Grundlagen der Theoretischen Informatik

Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen (IV)

28.06.2018

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Übersicht

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- Entscheidbar/Aufzählbar
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- Unentscheidbarkeit

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Definition (Indeterminierte Turing-Maschine, NTM)

Eine **indeterminierte Turing-Maschine** $\mathcal{M}$ ist ein Tupel

$$M = (K, \Sigma, \Delta, s)$$

Dabei sind K, Σ, s definiert wie bei determinierten Turing-Maschinen.

Übergangs**relation**:

$$\Delta \subseteq (K \times \Sigma) \times \big((K \cup \{h\}) \times (\Sigma \cup \{L, R\})\big)$$

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Mehrere Nachfolgekonfigurationen

Konfigurationen sind definiert wie bei DTMs.

Nun kann eine Konfiguration aber mehrere mögliche Nachfolgekonfigurationen haben.

Definition (NTM: Halten, Hängen, Akzeptieren) Sei $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \Delta, s_0)$ eine indeterminierte Turing-Maschine.

- $\mathcal{M}$ **hält** bei Input w, falls es **unter den möglichen Rechnungen**, die $\mathcal{M}$ wählen kann, **eine gibt**, so dass $\mathcal{M}$ eine Haltekonfiguration erreicht.
- $\mathcal{M}$ **hängt** in einer Konfiguration, wenn es keine (durch Δ definierte) Nachfolgekonfiguration gibt.
- $\mathcal{M}$ **akzeptiert** ein Wort w, falls sie **von** $s, \#w\underline{\#}$ **aus einen Haltezustand erreichen kann**, und $\mathcal{M}$ akzeptiert eine Sprache L, wenn sie genau alle Wörter $w \in L$ akzeptiert.

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Theorem [Simulation von NTM durch DTM]
Jede Sprache, die von einer indeterminierten Turing-Maschine akzeptiert wird, wird auch von einer Standard-DTM akzeptiert.

Beweis (Anfang) Sei

- L eine Sprache über Σ_0^* mit $\# \notin \Sigma_0$;
- $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \Delta, s)$ eine indeterminierte Turing-Maschine, die L akzeptiert.

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Beweis (Fortsetzung) Wir konstruieren zu $\mathcal{M}$ eine Standard-DTM $\mathcal{M}'$, die so rechnet:

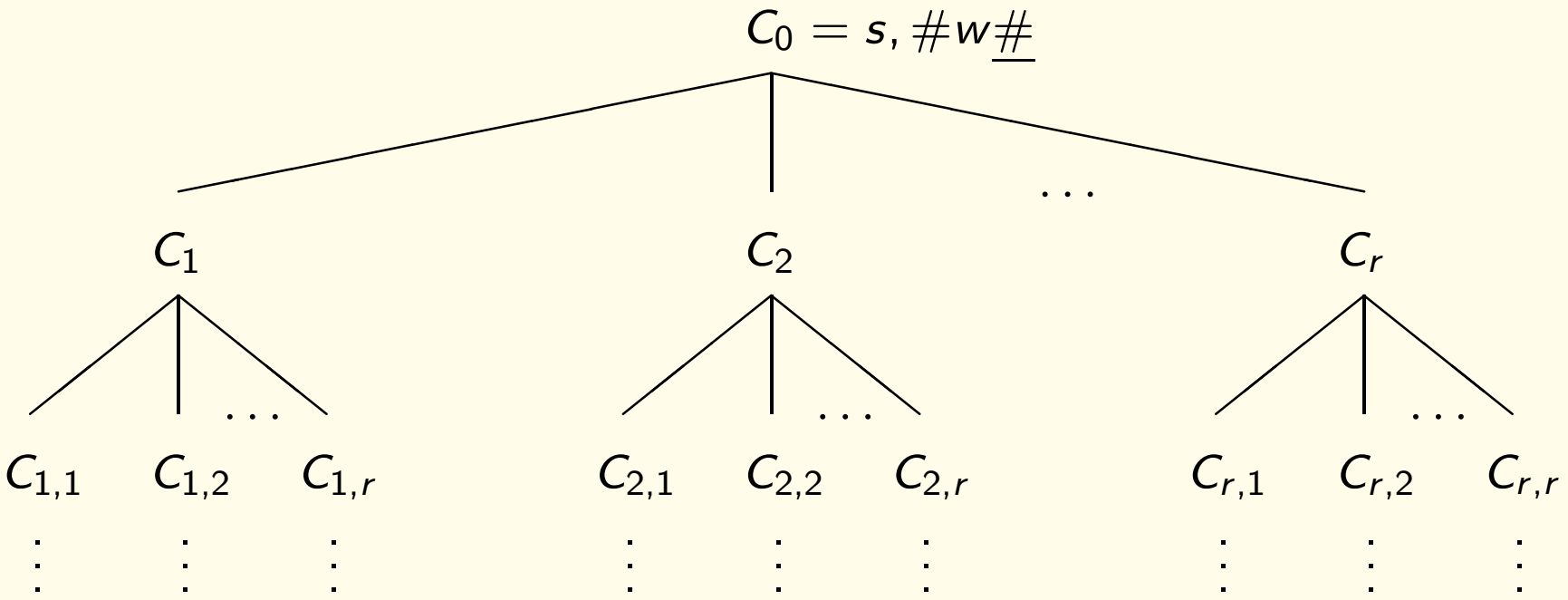
- $\mathcal{M}'$ durchläuft systematisch **alle** Rechnungen von $\mathcal{M}$, und sucht dabei nach einer Haltekonfiguration.
- $\mathcal{M}'$ hält genau dann, wenn sie eine Haltekonfiguration von $\mathcal{M}$ findet.

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Beweis (Fortsetzung) **Suchbaum, Rechnungsbaum:**

Stelle alle Rechnungen von $\mathcal{M}$ von einer Startkonfiguration C_0 dar als einen Baum mit Wurzel C_0.

Ein Ast ist eine mögliche Rechnung von $\mathcal{M}$.



Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Beweis (Fortsetzung)

Problem:

Es kann zur Startkonfiguration

$$C_0 = s, \#w\underline{\#}$$

unendlich viele Rechnungen von $\mathcal{M}$ geben,
und jede einzelne von ihnen kann unendlich lang sein.

Wir können also nicht erst einen Ast ganz durchlaufen und dann den nächsten Ast durchsuchen.

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Beweis (Fortsetzung)

Die Lösung:

Breitensuche

Durchlaufe den Rechnungsbaum nicht depth-first, sondern per **iterative deepening**.

- Untersuche alle möglichen Rechnungen bis zum ersten Schritt.
- Untersuche alle möglichen Rechnungen bis zum zweiten Schritt.
- Untersuche alle möglichen Rechnungen bis zum dritten Schritt.
- usw.

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Beweis (Fortsetzung)

Können wir damit denn in endlicher Zeit eine Haltekonfiguration finden, falls es eine gibt?

Problem:

Kann der Rechnungsbaum nicht nur **unendlich tief**,
sondern auch **unendlich breit** werden?

Nein, denn:

Maximale Anzahl von Nachfolgekonfigurationen

$$r = max\{|\Delta(q, a)| \quad | \quad q \in K, a \in \Sigma\}$$

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Beweis (Fortsetzung)

$\mathcal{M}'$ kann (z.B.) als eine 3-DTM gewählt werden:

- **Auf dem ersten Band steht immer das Eingabewort w.**

  Da die Rechnung immer wieder neu mit $s, \#w\underline{\#}$ von $\mathcal{M}$ beginnt, wird das Eingabewort immer wieder gebraucht.

- **Auf dem zweiten Band steht, welcher Weg durch den Rechnungsbaum gerade verfolgt wird.**

  Der Einfachheit halber: Wenn eine Konfiguration weniger als r Nachfolgekonfigurationen hat, soll der zugehörige Knoten trotzdem r Söhne haben, und die überzähligen Konfigurationen sind leer.

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Beweis (Fortsetzung)

Darstellung des aktuellen Pfades im Rechnungsbaum als Zahl im r-adischen System.

Eine Zahl $d_1 \dots d_n$ bedeutet:

- Von der Startkonfiguration C_0 aus ist die d_1-te der r möglichen Nachfolgekonfigurationen gewählt worden, C_{d_1}.
- Von C_{d_1}, einem Knoten der Tiefe 1, aus wurde die d_2-te mögliche Nachfolgekonfiguration gewählt,
- usw.

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Beweis (Fortsetzung)

Ausführung des Iterative Deepening:

- Beginne mit 0 auf zweitem Band.
- Jeweils nächste zu betrachtende Rechnung durch Erhöhen der Zahl auf Band 2 um 1
- Auf Band 3 wird eine Rechnung von $\mathcal{M}$ **determiniert** simuliert.

  Und zwar entsprechend der Zahl $d_1 \dots d_n$ auf Band 2.
  Die Endkonfiguration $C_{d_1 \dots d_n}$ dieser Rechnung steht im Rechnungsbaum an dem Knoten, der das Ende des Pfades $d_1 \dots d_n$ bildet.
- Ist die Konfiguration $C_{d_1 \dots d_n}$ eine Haltekonfiguration, so hält $\mathcal{M}'$.
- Sonst Zahl auf Band 2 erhöhen und die nächste Rechnungssimulation beginnen

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Beweis (Ende)

Damit gilt:

$\mathcal{M}'$ **hält bei Input** w

gdw

es gibt in R_{C_0} **eine Haltekonfiguration.**

Das ist genau dann der Fall, wenn

- $\mathcal{M}$ bei Input w hält,
- w in L liegt.

□

Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- Entscheidbar/Aufzählbar
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- Unentscheidbarkeit

Universelle determinierte Turing-Maschinen

Vergleich Turing-Maschine / „normaler“ Computer

Turing-Maschinen sind sehr mächtig.

Wie mächtig sind sie wirklich?

- Eine Turing-Maschine hat ein vorgegebenes „Programm“ (Regelmenge)
- „Normale“ Computer können beliebige Programme ausführen.

Tatsächlich geht das mit Turing-Maschinen auch!

Universelle determinierte Turing-Maschinen

Turing-Maschine, die andere TMs simuliert

- Universelle TM $\mathscr{U}$ bekommt als Eingabe:
  - die Regelmenge einer beliebigen Turing-Maschine $\mathcal{M}$ und
  - ein Wort w, auf dem $\mathcal{M}$ rechnen soll.
- $\mathscr{U}$ simuliert $\mathcal{M}$, indem sie jeweils nachschlägt, welchen δ-Übergang $\mathcal{M}$ machen würde.

Universelle determinierte Turing-Maschinen

TM als Eingabe für eine andere TM

Frage:

In welches Format fasst man die Regeln einer DTM $\mathcal{M}$ am besten, um sie einer universellen DTM als Eingabe zu geben?

Was muss man angeben, um eine DTM komplett zu beschreiben?

- das Alphabet,
- die Zustände,
- die δ-Übergänge,
- den Startzustand.

Universelle determinierte Turing-Maschinen

Standardisierung von Alphabet, Zustandsmenge, Startzustand

- Unendliches Alphabet $\Sigma_\infty = \{a_0, a_1, \ldots\}$,
  so dass das Alphabet jeder DTM eine Teilmenge von Σ_∞ ist.
- Namen der Zustände einer DTM sind egal.
  Sie seien also $q_1, \ldots, q_n$
  (n kann dabei von DTM zu DTM verschieden sein).
- Sei q_1 immer der Startzustand, und
  bezeichne q_0 den Haltezustand

Damit:

**Wir können eine DTM komplett beschreiben,
indem wir nur ihre δ-Übergänge beschreiben.**

Universelle determinierte Turing-Maschinen

(Mögliche) Kodierung der Übergangsrelation Die DTM $\mathcal{L}_{\#}$ habe die Regeln

$$q_1, \# \mapsto q_2, L \qquad q_2, \# \mapsto h, \#$$
$$q_1, | \mapsto q_2, L \qquad q_2, | \mapsto q_2, L$$

Dabei sei: $\# = a_0$ und $| = a_1$

Dann kann die DTM $\mathcal{L}_{\#}$ so beschrieben werden:

	a_0	a_1
q_1	q_2, L	q_2, L
q_2	h, a_0	q_2, L

oder kürzer:

$Z\ S\ 2\lambda\ S\ 2\lambda$

$Z\ S\ 00\ S\ 2\lambda$

Universelle determinierte Turing-Maschinen

(Mögliche) Kodierung der Übergangsrelation Dabei steht:

- Z für "nächste Zeile"
- S für "nächste Spalte"
- λ für "links", ρ für "rechts"
- die Zahl n für den n-ten Zustand und für das n-te Zeichen von Σ_∞.

Damit ist die DTM insgesamt durch ein einziges Wort beschrieben:

$$ZS2\lambda S2\lambda ZS00S2\lambda$$

Universelle determinierte Turing-Maschinen

Gödelisierung

Ein Verfahren, jeder Turing-Maschine eine Zahl oder ein Wort (**Gödelzahl** bzw. **Gödelwort**) so zuzuordnen, dass man aus der Zahl bzw. dem Wort die Turing-Maschine effektiv rekonstruieren kann.

Kurt Gödel

Kurt Gödel 1906-1978

- Bedeutendster Logiker des 20. Jahrhunderts
- Vollständigkeitssatz (1929)
  Promotion in Wien
- Unvollständigkeitssatz (1931)
  Idee der Gödelisierung
- Beweis der Unabhängigkeit der
  Kontinuumshypothese
- Dozent in Princeton,
  befreundet mit Albert Einstein
- Tragischer Tod:
  Verfolgungswahn, Depressionen,
  Tod durch Unterernährung.

Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- Entscheidbar/Aufzählbar
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- Unentscheidbarkeit

Entscheidbar/Aufzählbar

Akzeptieren

Eine DTM **akzeptiert** eine Sprache L, wenn sie

- für jedes Eingabe-Wort $w \in L$ irgendwann hält
- für jedes Wort $v \notin L$ unendlich lang rechnet oder hängt

Entscheiden

Eine DTM **entscheidet** eine Sprache L, wenn sie

- für jedes Eingabe-Wort $w \in L$ hält mit dem Bandinhalt Y ("Yes")
- für jedes Wort $v \notin L$ hält mit dem Bandinhalt N ("No")

Akzeptierbarkeit und Entscheidbarkeit

Definition [Entscheidbar]

L sei eine Sprache über Σ_0 mit $\#, N, Y \notin \Sigma_0$.

$M = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$ sei eine DTM mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

M **entscheidet** L, falls für alle $w \in \Sigma_0^*$ gilt:

$$s, \#w\underline{\#} \vdash_M^* \begin{cases} h, \#Y\underline{\#} & \text{falls } w \in L \\ h, \#N\underline{\#} & \text{sonst} \end{cases}$$

L heißt **entscheidbar**, falls es eine DTM gibt, die L entscheidet.

Akzeptierbarkeit und Entscheidbarkeit

Definition [Akzeptierbar]

L sei eine Sprache über Σ_0 mit $\#, N, Y \notin \Sigma_0$.

$M = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$ sei eine DTM mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

$\mathcal{M}$ **akzeptiert** ein Wort $w \in \Sigma_0^*$, falls $\mathcal{M}$ bei Input w hält.

$\mathcal{M}$ **akzeptiert die Sprache** L, falls für alle $w \in \Sigma_0^*$ gilt:

$$\mathcal{M} \text{ akzeptiert } w \quad \textit{genau dann wenn } w \in L$$

L heißt **akzeptierbar** (oder auch **semi-entscheidbar**),
falls es eine DTM gibt, die L akzeptiert.

Rekursiv aufzählbar

Definition [Rekursiv Aufzählbar (recursively enumerable)]

L sei eine Sprache über Σ_0 mit $\#, N, Y \notin \Sigma_0$.

$M = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$ sei eine DTM mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

$\mathcal{M}$ **zählt** L **auf**, falls es einen Zustand $q_B \in K$ gibt (den **Blinkzustand**), so dass:

$$L = \{w \in \Sigma_0^* \mid \exists u \in \Sigma^* : s, \underline{\#} \vdash_{\mathcal{M}}^* q_B, \#w\underline{\#}u\}$$

L heißt **rekursiv aufzählbar**, falls es eine DTM gibt, die L aufzählt.

Rekursiv aufzählbar

Achtung: aufzählbar $\neq$ abzählbar.

Unterschied

M **abzählbar:** Es gibt eine surjektive Abbildung der natürlichen Zahlen auf *M*

M **aufzählbar:** Diese Abbildung kann von einer Turing-Maschine berechnet werden.

Wegen Endlichkeit der Wörter und des Alphabets sind alle Sprachen abzählbar.

Aber nicht alle Sprachen sind aufzählbar.

Aufzählbarkeit/Entscheidbarkeit/Unentscheidbarkeit

Fragen:

Gibt es nicht-aufzählbare Probleme?

Gibt es nicht-entscheidbare Probleme?

Aufzählbarkeit/Entscheidbarkeit/Unentscheidbarkeit

Fragen:

Gibt es nicht-aufzählbare Probleme?

Gibt es nicht-entscheidbare Probleme?

Antwort: Ja, es gibt nicht-aufzählbare Probleme und
es gibt nicht-entscheidbare Probleme.

Beweis: Die Menge aller Sprachen ist nicht abzählbar
Die Turingmaschinen können abgezählt werden: $M_1, M_2, \ldots$

Die Mächtigkeit der Menge aller Sprachen ist größer
als die Mächtigkeit der Menge aller Turingmaschinen.

$\mapsto$ es gibt Sprachen für die es keine TM gibt, die sie aufzählt.

$\mapsto$ es gibt Sprachen für die es keine TM gibt, die sie entscheidet.

Rekursiv aufzählbar: Beispiele

Rekursiv aufzählbar aber nicht entscheidbar

Folgende Mengen sind rekursiv aufzählbar aber *nicht* entscheidbar:

- Die Menge der Gödelisierungen aller haltenden Turing-Maschinen
- Die Menge aller terminierenden Programme
- Die Menge aller allgemeingültigen prädikatenlogischen Formeln

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Theorem [Akzeptierbar = Rekursiv Aufzählbar].
Eine Sprache ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn sie akzeptierbar ist.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Theorem [Akzeptierbar = Rekursiv Aufzählbar].
Eine Sprache ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn sie akzeptierbar ist.

Beweis "⇒"

Sei L rekursiv aufzählbar
Es gibt also eine DTM $\mathcal{M}_L$, die L aufzählt.

Zur Erinnerung:
$\mathcal{M}_L$ **zählt** L **auf**, falls es einen Zustand $q_B \in K$ gibt (den **Blinkzustand**), so dass:

$$L = \{w \in \Sigma_0^* \mid \exists u \in \Sigma^* : s, \underline{\#} \vdash_{\mathcal{M}}^* q_B, \#w\underline{\#}u\}$$

Zu zeigen: L ist akzeptierbar, d.h. es existiert eine DTM, die L akzeptiert.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

Wir konstruieren aus $\mathcal{M}_L$ eine 2-DTM $\mathcal{M}$, die L akzeptiert:

- $\mathcal{M}$ wird gestartet mit

$$\begin{array}{ll} s_0, & \#w\underline{\#} \\ & \underline{\#} \end{array}$$

- $\mathcal{M}$ simuliert auf Band 2 die Maschine $\mathcal{M}_L$.
- Wenn $\mathcal{M}_L$ den **Blinkzustand** q_B erreicht, dann enthält Band 2 von $\mathcal{M}$ ein Wort

$$\#w'\underline{\#}u$$

mit $w' \in L$.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

- Nach Erreichen des Blinkzustands:
  $\mathcal{M}$ vergleicht w und w'.
  - Falls $w = w'$, dann hält $\mathcal{M}$: $w \in L$.
  - Ansonsten simuliert $\mathcal{M}$ auf Band 2 weiter die Arbeit von $\mathcal{M}_L$.
- Wenn $\mathcal{M}_L$ hält, ohne das Wort w auf Band 2 erzeugt zu haben, gerät $\mathcal{M}$ in eine Endlosschleife.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

"$\Leftarrow$"

Sei L akzeptierbar

Es gebe also eine DTM $\mathcal{M}_L$, die L akzeptiert.

Zu zeigen: L ist rekursiv aufzählbar.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

"$\Leftarrow$"

Sei L akzeptierbar
Es gebe also eine DTM $\mathcal{M}_L$, die L akzeptiert.

Zu zeigen: L ist rekursiv aufzählbar.

Wir konstruieren eine DTM $\mathcal{M}$, die L rekursiv aufzählt.

Grundidee:

- die Wörter aus Σ^* der Reihe nach aufzählen
- jedes Wort der Maschine $\mathcal{M}_L$ vorlegen
- wenn $\mathcal{M}_L$ das Wort akzeptiert, in den Blinkzustand q_B gehen

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

Problem: $\mathcal{M}_L$ akzeptiert, sie entscheidet nicht.

Wenn $\mathcal{M}_L$ ein Wort nicht akzeptiert, rechnet sie unendlich.

Lösung: Wir betrachten die Rechnung von $\mathcal{M}_L$ zu allen Wörtern aus Σ^* **gleichzeitig**.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

$\Sigma^* = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$ (in lexikalischer Reihenfolge aufgezählt).

Dann rechnet $\mathcal{M}$ so:

- Im ersten Durchlauf berechne den ersten Rechenschritt von $\mathcal{M}_L$ für w_1.
- Im zweiten Durchlauf berechne
  - die ersten zwei Rechenschritte von $\mathcal{M}_L$ für w_1,
  - einen Rechenschritt für w_2.
- Im dritten Durchlauf berechne drei Rechenschritte für w_1, zwei für w_2 und einen für w_3 und so weiter.

Immer wieder bei der Startkonfiguration anfangen: So müssen wir uns den Bandinhalt der Rechnung von $\mathcal{M}_L$ zu w_i nach j Schritten nicht merken.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

Wenn $\mathcal{M}$ so rechnet, dann gilt:

- $\mathcal{M}$ fängt für jedes $w_i \in \Sigma^*$ in endlicher Zeit (nämlich im i-ten Durchlauf) an, die Arbeit von $\mathcal{M}_L$ zu w_i zu simulieren, und
- falls $w_i \in L$ und falls $\mathcal{M}_L$, gestartet mit $s, \#w_i\underline{\#}$, in j Schritten einen Haltezustand erreicht, dann erreicht $\mathcal{M}$ nach endlicher Zeit (nämlich im $i + j$-ten Durchlauf) den Haltezustand von $\mathcal{M}_L$ in der Rechnung zu w_i.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Ende)

- Wenn $\mathcal{M}$ bei Simulation von $\mathcal{M}_L$ zur Eingabe w_i auf eine Haltekonfiguration trifft, dann ist $w_i \in L$.
- $\mathcal{M}$ nimmt dann eine Konfiguration

  $$q_B, \#w_i\underline{\#}u_i$$

  ein – q_B ist der Blinkzustand.
- In der Nebenrechnung u_i steht, welche Teilrechnung von $\mathcal{M}_L$ als nächste zu simulieren ist.

Also zählt $\mathcal{M}$ die $w \in \Sigma^*$ auf, für die $\mathcal{M}_L$ hält, und das sind gerade die $w \in L$. $\square$

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Theorem. Jede entscheidbare Sprache ist akzeptierbar.

Beweis

Sei L eine entscheidbare Sprache und $\mathcal{M}$ eine DTM, die L entscheidet.

Dann wird L akzeptiert von der DTM $\mathcal{M}'$,
die zunächst $\mathcal{M}$ simuliert und danach in eine Endlosschleife geht, falls $\mathcal{M}$ mit $h, \#N\underline{\#}$ endet.

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Theorem [Komplement einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar]
Das Komplement einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar.

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Theorem [Komplement einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar]
Das Komplement einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar.

Beweis

Sei L eine entscheidbare Sprache und $\mathcal{M}$ eine DTM, die L entscheidet.

Dann wird $\overline{L}$ entschieden von einer DTM $\mathcal{M}'$,
die genau wie $\mathcal{M}$ rechnet
und nur am Schluß die Antworten Y und N vertauscht. $\square$

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Theorem [Charakterisierung von Entscheidbarkeit]
Eine Sprache L ist genau dann entscheidbar, wenn
sie und ihr Komplement akzeptierbar sind.

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Theorem [Charakterisierung von Entscheidbarkeit]
Eine Sprache L ist genau dann entscheidbar, wenn
sie und ihr Komplement akzeptierbar sind.

Beweis

"$\Rightarrow$"

Sei L ist entscheidbar.

Zu zeigen: L und $\overline{L}$ sind akzeptierbar.

- L ist entscheidbar, also ist L akzeptierbar
- L ist entscheidbar, also ist $\overline{L}$ entscheidbar
- $\overline{L}$ ist entscheidbar, also ist $\overline{L}$ akzeptierbar

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Beweis (Fortsetzung)

"$\Leftarrow$"

Seien L und $\overline{L}$ akzeptierbar.

Zu zeigen: L ist entscheidbar.

- Sei $\mathcal{M}_1$ eine DTM, die L akzeptiert.
- Sei $\mathcal{M}_2$ eine DTM, die $\overline{L}$ akzeptiert.

Daraus konstruieren wir eine 2-DTM $\mathcal{M}$, die L entscheidet:

- $\mathcal{M}$ wird gestartet mit

  $s_0, \#w\underline{\#}$

  $\underline{\#}$
- $\mathcal{M}$ kopiert w auf Band 2.

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Beweis (Ende)

- M simuliert abwechselnd
  - einen Schritt von $\mathcal{M}_1$ auf Band 1 und
  - einen Schritt von $\mathcal{M}_2$ auf Band 2.
- Das tut $\mathcal{M}$, bis entweder $\mathcal{M}_1$ oder $\mathcal{M}_2$ hält.
- Eine von beiden muss halten: w gehört entweder zu L oder zu $\overline{L}$.
- Wenn $\mathcal{M}_1$ hält, dann hält $\mathcal{M}$ mit
  - $\#Y\underline{\#}$ auf Band 1 und
  - $\underline{\#}$ auf Band 2.
- Wenn $\mathcal{M}_2$ hält, dann hält $\mathcal{M}$ mit
  - $\#N\underline{\#}$ auf Band 1 und
  - $\underline{\#}$ auf Band 2. $\square$

Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- Entscheidbar/Aufzählbar
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- Unentscheidbarkeit