# Grundlagen der Theoretischen Informatik

**Sommersemester 2018**

18.04.2018

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

# Organisatorisches

1. Teilklausur: Freitag, 8.06.2018, 14:30-15:30

# Bis jetzt

1. Terminologie
2. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
3. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
4. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
5. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
6. Komplexitätsklassen P und NP

# Bis jetzt

- **Alphabete, Wörter**
  - Operationen auf Wörtern

    Konkatenation, $i$-te Potenz, Reverse
- **Sprache**
  - Operationen auf Sprachen

    Konkatenation, $i$-te Potenz, Reverse, Kleene-Hülle
- **Reguläre Ausdrücke**

  Reguläre Ausdrücke als Suchmuster für `grep`

# Grammatik

- Beschreibt eine Sprache
- Menge von Regeln, mit deren Hilfe man Wörter ableiten kann

# Grammatik

**Definition** (Grammatik)

Eine Grammatik $G$ über einem Alphabet $\Sigma$ ist ein Tupel

$$G = (V, T, R, S)$$

Dabei ist

- $V$ eine endliche Menge von **Variablen**
- $T \subseteq \Sigma$ eine endliche Menge von **Terminalen** mit $V \cap T = \emptyset$
- $R$ eine endliche Menge von **Regeln**
- $S \in V$ das **Startsymbol**

# Grammatik

**Definition** (Regel)

Eine Regel ist ein Element

$$(P, Q) \in \left((V \cup T)^* \; V \; (V \cup T)^*\right) \times (V \cup T)^*$$

Das heißt:

- $P$ und $Q$ sind Wörter über $(V \cup T)$
- $P$ muss mindestens eine Variable enthalten
- $Q$ ist beliebig

Bezeichnung:

$P$: Prämisse

$Q$: Conclusio

# Grammatik

## Schreibweise für Regeln

- Schreibweise für Regel $(P, Q)$:

$$P \to_G Q \qquad \text{bzw.} \qquad P \to Q$$

- Abkürzung für mehrere Regeln mit derselben Prämisse:

$$P \to Q_1 \mid Q_2 \mid Q_3 \qquad \text{für} \qquad P \to Q_1,\ P \to Q_2,\ P \to Q_3$$

## Konvention (meistens)

- **Variablen** als Großbuchstaben
- **Terminale** als Kleinbuchstaben

# Rechnung einer Grammatik

## Algorithmus

**Eingabe:** Eine Grammatik

1. $aktuellWort := S$ (Startsymbol)
2. Wähle eine Regel $P \to Q$, so dass $P$ in *aktuellWort* vorkommt
3. Ersetze (ein) Vorkommen von $P$ in *aktuellWort* durch $Q$
4. Falls *aktuellWort* noch Variablen enthält (nicht terminal), GOTO 2

# Rechnung einer Grammatik

## Algorithmus

**Eingabe:** Eine Grammatik

1. *aktuellWort* $:= S$ (Startsymbol)
2. Wähle eine Regel $P \to Q$, so dass $P$ in *aktuellWort* vorkommt
3. Ersetze (ein) Vorkommen von $P$ in *aktuellWort* durch $Q$
4. Falls *aktuellWort* noch Variablen enthält (nicht terminal), GOTO 2

**Ausgabe:** Das terminale Wort *aktuellWort*

Beachte: Die Berechnung

- ist nicht deterministisch (Auswahl der Regel)
- kann mehr als ein Ergebnis liefern (oder auch keines)
- kann in Endlosschleifen geraten

# Beispiel

Grammatik $G_{ab} = (\{S\}, \{a, b\}, \{R_1, R_2\}, S)$

$$R_1 \quad = \quad S \to aSb$$
$$R_2 \quad = \quad S \to \epsilon$$

Mögliche Ableitung:

$S \Rightarrow_{R_1} aSb \Rightarrow_{R_1} aaSbb \Rightarrow_{R_1} aaaSbbb \Rightarrow_{R_2} aaabbb$

# Rechnung einer Grammatik

Gegeben:

- Grammatik $G = (V, T, R, S)$
- Wörter $w, w'$ aus $(V \cup T)^*$

$$w \Longrightarrow_G^* w'$$

falls es Wörter $w_0, \ldots, w_n \in (V \cup T)^*$ $(n \geq 0)$ gibt mit

- $w = w_0$
- $w_n = w'$
- $w_i \Longrightarrow_G w_{i+1}$ für $0 \leq i < n$

Merke: $w \Longrightarrow_G^* w$ gilt stets $(n = 0)$

Die Folge $w_0, \ldots, w_n$ heißt Ableitung oder Rechnung

– von $w_0$ nach $w_n$
– in $G$
– der Länge $n$

# Vorsicht: Indeterminismus

## Beispiel

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, B\}, \{a, b, c\}, \{R_0, R_1, R_2, R_3\}, S)$

$$
\begin{aligned}
R_0 &= \quad S \to aBBc \\
R_1 &= \quad B \to b \\
R_2 &= \quad B \to ba \\
R_3 &= \quad BB \to bBa
\end{aligned}
$$

# Vorsicht: Indeterminismus

## Beispiel

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, B\}, \{a, b, c\}, \{R_0, R_1, R_2, R_3\}, S)$

$$\begin{aligned} R_0 &= \quad S \to aBBc \\ R_1 &= \quad B \to b \\ R_2 &= \quad B \to ba \\ R_3 &= \quad BB \to bBa \end{aligned}$$

Drei Möglichkeiten, das Wort *abbac* zu erzeugen:

$$\begin{aligned} S &\Longrightarrow_{R_0} aBBc \Longrightarrow_{R_1} abBc \Longrightarrow_{R_2} abbac \\ S &\Longrightarrow_{R_0} aBBc \Longrightarrow_{R_2} aBbac \Longrightarrow_{R_1} abbac \\ S &\Longrightarrow_{R_0} aBBc \Longrightarrow_{R_3} abBac \Longrightarrow_{R_1} abbac \end{aligned}$$

# Vorsicht: Indeterminismus

**Warum ist das ein Feature und kein Bug?**

- Erlaubt einfachere Definition von Grammatiken
- Für manche Sprachen gibt es keine eindeutigen Grammatiken
- Eine Grammatik beschreibt die Struktur der Wörter.
  Ein Wort kann mehrere mögliche Strukturen haben.
- Für natürliche Sprachen braucht man das unbedingt:

  Manche Sätze sind mehrdeutig (in ihrer Grammatik),
  also müssen auch die Grammatiken mehrdeutig sein!

# Vorsicht: Indeterminismus

**Beispiel:** Mehrdeutige Grammatik natürlichsprachlicher Sätze

> Time flies like an arrow.
>
> Fruit flies like a banana.

# Vorsicht: Indeterminismus

**Beispiel:** Mehrdeutige Grammatik natürlichsprachlicher Sätze

> Time flies like an arrow.
>
> Fruit flies like a banana.

- Beide Sätze haben zwei mögliche grammatische Strukturen.
- Erst unser semantisches Verständnis wählt eine aus.

# Erzeugte Sprache, Äquivalenz

**Definition** (Erzeugte Sprache)

Gegeben: Eine Grammatik $G$

Die von $G$ erzeugte Sprache $L(G)$ ist die Menge aller **terminalen** Wörter, die durch $G$ vom Startsymbol $S$ aus erzeugt werden können:

$$L(G) \quad := \quad \{w \in T^* \mid S \Longrightarrow_G^* w\}$$

# Erzeugte Sprache, Äquivalenz

**Definition** (Erzeugte Sprache)

Gegeben: Eine Grammatik $G$

Die von $G$ erzeugte Sprache $L(G)$ ist die Menge aller **terminalen** Wörter, die durch $G$ vom Startsymbol $S$ aus erzeugt werden können:

$$L(G) \quad := \quad \{w \in T^* \mid S \Longrightarrow_G^* w\}$$

**Definition** (Äquivalenz)

Zwei Grammatiken $G_1, G_2$ heißen **äquivalent** gdw

$$L(G_1) = L(G_2)$$

# Beispiel

Grammatik $G_{ab} = (\{S\}, \{a, b\}, \{R_1, R_2\}, S)$

$$R_1 = S \to aSb$$
$$R_2 = S \to \epsilon$$

Mögliche Ableitung:

$S \Rightarrow_{R_1} aSb \Rightarrow_{R_1} aaSbb \Rightarrow_{R_1} aaaSbbb \Rightarrow_{R_2} aaabbb$

Also: $a^3 b^3 \in L(G_{ab})$

$L(G_{ab}) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

# Beispiel

Grammatik $G_{ab} = (\{S\}, \{a, b\}, \{R_1, R_2\}, S)$

$$R_1 = S \to aSb$$
$$R_2 = S \to \epsilon$$

$L(G_{ab}) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

**Beweis:**

Dass $G_{ab}$ tatsächlich genau diese Sprache erzeugt, zeigen wir allgemein, indem wir alle möglichen Ableitungen von $G_{ab}$ betrachten.

