta^*(\ (q'', w_2),\ q'\ ) \vee \Delta(\ (q'', w_2),\ q'\ )$$

Automaten mit ε-Kanten: Akzeptierte Sprache

Definition. Die von einem Automaten mit ε-Kanten

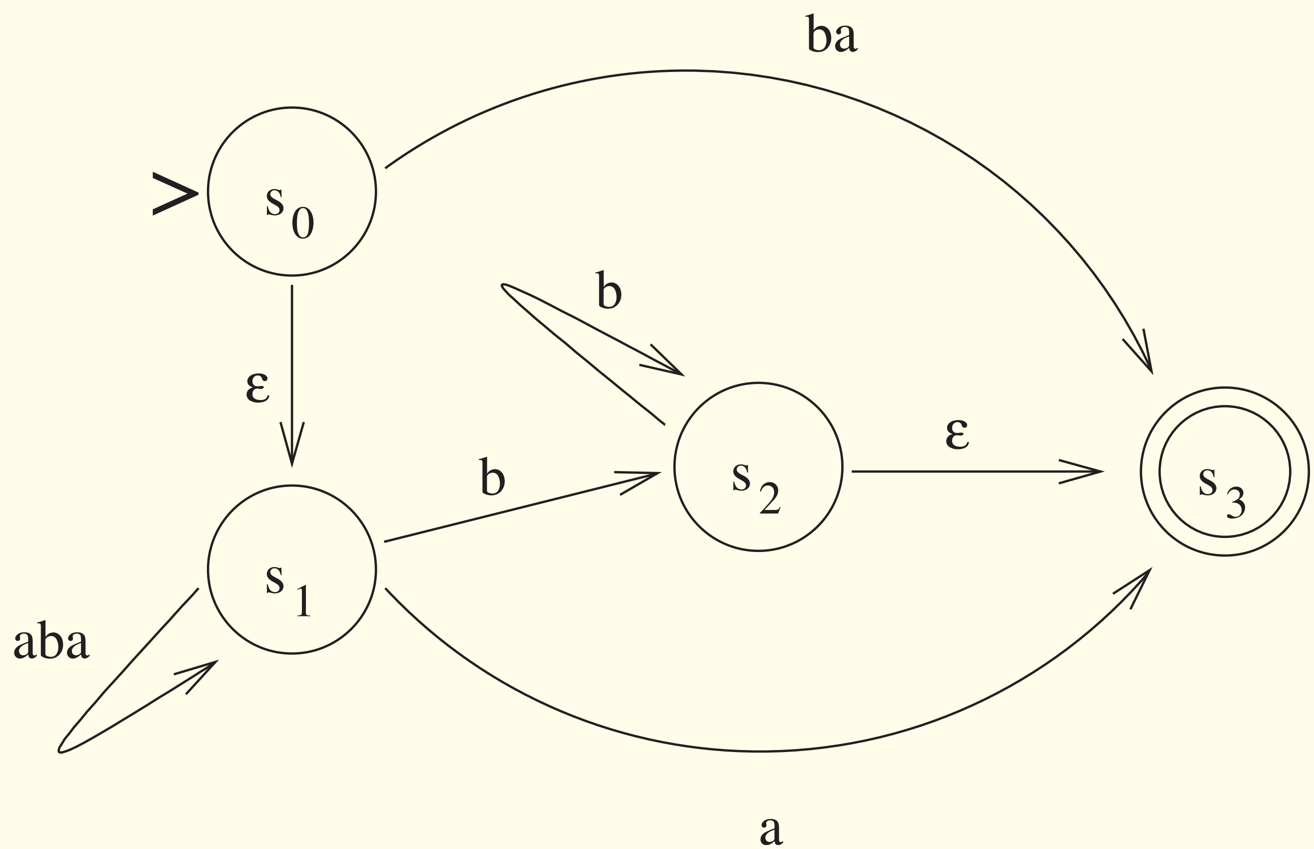
$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

akzeptierte Sprache ist

$$L(\mathcal{A}) := \{\ w \in \Sigma^* \quad | \quad \exists s_0 \in I \, \exists q \in F \ \ \Delta^*(\ (s_0, w)\ q)\ \}$$

Automaten mit ε-Kanten: Beispiel

Beispiel



Akzeptiert: $\{aba\}^*\{b\}\{b\}^* \;+\; \{aba\}^*\{a\} \;+\; \{ba\}$

Gleichmächtigkeit von Automaten mit ε-Kanten und NDEAs

Theorem (ε-NDEA gleich mächtig wie NDEA)
Zu jedem Automaten mit ε-Kanten $\mathcal{A}$ existiert ein indeterminierter endlicher Automat $\mathcal{A}'$ mit

$$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$$

Gleichmächtigkeit: Beweis

Transformation von $\mathcal{A}$ in einen NDEA ohne ε-Kanten

1. Ersetze Übergänge:

- mit nur einem Buchstaben markiert $\quad\rightarrow\quad$ beibehalten
- mit einem Wort w markiert ($|w| = n$) $\rightarrow$ ersetze durch n Übergänge (verwende $n-1$ neue, zusätzlicher Zustände)
- ε-Übergänge $\quad\rightarrow\quad$ statt diesen

$$\Delta(\ (q, a),\ q''\ )$$

  für jedes Paar

$$\Delta(\ (q, a),\ q'\ ) \quad \text{und} \quad \Delta(\ (q', \varepsilon),\ q''\ )$$

Gleichmächtigkeit von Automaten mit ε-Kanten und NDEAs

Beweis (Fortsetzung)

Transformation von $\mathcal{A}$ in einen NDEA ohne ε-Kanten

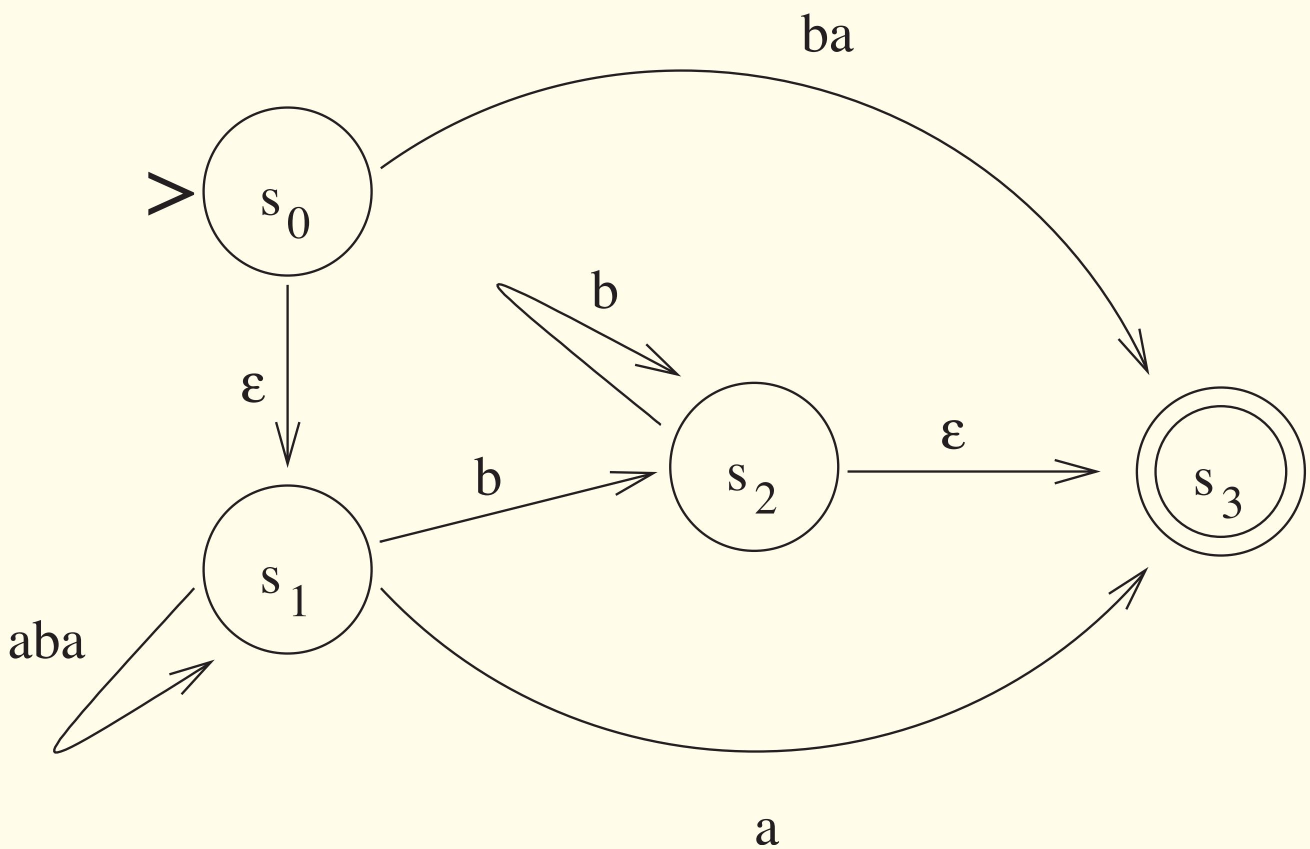
2. Zusätzliche Initialzustände:

Falls $q \in I$ und $\Delta^*(\ (q, \varepsilon),\ q')$, dann auch $q' \in I$

3. Finalzustände bleiben unverändert

Gleichmächtigkeit: Beispiel

Beispiel. Der Automat mit ε-Kanten ...



Akzeptiert: $\{aba\}^*\{b\}\{b\}^* \; + \; \{aba\}^*\{a\} \; + \; \{ba\}$

Gleichmächtigkeit: Beispiel

1. Ersetze Übergänge:

- Die mit einem Buchstaben markierten Übergänge: beibehalten.
  $s_1 \xrightarrow{b} s_2$, $s_2 \xrightarrow{b} s_2$ und $s_1 \xrightarrow{a} s_3$ bleiben.

- Übergang $s_1 \xrightarrow{aba} s_1$:
  Neue Zustände: $p_{(aba,1)}, p_{(aba,2)}$.
  Übergang $s_1 \xrightarrow{aba} s_1$ ersetzt durch
  $s_1 \xrightarrow{a} p_{(aba,1)} \xrightarrow{b} p_{(aba,2)} \xrightarrow{a} s_1$.

- Übergang $s_0 \xrightarrow{ba} s_3$:
  Neuer Zustand: $p_{(ba,1)}$.
  Übergang $s_0 \xrightarrow{ba} s_3$ ersetzt durch $s_0 \xrightarrow{b} p_{(ba,1)} \xrightarrow{a} s_3$.

Gleichmächtigkeit: Beispiel

1. Ersetze Übergänge:

(Fortsetzung)

Statt ε-Übergänge:

- $\Delta((s_1, b), s_2)$ und $\Delta((s_2, \varepsilon), s_3)$: neuer Übergang: $\Delta((s_1, b), s_3)$.
- $\Delta((s_2, b), s_2)$ und $\Delta((s_2, \varepsilon), s_3)$: neuer Übergang: $\Delta((s_2, b), s_3)$.

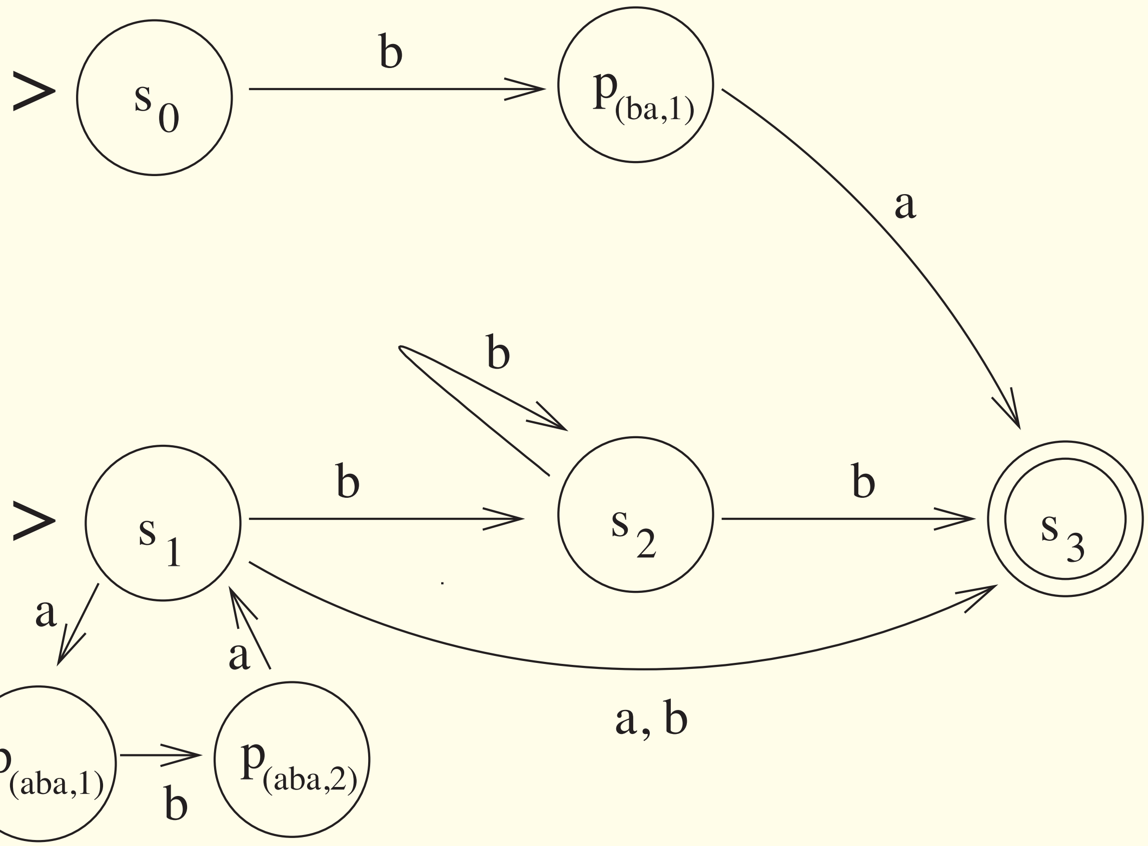
2. Zusätzliche Initialzustände:

Da $s_0 \in I$ und $\Delta((s_0, \varepsilon), s_1)$, dann auch $s_1 \in I$.

