Grundlagen der Theoretischen Informatik

Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen (II)

21.06.2018

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Organisatorisches

Ergebnisse 1 TK:

spätestens am Montag, 2.07.2018

2 TK: Freitag, 6.08.2018, 13:00-14:00, D028

- Anmeldung bis 29.07.2018 möglich (über KLIPS)
- Rücktritt bis 30.07.2018 möglich (über KLIPS)

Nachklausur:

Ende September oder Anfang Oktober

Übersicht

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

Turingmaschinen

Turing-Maschine

Definition (Turing Machine (DTM))

Eine **determinierte Turing-Maschine (DTM)** $\mathcal{M}$ ist ein Tupel

$$\mathcal{M} = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von Zuständen mit $h \notin K$,
  (h ist der **Haltezustand**)
- Σ ein Alphabet mit $L, R \notin \Sigma$, $\# \in \Sigma$,
- $\delta : K \times \Sigma \to (K \cup \{h\}) \times (\Sigma \cup \{L, R\})$ eine Übergangs**funktion**
- $s \in K$ ein Startzustand.

Anzahl der Zustände: $|K| - 1$
(Startzustand wird nicht mitgezählt).

Turing-Maschine

Arbeitsschritt einer Turing-Maschine

Übergang

$$\delta(q, a) = (q', x)$$

bedeutet:

In Abhängigkeit

- vom aktuellen Zustand $q \in K$
- von dem Zeichen $a \in \Sigma$, das unter dem Schreib-/Lesekopf steht

geschieht folgendes:

- entweder ein **Schritt nach links**, falls $x = L$ ist
- oder ein **Schritt nach rechts**, falls $x = R$ ist
- oder **das Zeichen** a, das momentan unter dem Schreib-/Lesekopf steht, wird **durch** $b \in \Sigma$ **überschreiben**, falls $x = b \in \Sigma$
- der **Zustand** wird zu $q' \in K \cup \{h\}$ **geändert**,

Turing-Maschine

Leerzeichen

Das spezielle Zeichen $\#$ (*blank*) ist das Leerzeichen.

Es ist nie Teil des Eingabeworts; man kann es u.a. dazu benutzen, Wörter voneinander abzugrenzen.

Begrenzung des Bandes

Das Band einer DTM ist **einseitig unbeschränkt**:

- Nach rechts ist es unendlich lang.
- Nach links hat es ein Ende.
- Wenn eine DTM versucht, das Ende zu überschreiten, bleibt sie „hängen“.

  In diesem Fall hält sie nicht.

Turing-Maschine

Anfangskonfiguration

- Ganz links auf dem Band steht ein Blank
- Direkt rechts davon steht das Eingabewort
- Wenn eine DTM mehrere Eingabewörter hintereinander bekommt, sind sie durch Blanks getrennt.
- Rechts vom letzten Eingabewort stehen nur noch Blanks.
- Der Schreib-/Lesekopf der DTM steht auf dem Blank direkt rechts neben dem (letzten) Eingabewort.

Merke:

Das Band enthält immer nur endlich viele Symbole, die keine Blanks sind.

Turing-Maschine

Beispiel 1: $\mathscr{R}(a)$: a's durch b's ersetzen

Die folgende Turing-Maschine $\mathscr{R}(a)$ erwartet *ein* Eingabewort.
Sie liest es von rechts nach links einmal durch und macht dabei jedes a zu einem b.

Es ist

$$\mathscr{R}(a) = (\ \{q_0, q_1\}, \{a, b, \#\}, \delta, q_0\ )$$

mit folgender δ-Funktion:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
q_0, \# & \mapsto & q_1, L & q_1, \# & \mapsto & h, \# \\
q_0, a & \mapsto & q_0, a & q_1, a & \mapsto & q_1, b \\
q_0, b & \mapsto & q_0, b & q_1, b & \mapsto & q_1, L
\end{array}$$

Turing-Maschine

Beispiel 2 ($L_\#$)

Die folgende Turing-Maschine $L_\#$ läuft zum ersten Blank links von der momentanen Position.

Es ist $L_\# = (\ \{q_0, q_1\}, \{a, b, \#\}, \delta, q_0\ )$ mit folgender δ-Funktion:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
q_0, \# & \mapsto & q_1, L & q_1, \# & \mapsto & h, \# \\
q_0, a & \mapsto & q_1, L & q_1, a & \mapsto & q_1, L \\
q_0, b & \mapsto & q_1, L & q_1, b & \mapsto & q_1, L
\end{array}$$

q_0: Anfangsposition

q_1: Anfangsposition verlassen

Turing-Maschine

Beispiel 3 ($\mathscr{C}$) Die folgende DTM $\mathscr{C}$ erhält als Eingabe einen String Einsen.

Dieser String wird kopiert:
Falls n Einsen auf dem Band stehen, stehen nach Ausführung von $\mathscr{C}$ $2n$ Einsen auf dem Band (getrennt durch ein Blank $\#$).

state	$\#$	1	c
q_0	$\langle q_1, c\rangle$	—	—
q_1	$\langle q_2, R\rangle$	$\langle q_1, L\rangle$	$\langle q_1, L\rangle$
q_2	—	$\langle q_3, \#\rangle$	$\langle q_7, \#\rangle$
q_3	$\langle q_4, R\rangle$	—	—
q_4	$\langle q_5, 1\rangle$	$\langle q_4, R\rangle$	$\langle q_4, R\rangle$
q_5	$\langle q_6, 1\rangle$	$\langle q_5, L\rangle$	$\langle q_5, L\rangle$
q_6	—	$\langle q_2, R\rangle$	—
q_7	$\langle q_8, R\rangle$	—	—
q_8	$\langle h, \#\rangle$	$\langle q_8, R\rangle$	—

Turing-Maschine

Übergangsfunktion δ nicht Überall definiert

Wir erlauben ab jetzt auch, dass δ nicht überall definiert ist.

Falls die DTM dann in einen solchen nichtdefinierten Zustand kommt, sagen wir **die DTM hängt**. Sie **hält** also nicht.

Dies wird z.T. in der Literatur anders gehandhabt.

Turing-Maschine

Beispiel 4 (Print n)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ konstruieren wir eine Maschine, die genau n Einsen auf das leere Band schreibt (**mit möglichst wenig Zuständen**):

1. schreibe $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ viele Einsen auf das Band (höchstens $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Zustände)
2. kopiere diesen String (8 Zustände)
3. ersetze das trennende $\#$ durch eine 1
4. falls n gerade ist, ersetzen die letzte 1 durch $\#$ (2 neue Zustände)

Insgesamt können wir n Einsen mit höchstens $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 10$ Zuständen konstruieren

Turing-Maschine

Begriff der Konfigurationen

- **Konfiguration** beschreibt die *komplette* aktuelle Situation der Maschine in einer Rechnung.
- Eine **Rechnung** ist eine Folge von Konfigurationen, wobei immer von einer Konfiguration zu einer Nachfolgekonfiguration übergegangen wird.

Besteht aus 4 Elementen:

- das aktuellen Zustand q,
- das Wort w links vom Schreib-/Lesekopf,
- das Zeichen a, auf dem der Kopf gerade steht,
- das Wort u rechts von der aktuellen Kopfposition.

Turing-Maschine

Konfigurationen sind endlich

- w enthält das Anfangsstück des Bandes vom linken Ende bis zur aktuellen Kopfposition.
- **Links ist das Band endlich!**
  $w = \epsilon$ bedeutet, dass der Kopf ganz links steht
- u enthält den Bandinhalt rechts vom Schreib-/Lesekopf bis zum letzten Zeichen, das kein Blank ist.
- **Nach rechts ist das Band unendlich, aber es enthält nach rechts von einer bestimmten Bandposition an nur noch Blanks**.
  $u = \epsilon$ bedeutet, dass rechts vom Schreib-/Lesekopf nur noch Blanks stehen.

Turing-Maschine

Definition (Konfiguration einer DTM)

Eine **Konfiguration** C einer DTM $\mathcal{M} = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$ ist ein Wort der Form $C = q, w\underline{a}u$. Dabei ist

- $q \in K \cup \{h\}$ der aktuelle Zustand,
- $w \in \Sigma^*$ der Bandinhalt links des Kopfes,
- $a \in \Sigma$ das Bandzeichen unter der Schreib-/Lesekopf.
  Notation: Die Position des Schreib-/Lesekopfes ist durch einen Unterstrich gekennzeichnet.
- $u \in \Sigma^*(\Sigma - \{\#\}) \cup \{\epsilon\}$ der Bandinhalt rechts des Kopfes.

Turing-Maschine

Definition (Nachfolgekonfiguration)

Eine Konfiguration C_2 heißt **Nachfolgekonfiguration** von C_1, in Zeichen

$$C_1 \vdash_{\mathcal{M}} C_2$$

falls gilt:

- $C_i = q_i, w_i \underline{a_i} u_i$ für $i \in \{1, 2\}$, und
- es gibt einen Übergang $\delta(q_1, a_1) = (q_2, b)$ wie folgt:

  Fall 1: $b \in \Sigma$. Dann ist $w_1 = w_2$, $u_1 = u_2$, $a_2 = b$.

  Fall 2: $b = L$. Dann gilt für w_2 und a_2: $w_1 = w_2 a_2$.
  Für u_2 gilt: Wenn $a_1 = \#$ und $u_1 = \epsilon$ ist, so ist $u_2 = \epsilon$, sonst ist $u_2 = a_1 u_1$.

  Fall 3: $b = R$. Dann ist $w_2 = w_1 a_1$.
  Für a_2 und u_2 gilt: Wenn $u_1 = \epsilon$ ist, dann ist $u_2 = \epsilon$ und $a_2 = \#$, ansonsten ist $u_1 = a_2 u_2$.

Turing-Maschine

Definition (Eingabe)

w heißt **Eingabe** (*input*) für $\mathcal{M}$, falls $\mathcal{M}$ mit der **Startkonfiguration**

$$C_0 = s, \#w\underline{\#}$$

startet.

$(w_1, \ldots, w_n)$ heißt **Eingabe** für $\mathcal{M}$, falls $\mathcal{M}$ mit der **Startkonfiguration**

$$C_0 = s, \#w_1\# \ldots \#w_n\underline{\#}$$

startet.

Turing-Maschine

Definition (Halten, Hängen)

Sei $\mathcal{M}$ eine Turing-Maschine.

- $\mathcal{M}$ **hält** in $C = q, w\underline{a}u$ **gdw.** $q = h$.
- $\mathcal{M}$ **hängt** in $C = q, w\underline{a}u$ **gdw.** es keine Nachfolgekonfiguration gibt
  Insbesondere: wenn $w = \epsilon \wedge \exists q' \; \delta(q, a) = (q', L)$.

Turing-Maschine

Definition (Rechnung)

Sei $\mathcal{M}$ eine Turing-Maschine. Man schreibt

$$C \vdash^*_{\mathcal{M}} C'$$

gdw.:

es gibt eine Reihe von Konfigurationen

$$C_0, C_1, \ldots, C_n \qquad (n \geq 0)$$

so dass

- $C = C_0$ und $C' = C_n$
- für alle $i < n$ gilt: $C_i \vdash_{\mathcal{M}} C_{i+1}$

Dann heißt $C_0, C_1, \ldots, C_n$ eine **Rechnung** der Länge n von C_0 nach C_n.

Turing-Maschine können Funktionen berechnen

Definition (TM-berechenbare Funktion)

Sei Σ_0 ein Alphabet mit $\# \notin \Sigma_0$.

Eine (partielle) Funktion

$$f : ({\Sigma_0}^*)^m \to ({\Sigma_0}^*)^n$$

heißt **DTM-berechenbar**, falls:

Es existiert eine determinierte Turing-Maschine $\mathcal{M} = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$

- mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$,
- so dass für alle $w_1, \ldots, w_m,\ u_1, \ldots, u_n \in {\Sigma_0}^*$ gilt:
  - $f(w_1, \ldots, w_m) = (u_1, \ldots, u_n)$ <u>gdw</u>

    $s, \#w_1\# \ldots \#w_m\underline{\#} \vdash^*_{\mathcal{M}} h, \#u_1\# \ldots \#u_n\underline{\#}$
  - $f(w_1, \ldots, w_m)$ ist undefiniert <u>gdw</u>

    $\mathcal{M}$ gestartet mit $s, \#w_1\# \ldots \#w_m\underline{\#}$ hält nicht (läuft unendlich oder hängt)

Turing-Maschine können Funktionen berechnen

Vorsicht

Wir betrachten Turing-Maschinen hier unter einem anderen Aspekt als alle bisherigen Automaten:

- Bei endlichen Automaten und Pushdown-Automaten haben wir untersucht, **welche Sprachen sie akzeptieren**.

- Bei Turing-Maschinen untersuchen wir,
  - **welche Sprachen sie akzeptieren** und
  - **welche Funktionen sie berechnen**.

Akzeptieren ist Spezialfall von Berechnen

Turing-Maschine: Akzeptierte Sprache

Definition (Von einer DTM akzeptierte Sprache)
Ein Wort w wird **akzeptiert von einer DTM $\mathcal{M}$**,
falls $\mathcal{M}$ auf Eingabe von w hält
(wobei am Ende der Kopf auf dem ersten Blank rechts von w steht).

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ **wird akzeptiert von einer DTM $\mathcal{M}$**, wenn genau die Wörter aus L aus $\mathcal{M}$ und keine anderen akzeptiert werden.

Achtung

Bei nicht akzeptierten Wörtern muss die DTM nicht halten

Sie darf es sogar nicht!

TM: Funktionen auf natürlichen Zahlen

Funktionen auf natürlichen Zahlen

- Wir verwenden die **Unärdarstellung**

  Eine Zahl n wird auf dem Band der Maschine durch n senkrechte Striche dargestellt.

- Eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ berechnet eine Funktion

  $$f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$$

  in Unärdarstellung wie folgt:

  – Wenn $f(i_1, \ldots, i_k) = (j_1, \ldots, j_n)$ ist, dann rechnet $\mathcal{M}$

  $$s, \#|^{i_1}\# \ldots \#|^{i_k}\underline{\#} \quad \vdash^*_{\mathcal{M}} \quad h, \#|^{j_1}\# \ldots \#|^{j_n}\underline{\#}$$

  – Ist $f(i_1, \ldots, i_k)$ undefiniert, dann hält $\mathcal{M}$ bei Input $\#|^{i_1}\# \ldots \#|^{i_k}\#$ nicht.

TM: Funktionen auf natürlichen Zahlen

Definition

- **TM**^{part} ist die Menge der partiellen TM-berechenbaren Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$
- **TM** ist die Menge der totalen TM-berechenbaren Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

Achtung: Einschränkung

In der Definition von TM und TM^{part} haben wir uns eingeschränkt:

- nur Funktionen über natürliche Zahlen
- nur Funktionen mit einstelligem Wertebereich

Das ist keine echte Einschränkung

Elemente (Wörter) aus anderen Definitions- und Wertebereiche können als natürliche Zahlen kodiert werden.

TM-Flussdiagramme

Graphische Darstellung der Übergangsfunktion einer DTM: mit einem Flußdiagramm.

- Die Zustandsnamen werden nicht genannt.
- Nur die Schritte und die Ausführungsreihenfolge werden beschrieben.

TM-Flussdiagramme

Folgende Elemente stehen zur Verfügung:

- L: eine DTM, die nach dem Starten ein Feld nach links geht und danach hält.
- R: eine DTM, die nach dem Starten ein Feld nach rechts geht und danach hält.
- a: TM, die a auf dem Band schreibt und danach hält.

- Startschritt: mit einer Pfeilspitze $>$ bezeichnet

TM-Flussdiagramme

- $M_1 \longrightarrow M_2$ oder abgekürzt $M_1 M_2$ (falls $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ die Flußdiagramme zweier DTM sind):
  eine DTM die zuerst wie M_1 arbeitet und dann, falls M_1 hält, wie M_2 weiterarbeitet.

  Direkt aufeinanderfolgende Schritte werden also

  – entweder direkt nebeneinander notiert

  – oder durch einen Pfeil verbunden.

  Im Gegensatz zu der Maschine $\mathcal{M}_1$ gilt also für $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$: **Nachdem $\mathcal{M}_1$ seine Arbeit beendet hat, ist $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$ nicht im Haltezustand, sondern im Startzustand von $\mathcal{M}_2$.**

TM-Flussdiagramme

- $M_1 \xrightarrow{a} M_2$: M_2 ist nur dann aufgeführt, wenn nach der Beendigung von M_1 der aktuelle Bandbuchstabe a ist.

Sind $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$ Turing-Maschinen, $a_i \in \Sigma$ für $1 \leq i \leq n$, so ist

$$\begin{array}{cl} & \mathcal{M}_1 \\ & \uparrow^{a_1} \\ > & \mathcal{M}_0 \stackrel{a_2}{\rightarrow} \mathcal{M}_2 \\ & \downarrow^{a_n} \quad \ddots \\ & \mathcal{M}_n \end{array}$$

die Turing-Maschine, die zuerst wie $\mathcal{M}_0$ arbeitet und dann, falls $\mathcal{M}_0$ mit dem Buchstaben a_i auf dem Arbeitsfeld hält, wie $\mathcal{M}_i$ weiterarbeitet.

TM-Flussdiagramme

$\boldsymbol{\sigma}$ — eine Schreibabkürzung für einen beliebigen Buchstaben aus Σ.

- Die Maschine $\mathcal{M} \overset{\sigma}{\to} \ldots \sigma$ zum Beispiel ist eine Abkürzung für

$$\begin{array}{lll} & \ldots a_1 & \\ & \uparrow^{a_1} & \\ > & \mathcal{M} \overset{a_2}{\to} \ldots a_2 & \\ & \downarrow^{a_n} & \ddots \\ & \ldots a_n & \end{array}$$

falls $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ist.

TM-Flussdiagramme

Die Maschine $> L \stackrel{\sigma}{\to} R\sigma R$ für $\Sigma = \{\#, |\}$ macht also zuerst einen Schritt nach links; steht hier ein $\#$ (bzw. ein $|$), so geht sie einen Schritt nach rechts, druckt $\#$ (bzw. $|$) und geht ein weiteres Feld nach rechts.

- Weitere Schreibabkürzungen sind:

  $\stackrel{\boldsymbol{\sigma} \neq a}{\to}$ für $\sigma \in \Sigma - \{a\}$

  $M_1 \xrightarrow{\sigma \neq a} M_2$: M_2 ist nur dann aufgeführt, wenn M_1 hält, und Lesekopf auf Buchstabe, die nicht a ist positioniert ist.

  $\boldsymbol{\mathcal{M}}_1 \stackrel{a,b}{\to} \boldsymbol{\mathcal{M}}_2$ falls nach der Ausführung von $\mathcal{M}_1$ sowohl für den Bandbuchstaben a als auch für b nach $\mathcal{M}_2$ verzweigt werden soll.

TM-Flussdiagramme

Beispiel:

Die DTM $\mathcal{M}^+ = (\{s, q_1, q_2, q_3, q_4\},\ \{|,\ \#\},\ \delta,\ s)$ addiert zwei natürliche Zahlen in Unärdarstellung.

Sie rechnet

$$s, \#|^n\#|^m\underline{\#} \ \vdash^*_{\mathcal{M}^+}\ h, \#|^{n+m}\underline{\#}$$

Der Trick: Sie löscht den letzten Strich von $|^m$ und schreibt ihn in den Zwischenraum zwischen $|^n$ und $|^m$.

TM-Flussdiagramme

Beispiel: Hier ist zunächst die δ-Funktion:

$s, \#$	$\mapsto$	q_1, L	$q_2, \#$	$\mapsto$	$q_3, \vert$	$q_3, \#$	$\mapsto$	q_4, L
$q_1, \#$	$\mapsto$	$h, \#$	$q_2, \vert$	$\mapsto$	q_2, L	$q_4, \vert$	$\mapsto$	$h, \#$
$q_1, \vert$	$\mapsto$	q_2, L	$q_3, \vert$	$\mapsto$	q_3, R			

Für $\delta(s, |)$ und $\delta(q_4, \#)$ haben wir keine Werte angegeben; sie sind beliebig, weil $\mathcal{M}^+$ sie nie benötigt.

Das Flußdiagramm zur gleichen DTM ist erheblich leichter zu lesen:

$$
\begin{array}{l}
> L \xrightarrow{|} L \xrightarrow{\#} |R \xrightarrow{\#} L\# \\
\quad \downarrow^{\#} \\
\quad \#
\end{array}
$$

TM-Flussdiagramme

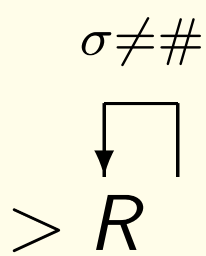
Die folgenden Turing-Maschinen werden wir als Bestandteile von komplexeren Turing-Maschinen später noch häufig benutzen.

Beispiel: ($R_{\#}$)

$R_{\#}$ bewegt nur den Kopf, ohne zu schreiben:

- Sie geht mindestens einmal nach rechts.
- Dann geht sie solange weiter nach rechts, bis sie ein $\#$ liest.

Die folgende Turing-Maschine $R_{\#}$ läuft zum ersten Blank rechts von der momentanen Position.



TM-Flussdiagramme

Beispiel: ($L_{\#}$) Analog funktioniert die DTM $L_{\#}$:

- Sie geht mindestens einmal nach links.
- Dann geht sie solange weiter nach links, bis sie ein $\#$ liest.

$$\begin{tikzcd} > L \arrow[loop above, "\sigma\neq\#"] \end{tikzcd}$$