- $\subseteq$ Zu zeigen: Jedes terminale Wort, das von $G_{ab}$ erzeugt wird, hat die Form $a^n b^n$. Induktion über die Länge der Ableitung
- $\supseteq$ Zu zeigen: Für alle $n$ kann $a^n b^n$ von $G_{ab}$ erzeugt werden.

# Beweis

$\subseteq$: zu zeigen: Jedes terminale Wort, das von $G_{ab}$ erzeugt wird, hat die Form $a^n b^n$.

Wir zeigen für alle $w \in (V \cup T)^*$: Falls $S \Longrightarrow_{G_{ab}}^* w$, dann gilt entweder $w = a^n S b^n$ oder $w = a^n b^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Dazu verwenden wir eine **Induktion über die Länge einer Ableitung** von $S$ nach $w$.

# Beweis

$\subseteq$: zu zeigen: Jedes terminale Wort, das von $G_{ab}$ erzeugt wird, hat die Form $a^n b^n$.

Wir zeigen für alle $w \in (V \cup T)^*$: Falls $S \Longrightarrow^*_{G_{ab}} w$, dann gilt entweder $w = a^n S b^n$ oder $w = a^n b^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Dazu verwenden wir eine **Induktion über die Länge einer Ableitung** von $S$ nach $w$.

**Induktionsanfang:** $w = S = a^0 S b^0$

# Beweis

$\subseteq$: zu zeigen: Jedes terminale Wort, das von $G_{ab}$ erzeugt wird, hat die Form $a^n b^n$.

Wir zeigen für alle $w \in (V \cup T)^*$: Falls $S \Longrightarrow^*_{G_{ab}} w$, dann gilt entweder $w = a^n S b^n$ oder $w = a^n b^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Dazu verwenden wir eine **Induktion über die Länge einer Ableitung** von $S$ nach $w$.

**Induktionsanfang:** $w = S = a^0 S b^0$

**Induktionsschritt:** Es gelte $S \Longrightarrow^*_{G_{ab}} w \Longrightarrow_{G_{ab}} w'$, und für $w$ gelte nach der Induktionsvoraussetzung bereits $w = a^n b^n$ oder $w = a^n S b^n$. Außerdem sei $w \Longrightarrow_{G_{ab}} w'$ eine Ableitung in einem Schritt. Nun ist zu zeigen: $w' = a^m b^m$ oder $w' = a^m S b^m$ für irgendein $m$.

# Beweis

**Fall 1:** $w = a^n b^n$**.** Dann konnte keine Regel angewandt werden, da $w$ schon terminal ist, also tritt dieser Fall nie auf.

**Fall 2:** $w = a^n S b^n$**.** Dann wurde von $w$ nach $w'$ entweder Regel $R_1$ oder $R_2$ angewandt.

Falls $R_1$ angewandt wurde, dann gilt $w = a^n S b^n \Longrightarrow_{R_1} a^n a S b b^n = a^{n+1} S b^{n+1} = w'$.

Falls $R_2$ angewandt wurde, dann gilt $w = a^n S b^n \Longrightarrow_{R_2} a^n \varepsilon b^n = w'$. Dies Wort ist terminal und hat die geforderte Form $a^n b^n$.

# Beweis Forts.

$\supseteq$: zu zeigen: Für alle $n$ kann $a^n b^n$ von $G_{ab}$ erzeugt werden: $S \Longrightarrow^*_{G_{ab}} a^n b^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Um $a^n b^n$ zu erzeugen, wende man auf $S$ $n$-mal die Regel $R_1$ und dann einmal die Regel $R_2$ an. $\square$

# Beispiel: Dycksprache

**Definition** (Dycksprache)

Gegeben:

- $k \in \mathbb{N}$
- $\Sigma_k := \{x_1, \overline{x_1}, x_2 \ldots, x_k, \overline{x_k}\}$ ein Alphabet mit $2k$ Symbolen

# Beispiel: Dycksprache

**Definition** (Dycksprache)

Gegeben:
- $k \in \mathbb{N}$
- $\Sigma_k := \{x_1, \overline{x_1}, x_2 \ldots, x_k, \overline{x_k}\}$ ein Alphabet mit $2k$ Symbolen

Die Dycksprache $D_k$ ist die kleinste Menge, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\epsilon \in D_k$,
2. Falls $w \in D_k$, so auch $x_i w \overline{x_i}$.
3. Falls $u, v \in D_k$, so auch $uv$.

# Beispiel: Dycksprache

**Definition** (Dycksprache)

Gegeben:
- $k \in \mathbb{N}$
- $\Sigma_k := \{x_1, \overline{x_1}, x_2 \ldots, x_k, \overline{x_k}\}$ ein Alphabet mit $2k$ Symbolen

Die Dycksprache $D_k$ ist die kleinste Menge, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\epsilon \in D_k$,
2. Falls $w \in D_k$, so auch $x_i w \overline{x_i}$.
3. Falls $u$, $v \in D_k$, so auch $uv$.

Interpretiert man die $x_i$ als öffnende, die $\overline{x_i}$ als zugehörige schließende Klammern, so kann man die Dycksprache als die **Menge aller korrekten Klammerausdrücke** sehen.

# Beispiel: Dycksprache

$k = 2$

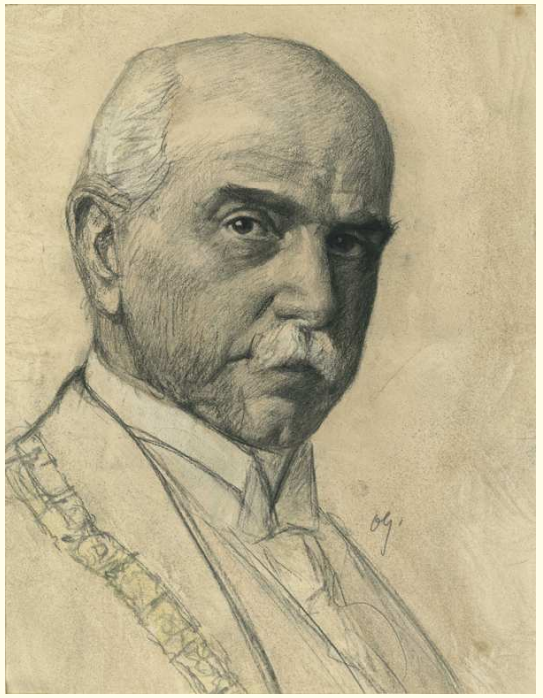
$\Sigma_2 := \{\ [, ], (, )\ \}$

- $[[()[]]()] \in D_2$
- $([)] \notin D_2$
- $)) \notin D_2$

# Beispiel: Dycksprache

Walther von Dyck (1856-1934)

- Mathematiker
  (Gruppentheorie, Funktionstheorie)
- Herausgeber der Werke von Johannes Kepler
- Hochschulpolitiker
- Erster Rektor der TU München
- Einer der Gründungsväter des Deutschen Museums



*[Foto: Deutsches Museum]*

# Beispiel: Dycksprache

**Definition** (Dycksprache)

Gegeben:

– $k \in \mathbb{N}$, $\Sigma_k := \{x_1, \overline{x_1}, x_2 \ldots, x_k, \overline{x_k}\}$ ein Alphabet mit $2k$ Symbolen

Die Dycksprache $D_k$ ist die kleinste Menge, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\epsilon \in D_k$,
2. Falls $w \in D_k$, so auch $x_i w \overline{x_i}$.
3. Falls $u,\ v\ \in D_k$, so auch $uv$.

Grammatik $G = (\{S\}, \{x_1, \overline{x_1}, x_2 \ldots, x_k, \overline{x_k}\}, R, S)$ mit $L(G) = D_k$

$R_1$ : $S \to \varepsilon$

$R_2$ : $S \to x_1 S \overline{x_1} \mid \ldots \mid x_k S \overline{x_k}$

$R_3$ : $S \to SS$

# Beispiel: Dycksprache

Um zu zeigen, dass $L(G) = D_k$, zeigen wir, dass $L(G)$ die kleinste Menge ist, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\epsilon \in L(G)$,
2. Falls $w \in L(G)$, so auch $x_i w \overline{x_i}$.
3. Falls $u$, $v \in L(G)$, so auch $uv$.

Beweis: an der Tafel.

# Bis jetzt

- Reguläre Ausdrücke.
- Grammatik.
- Ableitung.
- die von einer Grammatik erzeugte Sprache.

# Warum Sprachen?

## Darstellung von Problemen

**Fakt:** So ziemlich alle Probleme können als Probleme über Sprachen formuliert werden.

# Warum Sprachen?

## Darstellung von Problemen

**Fakt:** So ziemlich alle Probleme können als Probleme über Sprachen formuliert werden.

**Beispiel:** Primzahlen

**Alphabet** $\Sigma_{\text{num}} := \{|\}$

**Sprache** $L_{\text{primes}} := \{\underbrace{||\ldots|}_{p \text{ mal}} \mid p \text{ prim}\}$

# Darstellung von Problemen

## Eingabealphabet

$$\Sigma = \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

erlaubt Darstellung einer Ganzzahl zur Basis $n$

# Darstellung von Problemen

## Eingabealphabet

$$\Sigma = \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

erlaubt Darstellung einer Ganzzahl zur Basis $n$

**Beispiel:**

**5 binär:** 101

**5 unär:** ||||| (oder auch 11111)

# Darstellung von Problemen

## Speicheraufwand

**$n$-äre Darstellung** ($n > 1$) einer Zahl $k$ führt zu einer Speicherersparnis:

$$\log_n k \quad (n\text{-är}) \qquad \text{statt} \qquad k \quad (\text{unär})$$

Nur der Schritt von unär auf binär ist wesentlich, denn

$$\log_n k \;=\; \frac{1}{\log_2 n} \cdot \log_2 k = c \cdot \log_2 k$$

(von binär auf $n$-är nur lineare Einsparung)

# Darstellung von Problemen

- Darstellung des Erfüllbarkeitsproblems SAT
- Darstellung des Erreichbarkeitsproblems in Graphen

# Darstellung des Erfüllbarkeitsproblems SAT

**Problem SAT**

**Gegeben:** Eine aussagenlogische Formel $w$

**Frage:** Gibt es eine Belegung der booleschen Variablen in $w$, so dass $w$ zu *true* auswertet?

# Darstellung des Erfüllbarkeitsproblems SAT

**Problem SAT**

**Gegeben:** Eine aussagenlogische Formel $w$

**Frage:** Gibt es eine Belegung der booleschen Variablen in $w$, so dass $w$ zu *true* auswertet?

Signatur für aussagenlogische Formeln

**Signatur:** $\Sigma_{\text{sat}} := \{\wedge, \vee, \neg, (, ), x, 0, 1\}$

Dabei Darstellung von boolscher Variablen $x_i$ als $x$ gefolgt von $i$ binär kodiert.
Dadurch Formel der Länge $n$ um (unerheblichen) Faktor $\log n$ länger.

# Darstellung des Erfüllbarkeitsproblems SAT

## Satisfiability

Sprache

$$L_{\text{sat}} := \{w \in \Sigma^*_{sat} : \quad w \text{ ist eine aussagenlogische Formel,}$$
$$\text{und es gibt eine Belegung für die } x_i,$$
$$\text{so dass die Formel } w \text{ zu } \textit{true} \text{ auswertet } \}$$

# Darstellung des Erreichbarkeitsproblems in Graphen

**Erreichbarkeitsproblem**

**Gegeben:** Ein Graph mit Ecken $v_1$ bis $v_n$

**Frage:** Gibt es einen Weg von Ecke $v_1$ zu Ecke $v_n$?

## Signatur für Graphen

**Signatur:** $\Sigma_{\text{graph}} := \{v, e, 0, 1, (, ), \#\}$

Darstellung von

**Ecke** $v_i$ als $v$ gefolgt $i$ binär kodiert

**Kante** $e_{i,j}$ als $e(string_1 \# string_2)$, wobei

- $string_1$ die binäre Darstellung von $i$,
- $string_2$ die binäre Darstellung von $j$

# Darstellung des Erreichbarkeitsproblems in Graphen

**Erreichbarkeitsproblem**

Sprache

$$L_{\text{reach}} := \{w \in \Sigma^*_{\text{graph}} : \quad \text{es gibt einen Weg in } w \text{ von der ersten Ecke } v_1 \text{ zur letzten Ecke } v_n\}$$