Grundlagen der Theoretischen Informatik

3. Endliche Automaten (IV)

3.05.2018

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Organisatorisches

- **1. Teilklausur:** Mittwoch, 8.06.2018, D028, 14:30-15:30
  - Anmeldung bis Montag, 4.06.2016, 20:00 Uhr
    über MeToo möglich
  - Bald: Alte Teilklausuren + Musterlösungen auf der Webseite der Übung verfügbar (zum Üben)
  - **Question/Answer Session:** Mittwoch, 6.06.2018
    Do. 7.06.2018 besser ?
  - Wer am 8.06 nicht angemeldet ist, kann an der Teilklausur nicht teilnehmen.
  - Wenn Sie an der Teilklausur nicht teilehmen möchten, melden Sie sich bitte ab.

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Jetzt

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Pumping-Lemma: Formal

Theorem (Pumping-Lemma für $\mathcal{L}_3$-Sprachen)

Sei $L \in \mathbf{RAT}$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass:

Für alle

$$x \in L \quad \text{mit} \quad |x| \geq n$$

existiert eine Zerlegung

$$x = uvw \qquad u, v, w \in \Sigma^*$$

mit

- $|v| \geq 1$
- $|v| < n$
- $uv^m w \in L \quad$ für alle $m \in \mathbb{N}$

Pumping-Lemma: Umkehrung

Korollar.
Wenn für eine Sprache das Pumping-Lemma **nicht** gilt,
dann ist sie **nicht** regulär.

Vorsicht

- Es gibt nicht-reguläre Sprachen, für die das Pumping-Lemma gilt.
  (Beispiel: $L = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 1\} \cup \{b^m c^n \mid m, n \geq 0\}$)

- Daraus, dass das Pumping-Lemma für eine Sprache gilt,
  folgt **nicht**, dass sie regulär ist.

Pumping-Lemma:Anwendung der Umkehrung

Beispiele (letzte Vorlesung)

Folgende Sprachen sind **nicht regulär**:

1. $L_1 := \{a^i b a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

2. $L_2 := \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$

Pumping-Lemma: Beweis

Theorem (Pumping-Lemma für $\mathcal{L}_3$-Sprachen)

Sei $L \in \mathbf{RAT}$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass:

Für alle

$$x \in L \quad \text{mit} \quad |x| \geq n$$

existiert eine Zerlegung

$$x = uvw \qquad u, v, w \in \Sigma^*$$

mit

- $|v| \geq 1$
- $|v| < n$
- $uv^m w \in L \quad$ für alle $m \in \mathbb{N}$

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis. Sei L eine reguläre Sprache.

1. Fall: L ist endlich.

Sei w_{max} das längste Wort in L.

Wir setzen

$$n := |w_{max}| + 1$$

Dann gibt es keine Wörter $x \in L$, für die $|x| \geq n$ gilt.

Also gilt dann das Pumping-Lemma trivialerweise.

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

2. Fall: L ist unendlich.

Sei

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$$

ein endlicher Automat (DEA), der L akzeptiert.

Wir setzen

$$n := |K| + 1$$

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

Wir betrachten ein beliebiges Wort

$$x \;=\; x_1 x_2 \ldots x_t \;\in\; L \quad \text{mit} \quad |x| = t \geq n, \quad x_i \in \Sigma$$

Zu zeigen: x lässt sich aufpumpen.

Seien

$$q_0, q_1, \ldots, q_t \in K,$$

die Zustände, die beim Akzeptieren von x durchlaufen werden:

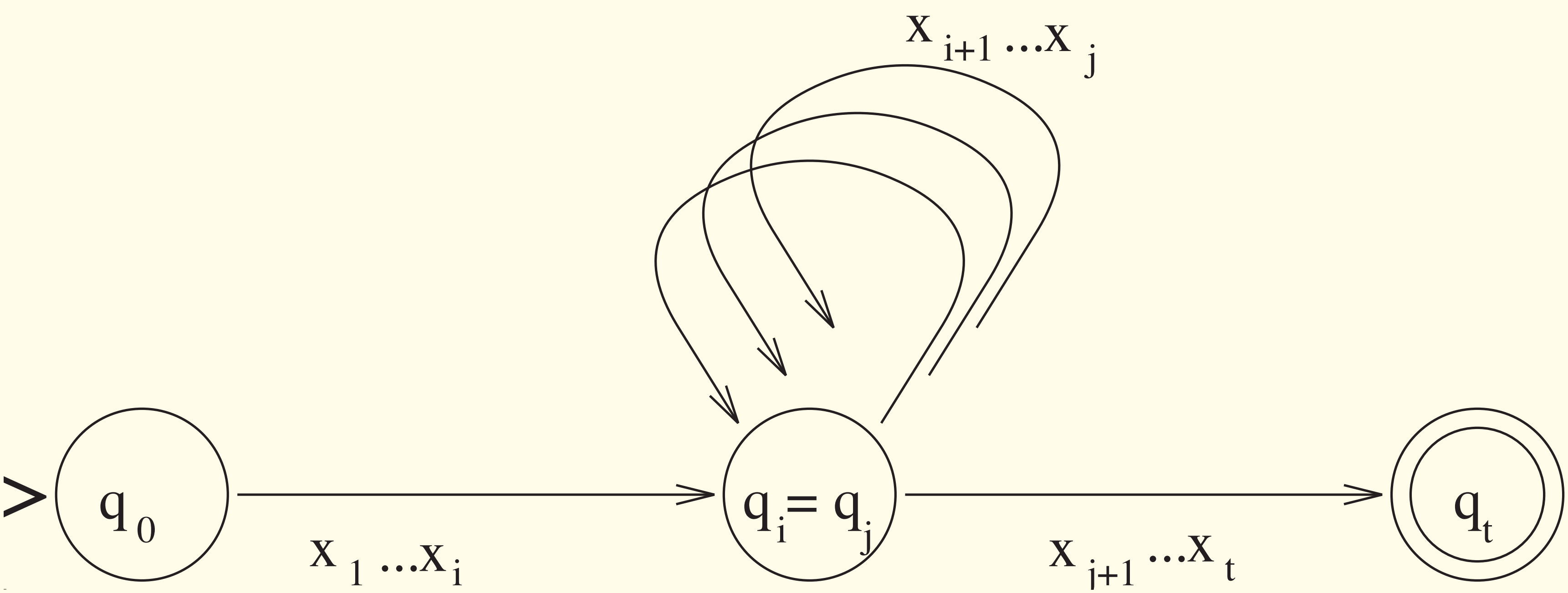
$$q_0 = s_0, \quad q_t \in F, \quad \delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1} \;\; \forall 0 \leq i \leq t-1$$

Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

Da $t \geq |K| + 1$, muss es $0 \leq i < j \leq t - 1$ geben mit

- $q_i = q_j$
- $|j - i| \leq |K|$



Pumping-Lemma: Beweis

Beweis (Fortsetzung)

Wähle nun:

$$\left.\begin{array}{ll} u & x_1 \ldots x_i \\ v & x_{i+1} \ldots x_j \\ w & x_{j+1} \ldots x_t \end{array}\right\} \qquad x = uvw \text{ mit } 1 \leq |v| < n.$$

Damit:

- Für alle $m \geq 0$ gibt es Wege

$$q_0, \ldots, q_{i-1}, \underbrace{q_i, \ldots, q_j = q_i, \ldots, q_j = \cdots = q_i \ldots, q_j}_{m \text{ mal}}, q_{j+1}, \ldots, q_t$$

- Also: $uv^m w$ wird von $\mathcal{A}$ akzeptiert.
- Also: $uv^m w \in L$ $\quad\Box$

Pumping-Lemma: Stärkere Variante

Theorem (Pumping-Lemma für $\mathcal{L}_3$-Sprachen, stärkere Variante)
Sei $L \in \textbf{RAT}$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass:

Für alle

$$x \in L \quad \text{mit} \quad |x| \geq n$$

existiert eine Zerlegung

$$x = uvw \qquad u, v, w \in \Sigma^*$$

mit

- $|v| \geq 1$
- $|uv| < n \quad$ (statt $|v| < n$)
- $uv^m w \in L \quad$ für alle $m \in \mathbb{N}$

