Grundlagen der Theoretischen Informatik

3. Endliche Automaten (V)

9.05.2018

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Letzte Vorlesung

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping-Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

Jetzt

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping-Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Rational = Reguläre Ausdrücke

Hauptsatz von Kleene

Theorem (Hauptsatz von Kleene)
Die durch endliche Automaten akzeptierten Sprachen sind genau die, die man durch reguläre Ausdrücke beschreiben kann.

Reminder: Reguläre Ausdrücke

Definition (Reguläre Ausdrücke)
Menge $\mathfrak{Reg}_\Sigma$ der **regulären Ausdrücke** (über Σ) ist definiert durch:

1. 0 ist ein regulärer Ausdruck
2. Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdruck
3. Sind r und s reguläre Ausdrücke, so auch
   - $(r + s)$ (Vereinigung),
   - (rs) (Konkatenation),
   - (r^*) (Kleene Stern)

Klammern können weggelassen werden, dann

- * hat Vorrang vor Konkatenation
- Konkatenation hat Vorrang vor $+$

Reguläre Ausdrücke

Definition (Semantik regulärer Ausdrücke])
Ein regulärer Ausdruck r stellt eine Sprache $\mathfrak{I}(r)$ über Σ wie folgt dar:

$$
\begin{array}{rcll}
\mathfrak{I}(0) & := & \emptyset & \\
\mathfrak{I}(a) & := & \{a\} & \text{für } a \in \Sigma \\
\mathfrak{I}(r+s) & := & \mathfrak{I}(r) \cup \mathfrak{I}(s) & \\
\mathfrak{I}(rs) & := & \mathfrak{I}(r)\mathfrak{I}(s) & \\
\mathfrak{I}(r^*) & := & \mathfrak{I}(r)^* &
\end{array}
$$

Wir benutzen auch das Makro ...

$$1 := 0^*$$

Es gilt: $\mathfrak{I}(1) = \{\varepsilon\}$

Hauptsatz von Kleene

Theorem (Hauptsatz von Kleene)
Die durch endliche Automaten akzeptierten Sprachen sind genau die, die man durch reguläre Ausdrücke beschreiben kann.

Hauptsatz von Kleene

Theorem (Hauptsatz von Kleene)
Die durch endliche Automaten akzeptierten Sprachen sind genau die, die man durch reguläre Ausdrücke beschreiben kann.

Beweis.

„$\Rightarrow$“ (schwierigere Richtung)

Gegeben ein DEA $\mathcal{A}$.

Zustände von $\mathcal{A}$ seien $q_1, \ldots, q_n$.

O.B.d.A. sei q_1 der initiale Zustand von $\mathcal{A}$

Induktion über die **Kompliziertheit** des Akzeptierens

Hauptsatz von Kleene

Beweis.

„$\Rightarrow$“ (schwierigere Richtung)

Gegeben ein DEA $\mathcal{A}$.

Zustände von $\mathcal{A}$ seien $q_1, \ldots, q_n$.

O.B.d.A. sei q_1 der initiale Zustand von $\mathcal{A}$

Induktion über die **Kompliziertheit** des Akzeptierens

Dafür sei genauer:

$$R^k_{i,j} := \{w \in \Sigma^* : \quad \delta^*(q_i, w) = q_j \text{ und für alle Präfixe } u \text{ von } w \\ \text{mit } \varepsilon \neq u \neq w \text{ gilt } \delta^*(q_i, u) \in \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}\,\}$$

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis (Forts.)

Offensichtlich ist

$$L(\mathcal{A}) = \bigcup_{q_f \in F} R^n_{1,f}$$

Es genügt zu zeigen:

Alle Mengen $R^n_{1,f}$ sind durch reguläre Ausdrücke beschreibbar.

Dazu: Durch Induktion über k (an der Tafel):

Für alle $1 \leq i, j \leq n$: $R^k_{1,j}$ ist durch einen regulären Ausdruck beschreibb.

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis (Forts.) Dazu: Durch Induktion über k (an der Tafel):

Für alle $1 \leq i, j \leq n$: $R^k_{1,j}$ ist durch einen regulären Ausdruck beschreibb.

Induktionsbasis k = 0

$$R^0_{ij} = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & \text{falls } i \neq j \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\varepsilon\} & \text{falls } i = j \end{cases}$$

Induktionsvoraussetzung $R^k_{ij} \in \mathfrak{Reg}_\Sigma$

Induktionsschritt Zu zeigen: $R^{k+1}_{ij} \in \mathfrak{Reg}_\Sigma$

$$R^{k+1}_{ij} = R^k_{ij} \cup R^k_{i,k+1}(R^k_{k+1,k+1})^* R^k_{k+1,j}$$

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis (Forts.)

„$\Leftarrow$“ (einfachere Richtung)

Durch **Induktion** über den **Aufbau** regulärer Ausdrücke:

Zu jedem regulären Ausdruck gibt es einen äquivalenten ε-NDEA

(an der Tafel)

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

Bis jetzt

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP