

# Grundlagen der Theoretischen Informatik

**Sommersemester 2018**

25.04.2018

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: [sofronie@uni-koblenz.de](mailto:sofronie@uni-koblenz.de)

# Bis jetzt

---

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

# Bis jetzt

---

- **Alphabete, Wörter**
  - Operationen auf Wörtern  
Konkatenation,  $i$ -te Potenz, Reverse
- **Sprache**
  - Operationen auf Sprachen  
Konkatenation,  $i$ -te Potenz, Reverse, Kleene-Hülle
- **Reguläre Ausdrücke**
- **Grammatiken**
  - Ableitung
  - Die von einer Grammatik erzeugte Sprache.
- **Die Chomsky-Hierarchie**

# Grammatik

---

**Definition.** Eine **Grammatik**  $G$  über einem Alphabet  $\Sigma$  ist ein Tupel  $G = (V, T, R, S)$ .  
Dabei ist

- $V$  eine endliche Menge von **Variablen**
- $T \subseteq \Sigma$  eine endliche Menge von **Terminalen** mit  $V \cap T = \emptyset$
- $R$  eine endliche Menge von **Regeln**
- $S \in V$  das **Startsymbol**

**Konvention (meistens):** **Variablen** als Großbuchstaben; **Terminale** als Kleinbuchstaben.

Eine **Regel** ist ein Element  $(P, Q) \in ((V \cup T)^* V (V \cup T)^*) \times (V \cup T)^*$ .

- $P$  und  $Q$  sind Wörter über  $(V \cup T)$
- $P$  muss mindestens eine Variable enthalten
- $Q$  ist beliebig

Schreibweise:  $P \rightarrow_G Q, P \rightarrow Q$

( $P$ : Prämisse,  $Q$ : Conclusio )

# Erzeugte Sprache, Äquivalenz

---

## Ableitung, Rechnung.

- $w \Longrightarrow_G w'$  („ $w$  geht über in  $w'$ “) falls

$$\exists u, v \in (V \cup T)^* \exists P \rightarrow Q \in R \quad (w = uPv \text{ und } w' = uQv)$$

- $w \Longrightarrow_G^* w'$  falls es Wörter  $w_0, \dots, w_n \in (V \cup T)^*$  ( $n \geq 0$ ) gibt mit
  - $w = w_0$
  - $w_n = w'$
  - $w_i \Longrightarrow_G w_{i+1}$  für  $0 \leq i < n$

**Definition** (Erzeugte Sprache) Gegeben: Eine Grammatik  $G$

Die von  $G$  erzeugte Sprache  $L(G)$  ist die Menge aller **terminalen** Wörter, die durch  $G$  vom Startsymbol  $S$  aus erzeugt werden können:

$$L(G) := \{w \in T^* \mid S \Longrightarrow_G^* w\}$$

**Definition** Zwei Grammatiken  $G_1, G_2$  heißen **äquivalent** gdw  $L(G_1) = L(G_2)$  .

# Die Chomsky-Hierarchie

---

**Definition** Eine Grammatik  $G = (V, T, R, S)$  heißt **rechtslinear** gdw

$$\forall (P \rightarrow Q) \in R \quad (P \in V \text{ und } Q \in T^* \cup T^+V)$$

Das heißt, bei jeder Regelanwendung:

- Links eine **einzelne Variable**; Rechts **höchstens eine Variable**
- Wenn rechts eine Variable steht, steht sie **ganz rechts im Wort** und das Wort enthält **mindestens ein Terminalsymbol**

**Definition** Eine Grammatik  $G = (V, T, R, S)$  heißt **kontextfrei** gdw

$$\forall (P \rightarrow Q) \in R \quad (P \in V \text{ und } Q \in (V \cup T)^*)$$

Das heißt, bei jeder Regelanwendung:

- Links eine **einzelne Variable**; Rechts steht etwas beliebiges
- Die Prämisse macht keine Aussage, was der Kontext dieser Variablen ist („kontextfrei“)

# Die Chomsky-Hierarchie

**Definition** Eine Grammatik  $G = (V, T, R, S)$  heißt **kontextsensitiv** gdw  $\forall (P \rightarrow Q) \in R$ :

1.  $\exists u, v, \alpha \in (V \cup T)^* \exists A \in V (P = uAv \text{ und } Q = u\alpha v \text{ mit } |\alpha| \geq 1)$ , **oder** die Regel hat die Form  $S \rightarrow \varepsilon$
2.  $S$  nicht in  $Q$

Das heißt, bei jeder Regelanwendung:

- Eine Variable  $A$  wird in einen String  $\alpha$  mit  $|\alpha| \geq 1$  überführt; die Ersetzung von  $A$  durch  $\alpha$  findet nur statt, wenn der in der Regel geforderte **Kontext** ( $u$  und  $v$ ) **vorhanden ist**
- **Das Wort wird nicht kürzer, außer bei  $\varepsilon \in L$**

**Definition** Eine Grammatik  $G = (V, T, R, S)$  heißt **beschränkt** gdw  $\forall (P \rightarrow Q) \in R$ :

1.  $|P| \leq |Q|$ , **oder** die Regel hat die Form  $S \rightarrow \varepsilon$
2.  $S$  nicht in  $Q$

Das heißt, bei jeder Regelanwendung:

- Die Conclusio ist mindestens so lang wie die Prämisse, außer bei  $\varepsilon \in L$ .
- **Das Wort wird nicht kürzer, außer bei  $\varepsilon \in L$**

# Die Chomsky-Hierarchie

---

Aufbauend auf den Grammatikarten kann man Sprachklassen definieren.

**Definition** (Sprachklassen)

Klasse	definiert als	Sprache heißt
$\mathcal{L}_3$ , REG	$\{L(G) \mid G \text{ ist rechtslinear}\}$	Typ 3, <b>regulär</b>
$\mathcal{L}_2$ , CFL	$\{L(G) \mid G \text{ ist kontextfrei}\}$	Typ 2, <b>kontextfrei</b>
$\mathcal{L}_1$ , CSL	$\{L(G) \mid G \text{ ist kontextsensitiv}\}$	Typ 1, <b>kontextsensitiv</b>
$\mathcal{L}_1$ , CSL	$\{L(G) \mid G \text{ ist beschränkt}\}$	Typ 1, <b>beschränkt</b>
$\mathcal{L}_0$ , r.e.	$\{L(G) \mid G \text{ beliebig}\}$	Typ 0, <b>aufzählbar</b>
$\mathcal{L}$	$\{L \mid L \subseteq \Sigma^*\}$	<b>beliebige</b> Sprache



# Abzählbarkeit

---

## **Definition** (Abzählbarkeit)

Eine Menge  $M$  heißt **abzählbar**, wenn

- es eine **surjektive** Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow M$  gibt,
- oder  $M$  leer ist.

**Lemma.** Eine Menge  $M$  ist abzählbar, wenn es eine **injektive** Funktion

$$f : M \rightarrow \mathbb{N}$$

gibt.

# Beispiele

---

## Abzählbar sind:

- $\mathbb{N}$
- $\mathbb{Q}$
- alle endlichen Mengen
- die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen

Falls  $\Sigma_1, \Sigma_2$  abzählbar, so ist  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  abzählbar

- die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen

Falls  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$  abzählbar, so ist  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$  abzählbar

Falls  $\Sigma$  abzählbar, so ist  $\Sigma^i$  abzählbar für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

# Diagonalisierungsargument für Überabzählbarkeit

---

**Theorem.** Die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen ist überabzählbar.

**Beweis.** Wir zeigen, dass schon das Intervall  $[0, 1]$  überabzählbar ist.

Annahme: Es gibt eine Aufzählung, also eine surjektive Funktion

$$f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$$

Dann sei

$$f(i) = 0, d_0^i d_1^i d_2^i \dots$$

die Dezimaldarstellung der  $i$ -ten reellen Zahl.

# Diagonalisierungsargument für Überabzählbarkeit

---

Beweis. Fortsetzung:

Wir definieren eine neue Zahl  $d = 0, \bar{d}_0 \bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots$  durch

$$\bar{d}_n = \begin{cases} d_n^n + 1 & \text{falls } d_n^n < 9 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$d$  unterscheidet sich in der  $n$ -ten Stelle von  $d_n$ .

Also  $d \neq d_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$

Also kommt  $d$  in der Aufzählung nicht vor. Widerspruch!

# Wieviele gibt es?

---

## Wieviele

- Grammatiken
  - Sprachen
  - Algorithmen
- gibt es überhaupt?

# Wieviele gibt es?

---

## Wieviele

- Grammatiken
  - Sprachen
  - Algorithmen
- gibt es überhaupt?

## Mögliche Antworten:

- Endlich viele
- Unendlich viele
- Abzählbar viele
- Überabzählbar viele
- Nicht klar für Algorithmen, da dieser Begriff nicht genau definiert wurde

# Wieviele Wörter, Grammatiken gibt es?

---

**Lemma.** Gegeben: Alphabet  $\Sigma$ , endlich oder abzählbar unendlich  
Dann ist  $\Sigma^*$  abzählbar unendlich.

# Wieviele Wörter, Grammatiken gibt es?

---

**Lemma.** Gegeben: Alphabet  $\Sigma$ , endlich oder abzählbar unendlich  
Dann ist  $\Sigma^*$  abzählbar unendlich.

Beweis.

$\Sigma$  ist abzählbar, also ist  $\Sigma^i$  abzählbar für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

$\Sigma^*$  ist die Vereinigung der abzählbar vielen abzählbaren Mengen  $\Sigma^i$ .



# Wieviele Wörter, Grammatiken gibt es?

---

**Lemma.** Gegeben: Alphabet  $\Sigma$ , endlich oder abzählbar unendlich  
Dann ist die Menge aller Grammatiken über  $\Sigma$  abzählbar unendlich

# Wieviele Wörter, Grammatiken gibt es?

---

**Lemma.** Gegeben: Alphabet  $\Sigma$ , endlich oder abzählbar unendlich  
Dann ist die Menge aller Grammatiken über  $\Sigma$  abzählbar unendlich

Beweis.

Grammatiken sind endlich und somit als Wörter über einem geeigneten erweiterten Alphabet

$$\Sigma \cup V \cup \{\rightarrow, \dots\}$$

darstellbar.

Die Menge der Wörter über diesen erweiterten Alphabet ist abzählbar.

# Wieviele Algorithmen gibt es?

---

**Lemma.** Es gibt (nur) abzählbar viele Algorithmen.

# Wieviele Algorithmen gibt es?

---

**Lemma.** Es gibt (nur) abzählbar viele Algorithmen.

Beweis.

Algorithmen müssen **per Definition** eine endliche Beschreibung haben.

Sie sind also als Wörter über einem Alphabet  $\Sigma$  darstellbar (für jedes abzählbare  $\Sigma$ ).

Also sind sie abzählbar.

# Wieviele Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt es?

---

**Lemma.** Es gibt überabzählbar viele Funktionen  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

# Wieviele Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt es?

---

**Lemma.** Es gibt überabzählbar viele Funktionen  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

Beweis.

Angenommen, es existiere eine Abzählung

$$f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

Dann sei

$$C : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad C(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f_n(n) = 0; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$C(i) \neq f_i(i)$$

Also:  $C$  ist von allen  $f_i$  verschieden. **Widerspruch!**

# Wieviele Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ gibt es?

---

**Lemma.** Es gibt überabzählbar viele Funktionen  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ .

Beweis. Analog.

# Wieviele Sprachen gibt es?

---

**Lemma.** Gegeben: Alphabet  $\Sigma$  (endlich oder unendlich).

Die Menge der Sprachen über  $\Sigma$  ist überabzählbar.



# Wieviele Sprachen gibt es?

---

**Lemma.** Gegeben: Alphabet  $\Sigma$  (endlich oder unendlich).  
Die Menge der Sprachen über  $\Sigma$  ist überabzählbar.

Beweis.

Sei eine beliebige Abzählung aller Wörter über  $\Sigma$  gegeben:

$$w_1, w_2, \dots$$

Dann kann man die Sprachen  $L$  über  $\Sigma$  mit den Funktionen  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  identifizieren vermittels

$$f(i) = 1 \quad \text{gdw} \quad w_i \in L$$

Von diesen gibt es überabzählbar viele.

# Korollar

---

**Korollar.**

Nicht jede Sprache kann durch eine Grammatik dargestellt werden.

# Zusammenfassung

---

Gegeben eine Signatur  $\Sigma$

## Abzählbar

- $\mathbb{N}$
- Menge aller Wörter
- Menge aller Grammatiken
- Menge aller Algorithmen

# Zusammenfassung

---

Gegeben eine Signatur  $\Sigma$

## Abzählbar

- $\mathbb{N}$
- Menge aller Wörter
- Menge aller Grammatiken
- Menge aller Algorithmen

## Überabzählbar

- Die Menge aller Teilmengen von  $\mathbb{N}$
- Die Menge aller reellen Zahlen
- Die Menge aller Funktionen  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bzw.  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$
- Die Menge aller Sprachen