Pumping-Lemma: Anwendung der stärkeren Variante

Beispiel (Palindrome)

Die Sprache der Palindrome

$$L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

ist nicht regulär

- Beweis gelingt **nicht** mit der schwächeren Variante des PL
  (die schwächere Version gilt für die Sprache)
- Beweis **gelingt** mit der stärkeren Varianten des PL

Pumping-Lemma: Anwendung der stärkeren Variante

Beispiel (Palindrome)

Die Sprache der Palindrome

$$L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

ist nicht regulär

Annahme: L ist regulär. Dann gilt für L_1 das Pumping-Lemma. Sei n die Zahl aus dem Pumping-Lemma.

Dann muss sich das Wort $a^n bba^n \in L$ aufpumpen lassen (da $|a^n bba^n| \geq n$).

Sei $a^n bba^n = uvw$ eine passende Zerlegung laut Lemma.

Da $|uv| < n$, ist $u = a^i$, $v = a^j$, $w = a^k bba^n$, wobei $j > 0$ und $i + j + k = n$

Aber dann $uv^0 w = a^{i+k} bba^n \notin L$, da $i + k < n$. Widerspruch.

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Abschlusseigenschaften und Wortprobleme

Abschlusseigenschaften

Lemma. Seien zwei reguläre Sprachen L, L' gegeben.

Dann kann man folgende endlichen Automaten konstruieren:

- $\mathcal{A}_\neg$ akzeptiert $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$
- $\mathcal{A}_\cup$ akzeptiert $L \cup L'$
- $\mathcal{A}_\circ$ akzeptiert $L \circ L'$
- $\mathcal{A}_*$ akzeptiert L^*
- $\mathcal{A}_\cap$ akzeptiert $L \cap L'$

Abschlusseigenschaften

Idee:

1) $L = L(\mathcal{A})$ mit $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$

- $\mathcal{A}_\neg = (K, \Sigma, \delta, s_0, K \backslash F)$

2) $L = L(\mathcal{A})$, $L' = L(\mathcal{A}')$ mit $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$, $\mathcal{A}' = (K', \Sigma', \Delta', I', F')$

- $\mathcal{A}_\cup = (K \cup K', \Sigma, \Delta \cup \Delta', I \cup I', F \cup F')$
- $\mathcal{A}_\circ = (K \cup K', \Sigma, \Delta \cup \Delta' \cup (F \times \{\varepsilon\}) \times I', I, F')$
- $\mathcal{A}_* = (K \cup \{s_{neu}\}, \Sigma, \Delta \cup (F \times \{\varepsilon\}) \times I, I \cup \{s_{neu}\}, F \cup \{s_{neu}\})$
- $L \cap L' = \overline{(\overline{L} \cup \overline{L'})}$

Abschlusseigenschaften

Theorem. Wenn L, L' reguäre Sprachen sind, dann sind auch

- $\overline{L}$
- $L \cup L'$
- $L \circ L'$
- L^*
- $L \cap L'$

reguläre Sprachen.

Beweis.

Gemäß Lemma existieren Automaten, die diese Sprachen akzeptieren.

Also sind sie regulär.

Anwendung

Beispiele:

1. $L_{eq} = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ nicht regulär.

Anwendung

Beispiele:

1. $L_{eq} = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ nicht regulär.

Beweis. Annahme: L_{eq} regulär

Da $\{a^m cb^n \mid m, n \geq 0\}$ regulär, wäre dann auch

$L_{eq} \cap \{a^m cb^n \mid m, n \geq 0\}$ regulär.

Aber $L_{eq} \cap \{a^m cb^n \mid m, n \geq 0\} = \{a^i cb^i \mid i \geq 0\}$ nicht regulär.

Anwendung

Beispiele:

2. $L_{neq} = \{w \mid \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$ nicht regulär.

Anwendung

Beispiele:

2. $L_{neq} = \{w \mid \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$ nicht regulär.

Beweis. $L_{eq} = \overline{L}_{neq}$.

Falls L_{neq} regulär wäre, dann wäre auch L_{eq} regulär. Widerspruch.