3. Finalzustände bleiben unverändert

Gleichmächtigkeit: Beispiel

Beispiel. . . . wird transformiert in den äquivalenten NDEA



Gleichmächtigkeit von Automaten mit ε-Kanten und NDEAs

Theorem (ε-NDEA gleich mächtig wie NDEA)
Zu jedem Automaten mit ε-Kanten $\mathcal{A}$ existiert ein indeterminierter endlicher Automat $\mathcal{A}'$ mit

$$L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$$

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

Jetzt

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Satz von Kleene

Theorem (Satz von Kleene: RAT $=$ L_3)
Eine Sprache L ist rational <u>gdw</u> L ist regulär.

Merke:

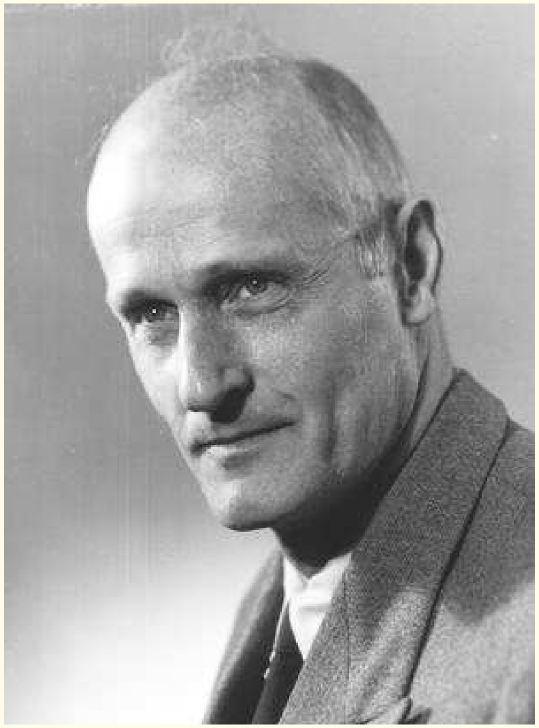
L ist rational heißt: es gibt einen endlichen Automaten, der L akzeptiert

L ist regulär heißt: es gibt eine rechtslineare Grammatik für L

Satz von Kleene

Stephen Cole Kleene (1909 – 1994)

- Mathematiker und Logiker
- Promovierte bei Church in Princeton
  (wie Turing und viele andere)
- Professor an der Universität von Wisconsin
- Einer der Begründer der theoretischen Informatik
- Unter anderem:
  Erfinder der regulären Ausdrücke



Satz von Kleene

Theorem (Satz von Kleene: RAT = L_3)
Eine Sprache L ist rational <u>gdw</u> L ist regulär.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ zu zeigen:
Wenn eine Sprache L von einem endlichen Automaten $\mathcal{A}$ akzeptiert wird, ist sie regulär (wird von einer rechtslinearen Grammatik akzeptiert).

Sei also $L = L(\mathcal{A})$ für einen endlichen Automaten $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$

Dazu konstruieren wir eine Grammatik $G = (V, T, R, S)$:

Automat $\mathcal{A}$:	in **Zustand** q,	**liest** a,	geht in **Zustand** q'
Grammatik:	**Variable** q,	**erzeugt** a	neue **Variable** q'

Satz von Kleene

Beweis (Fortsetzung) Formale Definition der Grammatik:

$$\begin{aligned} V &:= K \\ T &:= \Sigma \\ S &:= s_0 \\ R &:= \{\, q \to aq' \mid \delta(q,a) = q' \,\} \cup \\ & \{\, q \to \varepsilon \quad \mid q \in F \,\} \end{aligned}$$

Durch Induktion über die Länge eines Wortes w:

$$S \Longrightarrow_G^* wq \qquad \underline{\text{gdw}} \qquad \delta^*(s_0, w) = q$$

Daraus: $S \Longrightarrow_G^* w$ $\underline{\text{gdw}}$ $\exists q \in F \; \big(S \Longrightarrow_G^* wq \Longrightarrow w\big)$

$\underline{\text{gdw}}$ $\exists q \in F \; \big(\delta^*(s_0, w) = q\big)$

$\underline{\text{gdw}}$ $w \in L(\mathcal{A})$

Satz von Kleene

Beweis (Fortsetzung) "$\Leftarrow$" zu zeigen:

Wenn eine Sprache L regulär ist
(sie wird von einer rechtslinearen Grammatik akzeptiert),
dann gibt es einen endlichen Automaten $\mathcal{A}$, der sie akzeptiert.

Sei also $L = L(G)$ für eine rechtslineare Grammatik $G = (V, T, R, S)$

Dazu konstruieren wir einen ε-NDEA $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$ mit:

$$\begin{array}{rcll} K & := & V \cup \{q_{stop}\} & \quad (q_{stop} \text{ neu}) \\ I & := & \{S\} & \\ \Sigma & := & T & \\ F & := & \{q_{stop}\} & \end{array}$$

Satz von Kleene

Beweis (Fortsetzung)

Definition von Δ:

$$\Delta(\ (X,u),\ X'\ ) \quad :\Longleftrightarrow_{def} \quad X \to uX' \in R$$
$$\Delta(\ (X,u),\ q_{stop}\ ) \quad :\Longleftrightarrow_{def} \quad X \to u \in R$$

für $X, X' \in K$ und $u \in \Sigma^*$

Durch Induktion über die Länge einer Ableitung:

$$S \Longrightarrow_G^* w \quad \underline{\text{gdw}} \quad \Delta^*(\ (S,w),\ q_{stop}\ ) \quad \underline{\text{gdw}} \quad w \in L(\mathcal{A})$$

Wegen Gleichmächtigkeit von ϵ-NDEA- mit DEA-Automaten gibt es dann auch einen determinierten endlichen Automaten, der L akzeptiert.

$\Box$

Satz von Kleene

Beispiel:

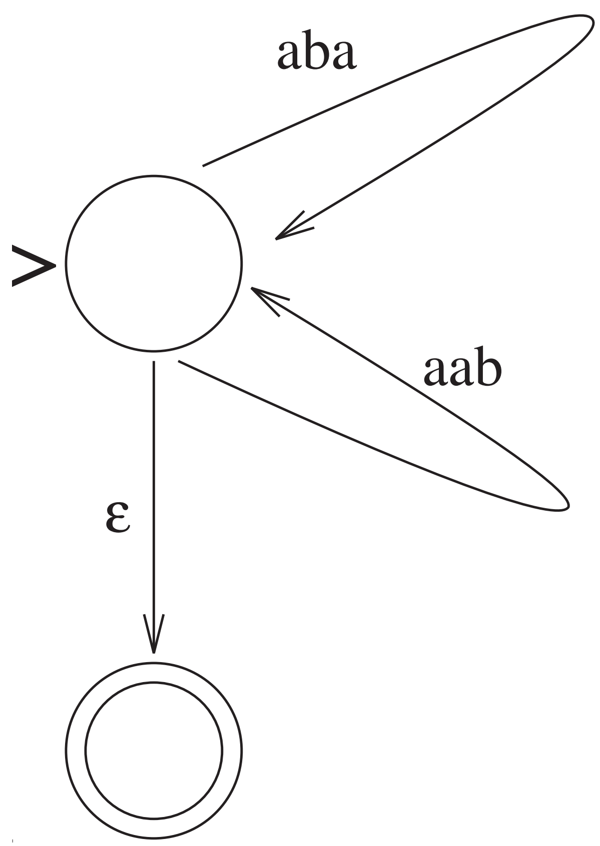
Grammatik G mit Regeln

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow abaS \\
S &\rightarrow aabS \\
S &\rightarrow \varepsilon
\end{aligned}
$$

Sprache

$$L(G) = \{aba, aab\}^*$$

ε-NDEA:



Überblick

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping-Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Pumping-Lemma

“Aufpumpbarkeit” (informell)

Lange Wörter $x \in L$ lassen sich zerlegen

$$x = uvw \qquad |v| \geq 1$$

so dass

$$u \underbrace{vv \ldots v}_{i \text{ mal}} w = uv^m w$$

wieder in L liegt (für alle $m \geq 1$)

Pumping-Lemma

Pumping-Lemma (informell)

Zu jeder regulären Sprache L gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass
alle Wörter

$$w \in L \qquad \text{mit } |w| \geq n$$

aufgepumpt werden können

Pumping-Lemma

Pumping-Lemma (informell)

Zu jeder regulären Sprache L gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass
alle Wörter

$$w \in L \qquad \text{mit } |w| \geq n$$

aufgepumpt werden können

Anwendung

- Wichtige Information über die Struktur regulärer Sprachen
- Nachweis der Nicht-Regularität von Sprachen:
  Wenn das Pumping-Lemma für eine Sprache nicht gilt,
  dann kann sie nicht regulär sein

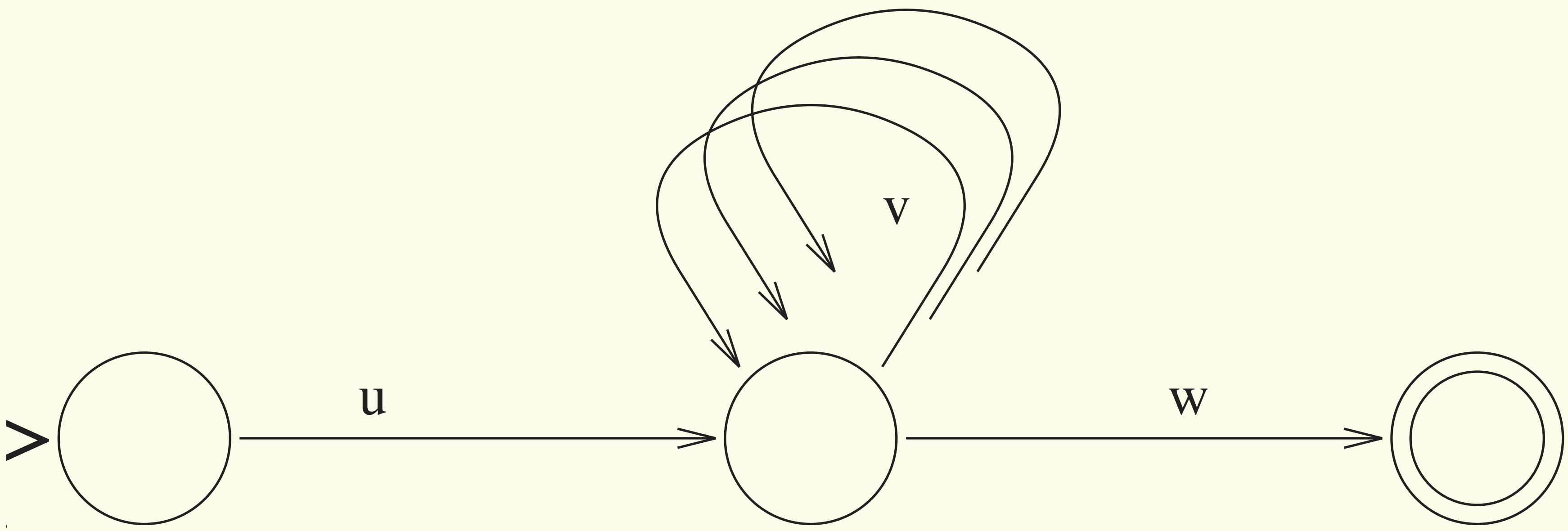
Pumping-Lemma: Intuition

Warum gilt das Pumping-Lemma?

- Zu regulärer Sprache L gibt es einen DEA, der L akzeptiert
- Dieser hat endliche Zustandsmenge K.
  Sei $m := |K|$.
- Wenn $|w| > |K|$, dann muss beim Akzeptieren von w eine Schleife durchlaufen werden.
- Die Schleife kann auch mehrfach durchlaufen werden.
- Das Teilwort v, das der Schleife entspricht, kann aufgepumpt werden.

Pumping-Lemma: Intuition

Abstrakt gesehen



Pumping-Lemma: Formal

Theorem (Pumping-Lemma für L_3-Sprachen)

Sei $L \in \mathbf{RAT}$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass:

Für alle

$$x \in L \quad \text{mit} \quad |x| \geq n$$

existiert eine Zerlegung

$$x = uvw \qquad u, v, w \in \Sigma^*$$

mit

- $|v| \geq 1$
- $|v| < n$
- $uv^m w \in L \quad$ für alle $m \in \mathbb{N}$

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis: folgt nach Beispielen

Pumping-Lemma: Umkehrung

Korollar.
Wenn für eine Sprache das Pumping-Lemma **nicht** gilt,
dann ist sie **nicht** regulär.

Vorsicht

- Es gibt nicht-reguläre Sprachen, für die das Pumping-Lemma gilt.
  (Beispiel: $L = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 1\} \cup \{b^m c^n \mid m, n \geq 0\}$)

- Daraus, dass das Pumping-Lemma für eine Sprache gilt,
  folgt **nicht**, dass sie regulär ist.

Pumping-Lemma:Anwendung der Umkehrung

Beispiel

Folgende Sprachen sind **nicht regulär**:

1. $L_1 := \{a^i b a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

2. $L_2 := \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_1

Zu

$$L_1 := \{a^i ba^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Annahme: L_1 ist regulär.

Dann gilt für L_1 das Pumping-Lemma.

Sei n die Zahl aus dem Pumping-Lemma.

Dann muss sich das Wort

$$a^n ba^n \in L_1$$

aufpumpen lassen (da $|a^n ba^n| \geq n$).

Sei $a^n ba^n = uvw$ eine passende Zerlegung laut Lemma.

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_1 (Forts.)

1. Fall: $u = a^k, v = a^j, w = a^i ba^n$ mit $i, k \geq 0$, $j > 0$ und $k + j + i = n$.

Einmal aufpumpen ($m = 2$) ergibt:

$$uv^2w = a^k a^{2j} a^i ba^n = a^{k+2j+i} ba^n = a^{n+j} ba^n \notin L_1$$

Widerspruch zum Lemma!

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_1 (Forts.)

1. Fall: $u = a^k, v = a^j, w = a^i b a^n$ mit $i, k \geq 0$, $j > 0$ und $k + j + i = n$.

Einmal aufpumpen ($m = 2$) ergibt:

$$uv^2w = a^k a^{2j} a^i b a^n = a^{k+2j+i} b a^n = a^{n+j} b a^n \notin L_1$$

Widerspruch zum Lemma!

2. Fall: $u = a^n b a^i, v = a^j, w = a^k$

Widerspruch zum Lemma! (analog zu Fall 1)

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_1 (Forts.)

1. Fall: $u = a^k, v = a^j, w = a^i ba^n$ mit $i, k \geq 0$, $j > 0$ und $k + j + i = n$.

Einmal aufpumpen ($m = 2$) ergibt:

$$uv^2w = a^k a^{2j} a^i ba^n = a^{k+2j+i} ba^n = a^{n+j} ba^n \notin L_1$$

Widerspruch zum Lemma!

2. Fall: $u = a^n ba^i, v = a^j, w = a^k$

Widerspruch zum Lemma! (analog zu Fall 1)

3. Fall: $u = a^k, v = a^j ba^i, w = a^l$ mit $k + j = i + l = n$ und $i, j, k, l \geq 0$

Einmal aufpumpen ($m = 2$) ergibt:

$$uv^2w = a^k a^j ba^i a^j ba^i a^l = a^{k+j} ba^{i+j} ba^{i+l} \notin L_1$$

Widerspruch zum Lemma!

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_1 (Forts.)

Also: Annahme falsch.

Also: L_1 nicht regulär. $\Box$

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von $L_2 := \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl }\}$

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_2

Zu

$$L_2 := \{ a^p \mid p \text{ ist Primzahl } \}$$

Annahme: L_2 ist regulär.

Dann gilt für L_2 das Pumping-Lemma.

Sei n die Zahl aus dem Pumping-Lemma.

Dann muss sich jedes Wort

$$a^p \in L_2 \quad \text{mit} \quad p \geq n$$

aufpumpen lassen.

Sei $a^p = uvw$ eine passende Zerlegung laut Lemma.

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_2 (Forts.)

Sei

$$a^p = uvw = a^i a^j a^k$$

also

$$i + j + k = p \geq n \qquad \text{und} \qquad 0 < j < n$$

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_2 (Forts.)

Fall 1: $i + k > 1$.

Pumpe $(i + k)$ mal:

$$uv^{i+k}w = a^i a^{j(i+k)} a^k$$

Nach Pumping-Lemma liegt dieses Wort in L_2, d. h.

$$i + j(i + k) + k \quad \text{prim}$$

Aber **Widerspruch**:

$$\begin{aligned} i + j(i + k) + k &= i + ij + jk + k \\ &= i(1 + j) + (j + 1)k \\ &= i(1 + j) + k(1 + j) \\ &= (i + k)(1 + j) \end{aligned}$$

Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

Beweis der Nichtregularität von L_2 (Forts.)

Fall 2: $i + k = 1$.

Pumpe $(j+2)$ mal:

$$uv^{j+2}w = a^i a^{j(j+2)} a^k$$

Nach Pumping-Lemma liegt dieses Wort in L_2, d. h.

$$i + j(j+2) + k \quad \text{prim}$$

Aber **Widerspruch!**:

$$\begin{aligned} i + j(j+2) + k &= 1 + j(j+2) \\ &= 1 + 2j + j^2 \\ &= (1+j)^2 \end{aligned}$$

Also: Annahme falsch. L_2 nicht regulär. $\square$

Pumping-Lemma: Beweis

Theorem (Pumping-Lemma für L_3-Sprachen)

Sei $L \in \mathbf{RAT}$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass:

Für alle

$$x \in L \quad \text{mit} \quad |x| \geq n$$

existiert eine Zerlegung

$$x = uvw \qquad u, v, w \in \Sigma^*$$

mit

- $|v| \geq 1$
- $|v| < n$
- $uv^m w \in L \quad$ für alle $m \in \mathbb{N}$

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis. Sei L eine reguläre Sprache.

1. Fall: L ist endlich.

Sei w_{max} das längste Wort in L.

Wir setzen

$$n := |w_{max}| + 1$$

Dann gibt es keine Wörter $x \in L$, für die $|x| \geq n$ gilt.

Also gilt dann das Pumping-Lemma trivialerweise.

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

2. Fall: L ist unendlich.

Sei

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$$

ein endlicher Automat (DEA), der L akzeptiert.

Wir setzen

$$n := |K| + 1$$

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

Wir betrachten ein beliebiges Wort

$$x \;=\; x_1 x_2 \ldots x_t \;\in\; L \quad \text{mit} \quad |x| = t \geq n, \quad x_i \in \Sigma$$

Zu zeigen: x lässt sich aufpumpen.

Seien

$$q_0, q_1, \ldots, q_t \in K,$$

die Zustände, die beim Akzeptieren von x durchlaufen werden:

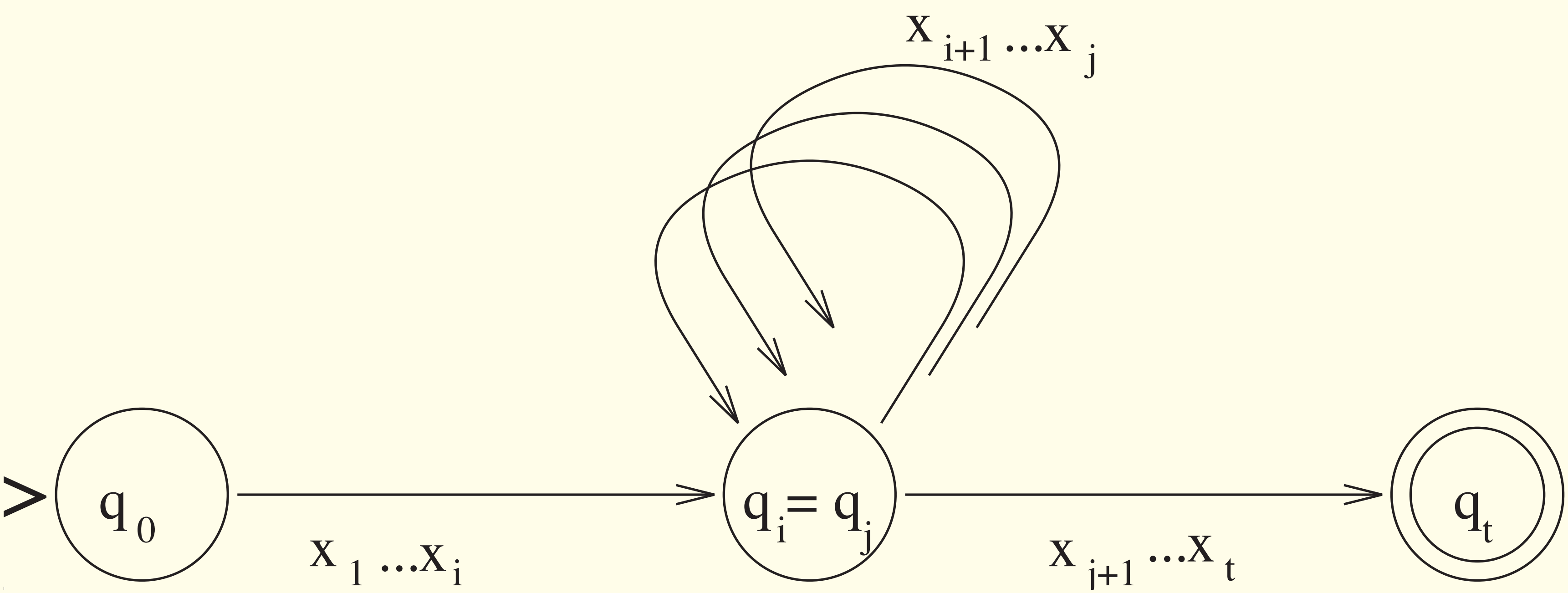
$$q_0 = s_0, \quad q_t \in F, \quad \delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1} \;\; \forall 0 \leq i \leq t-1$$

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

Da $t \geq |K| + 1$, muss es $0 \leq i < j \leq t - 1$ geben mit

- $q_i = q_j$
- $|j - i| \leq |K|$



Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

Wähle nun:

$$\left.\begin{array}{ll} u & x_1 \dots x_i \\ v & x_{i+1} \dots x_j \\ w & x_{j+1} \dots x_t \end{array}\right\} \qquad x = uvw \text{ mit } 1 \leq |v| < n.$$

Damit:

- Für alle $m \geq 0$ gibt es Wege

$$q_0, \dots, q_{i-1}, \underbrace{q_i, \dots, q_j = q_i, \dots, q_j = \ \cdots \ = q_i \dots, q_j}_{m \text{ mal}}, q_{j+1}, \dots, q_t$$

- Also: $uv^m w$ wird von $\mathcal{A}$ akzeptiert.
- Also: $uv^m w \in L$ $\quad\square$

Pumping-Lemma: Stärkere Variante

Theorem (Pumping-Lemma für $\mathbf{L_3}$-Sprachen, stärkere Variante)
Sei $L \in \mathbf{RAT}$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass:

Für alle

$$x \in L \quad \text{mit} \quad |x| \geq n$$

existiert eine Zerlegung

$$x = uvw \qquad u, v, w \in \Sigma^*$$

mit

- $|v| \geq 1$
- $|uv| < n \quad$ (statt $|v| < n$)
- $uv^m w \in L \quad$ für alle $m \in \mathbb{N}$