Anwendung

Beispiele:

3. Die Dycksprache D_k ist nicht regulär

Anwendung

Beispiele:

3. Die Dycksprache D_k ist nicht regulär

Definition

Gegeben:

– $k \in \mathbb{N}$

– $\Sigma_k := \{x_1, \overline{x_1}, x_2 \ldots, x_k, \overline{x_k}\}$ ein Alphabet mit $2k$ Symbolen

Die Dycksprache D_k ist die kleinste Menge, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\epsilon \in D_k$,
2. Falls $w \in D_k$, so auch $x_i w \overline{x_i}$.
3. Falls u, $v \in D_k$, so auch uv.

Interpretiert man die x_i als öffnende und die $\overline{x_i}$ als zugehörige schließende Klammern, so kann man die Dycksprache als die **Menge aller korrekten Klammerausdrücke** sehen.

Anwendung

Beispiele:

3. Die Dycksprache D_k ist nicht regulär

Beweis:

$D_k \cap \{x_i\}^*\{\overline{x_i}\}^* = \{x_i^n\overline{x_i}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- $\{x_i\}^*\{\overline{x_i}\}^*$ ist regulär
- $\{x_i^n\overline{x_i}^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär (Pumping Lemma)

Anwendung

Beispiele:

4. $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$

Beweis. Annahme: L regulär.

Es ist leicht zu sehen, dass $\{a^m bba^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ regulär.

Dann ist auch $\quad L \cap \{a^m bba^n \mid m, n \in \mathbb{N}\} = \{a^n bba^n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad$ regulär

Widerspruch: $\{a^n bba^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär (Pumping Lemma, stärkere Version).

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping-Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Wortprobleme

Lemma. Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat.

Es ist entscheidbar, ob die Sprache $L(\mathcal{A})$

1. leer ist.
2. unendlich ist.

Wortprobleme

Lemma. Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat.

Es ist entscheidbar, ob die Sprache $L(\mathcal{A})$

1. leer ist.
2. unendlich ist.

Korollar

Sei G eine rechtslineare Grammatik.
Es ist entscheidbar, ob die Sprache $L(G)$

1. leer ist.
2. unendlich ist.

Wortprobleme

Beweis.

Zu 1.: $L(\mathcal{A})$ ist nicht leer

$\underline{\text{gdw}}$

Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand.

Wortprobleme

Beweis.

Zu 1.: $L(\mathcal{A})$ ist nicht leer

gdw

Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand.

Zu 2.: $L(\mathcal{A})$ ist unendlich

gdw

Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand, der einen Zyklus enthält.

Beides ist leicht zu überprüfen.

Wortprobleme

Lemma.
Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ endliche Automaten.

Es ist entscheidbar, ob

(1) $L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2) = \emptyset$

(2) $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$

Wortprobleme

Beweis.

Seien $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ endliche Automaten.

(1) Man kann zu $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ einen endlichen Automaten $\mathcal{A}_\cap$ konstruieren mit $L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2) = L(\mathcal{A}_\cap)$.

Die Frage, ob $L(\mathcal{A}_\cap) = \emptyset$ ist entscheidbar.

(2) Man kann zu $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ einen endlichen Automaten $\mathcal{A}_=$ konstruieren mit

$$L(\mathcal{A}_=) \;=\; (L(\mathcal{A}_1) \,\cap\, \overline{L(\mathcal{A}_2)}) \cup (\overline{L(\mathcal{A}_1)} \cap L(\mathcal{A}_2))$$

Es gilt

$$L(\mathcal{A}_=) = \emptyset \quad \underline{\text{gdw}} \quad L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$$

Dies ist entscheidbar.

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping-Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping-Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

Rational = Reguläre Ausdrücke

Hauptsatz von Kleene

Theorem (Hauptsatz von Kleene)
Die durch endliche Automaten akzeptierten Sprachen sind genau die, die man durch reguläre Ausdrücke beschreiben kann.

Reminder: Reguläre Ausdrücke

Definition (Reguläre Ausdrücke)

Menge $\mathfrak{Reg}_\Sigma$ der **regulären Ausdrücke** (über Σ) ist definiert durch:

1. 0 ist ein regulärer Ausdruck
2. Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdruck
3. Sind r und s reguläre Ausdrücke, so auch
   - $(r + s)$ (Vereinigung),
   - (rs) (Konkatenation),
   - (r^*) (Kleene Stern)

Klammern können weggelassen werden, dann

- * hat Vorrang vor Konkatenation
- Konkatenation hat Vorrang vor $+$

Reguläre Ausdrücke

Definition (Semantik regulärer Ausdrücke])
Ein regulärer Ausdruck r stellt eine Sprache $\mathfrak{I}(r)$ über Σ wie folgt dar:

$$\begin{array}{rcll} \mathfrak{I}(0) & := & \emptyset & \\ \mathfrak{I}(a) & := & \{a\} & \text{für } a \in \Sigma \\ \mathfrak{I}(r+s) & := & \mathfrak{I}(r) \cup \mathfrak{I}(s) & \\ \mathfrak{I}(rs) & := & \mathfrak{I}(r)\mathfrak{I}(s) & \\ \mathfrak{I}(r^*) & := & \mathfrak{I}(r)^* & \end{array}$$

Wir benutzen auch das Makro ...

$$1 := 0^*$$

Es gilt: $\mathfrak{I}(1) = \{\varepsilon\}$

Hauptsatz von Kleene

Theorem (Hauptsatz von Kleene)
Die durch endliche Automaten akzeptierten Sprachen sind genau die, die man durch reguläre Ausdrücke beschreiben kann.

Hauptsatz von Kleene

Theorem (Hauptsatz von Kleene)
Die durch endliche Automaten akzeptierten Sprachen sind genau die, die man durch reguläre Ausdrücke beschreiben kann.

Beweis.

„$\Rightarrow$“ (schwierigere Richtung)

Gegeben ein DEA $\mathcal{A}$.

Zustände von $\mathcal{A}$ seien $q_1, \ldots, q_n$.

O.B.d.A. sei q_1 der initiale Zustand von $\mathcal{A}$

Induktion über die **Kompliziertheit** des Akzeptierens

Hauptsatz von Kleene

Beweis.

„$\Rightarrow$“ (schwierigere Richtung)

Gegeben ein DEA $\mathcal{A}$.

Zustände von $\mathcal{A}$ seien $q_1, \ldots, q_n$.

O.B.d.A. sei q_1 der initiale Zustand von $\mathcal{A}$

Induktion über die **Kompliziertheit** des Akzeptierens

Dafür sei genauer:

$$R^k_{i,j} := \{w \in \Sigma^* : \quad \delta^*(q_i, w) = q_j \text{ und für alle Präfixe } u \text{ von } w \text{ mit } \varepsilon \neq u \neq w \text{ gilt } \delta^*(q_i, u) \in \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}\}$$

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis (Forts.)

Offensichtlich ist

$$L(\mathcal{A}) = \bigcup_{q_f \in F} R^n_{1,f}$$

Es genügt zu zeigen:

Alle Mengen $R^n_{1,f}$ sind durch reguläre Ausdrücke beschreibbar.

Dazu: Durch Induktion über k (an der Tafel):

Für alle $1 \leq i, j \leq n$: $R^k_{1,j}$ ist durch einen regulären Ausdruck beschreibb.

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis (Forts.) Dazu: Durch Induktion über k (an der Tafel):

Für alle $1 \leq i, j \leq n$: $\quad R^k_{1,j}$ ist durch einen regulären Ausdruck beschreibb.

Induktionsbasis k = 0

$$R^0_{ij} = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & \text{falls } i \neq j \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\varepsilon\} & \text{falls } i = j \end{cases}$$

Induktionsvoraussetzung $R^k_{ij} \in \mathfrak{Reg}_\Sigma$

Induktionsschritt Zu zeigen: $R^{k+1}_{ij} \in \mathfrak{Reg}_\Sigma$

$$R^{k+1}_{ij} = R^k_{ij} \cup R^k_{i,k+1}(R^k_{k+1,k+1})^* R^k_{k+1,j}$$

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis (Forts.)

„$\Leftarrow$" (einfachere Richtung)

nächste Vorlesung

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Bis jetzt

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP