

# Grundlagen der Theoretischen Informatik

## 3. Endliche Automaten

24.04.2019

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: [sofronie@uni-koblenz.de](mailto:sofronie@uni-koblenz.de)

# Bis jetzt

---

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

# Jetzt

---

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

# 3. Endliche Automaten

---

# 3. Endliche Automaten

---

## Inhalt von Teil 3

- Vereinfachtes Modell eines Computers: **endlicher Automat**
- 
- 
- 
- 
-

# 3. Endliche Automaten

---

## Inhalt von Teil 3

- Vereinfachtes Modell eines Computers: **endlicher Automat**
- Die von endlichen Automaten erkannten **“rationalen”** Sprachen sind genau die Typ-3-Sprachen (**rechtslinear, regulär**)
- 
- 
- 
-

# 3. Endliche Automaten

---

## Inhalt von Teil 3

- Vereinfachtes Modell eines Computers: **endlicher Automat**
- Die von endlichen Automaten erkannten **“rationalen”** Sprachen sind genau die Typ-3-Sprachen (**rechtslinear**, **regulär**)
- **Determinierte** und **indeterminierte** endliche Automaten sind äquivalent
- **Pumping-Lemma** erlaubt, eine Sprache als nicht rational nachzuweisen.
- Es gibt Algorithmen, die **Probleme über endlichen Automaten** bzw. Typ-3-Sprachen lösen.
- Typ-3-Sprachen sind genau die, die durch **reguläre Ausdrücke** beschrieben werden können.

# 3. Endliche Automaten

---

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping-Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke



# 3. Endliche Automaten

---

- **Determinierte endliche Automaten (DEAs)**
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping-Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

# Determinierte endliche Automaten (DEAs)

---

# Beispiel

---

**Beispiel 1.** Die Sprache

$$L = \{aa\}\{ab\}^*\{c\}$$

ist regulär.

# Beispiel

---

**Beispiel 1.** Die Sprache

$$L = \{aa\}\{ab\}^*\{c\}$$

ist **regulär**.

Denn sie wird (z. B.) erzeugt von der **rechtslinearen** Grammatik

$$G = (\{S, A\}, \{a, b, c\}, R, S),$$

mit Regelmenge  $R$ :

$$S \rightarrow aaA$$

$$A \rightarrow abA \mid c$$

# Beispiel

---

**Beispiel 2.** Die Sprache aller durch 3 teilbaren Dezimalzahlen ist regulär.

Eine erzeugende Grammatik ist

$$G = (\{S, S_0, S_1, S_2\}, \{0, \dots, 9\}, R, S)$$

mit der Regelmenge  $R$ :

$$S \rightarrow 3S_0 \mid 6S_0 \mid 9S_0 \mid 1S_1 \mid 4S_1 \mid 7S_1 \mid 2S_2 \mid 5S_2 \mid 8S_2 \mid 0$$

$$S_0 \rightarrow 0S_0 \mid 3S_0 \mid 6S_0 \mid 9S_0 \mid 1S_1 \mid 4S_1 \mid 7S_1 \mid 2S_2 \mid 5S_2 \mid 8S_2 \mid \varepsilon$$

$$S_1 \rightarrow 0S_1 \mid 3S_1 \mid 6S_1 \mid 9S_1 \mid 1S_2 \mid 4S_2 \mid 7S_2 \mid 2S_0 \mid 5S_0 \mid 8S_0$$

$$S_2 \rightarrow 0S_2 \mid 3S_2 \mid 6S_2 \mid 9S_2 \mid 1S_0 \mid 4S_0 \mid 7S_0 \mid 2S_1 \mid 5S_1 \mid 8S_1$$

Ohne das  $\varepsilon$  in der zweiten Regel wäre nur die "0" als Terminalwort herleitbar.

# Endlicher Automat: Informell

---

Ein endlicher Automat testet, ob ein gegebenes  $w \in \Sigma^*$  in einer Sprache  $L$  liegt.

- **Lesekopf** erlaubt  $w$  zu lesen.  
Bewegt sich nur von links nach rechts.
- Endlich viele mögliche **interne Zustände**,  
immer einer davon ist der aktuelle Zustand
- Automat beginnt in einem **initialen Zustand**.
- Bei jedem gelesenen Buchstaben Übergang zu neuem aktuellem Zustand,  
in Abhängigkeit vom Buchstaben und dem alten Zustand
- Wenn am Ende von  $w$  ein **finaler Zustand** erreicht ist,  
ist  $w$  **akzeptiert** als Element von  $L$ , sonst nicht.
- Automat **stoppt** (auf jeden Fall) nach  $|w|$  Schritten

# Endlicher Automat: Modell eines einfachen Computers

---

## Endlicher Automat: Computer mit begrenztem Speicher

- Kann vom Band nur lesen  
⇒ kein externer Speicher
- Speichert nur den aktuellen Zustand ( $\approx$  Programmzähler)  
⇒ stark begrenzter interner Speicher

# Endlicher Automat: Darstellung als Graph

---

## Darstellung als Graph

- ein **Knoten** für jeden möglichen **Zustand**,
- **Kanten** sind mit Buchstaben beschriftet: Sie beschreiben **Zustandsänderungen**.
- **Initiale** Zustände werden mit einem **Pfeil** gekennzeichnet,
- **finale Zustände** mit einem **doppelten Kreis**.



# Endlicher Automat: Darstellung als Graph

---

**Beispiel: Sprache**  $\{w \mid \#_a(w) \text{ gerade}\} \subset \{a, b\}^*$

Der folgende endliche Automat erkennt die Sprache

$\{w \mid \#_a(w) \text{ gerade}\}$  über  $\Sigma = \{a, b\}$

der Wörter mit gerader Anzahl des Buchstabens "a".

# Endlicher Automat: Darstellung als Graph

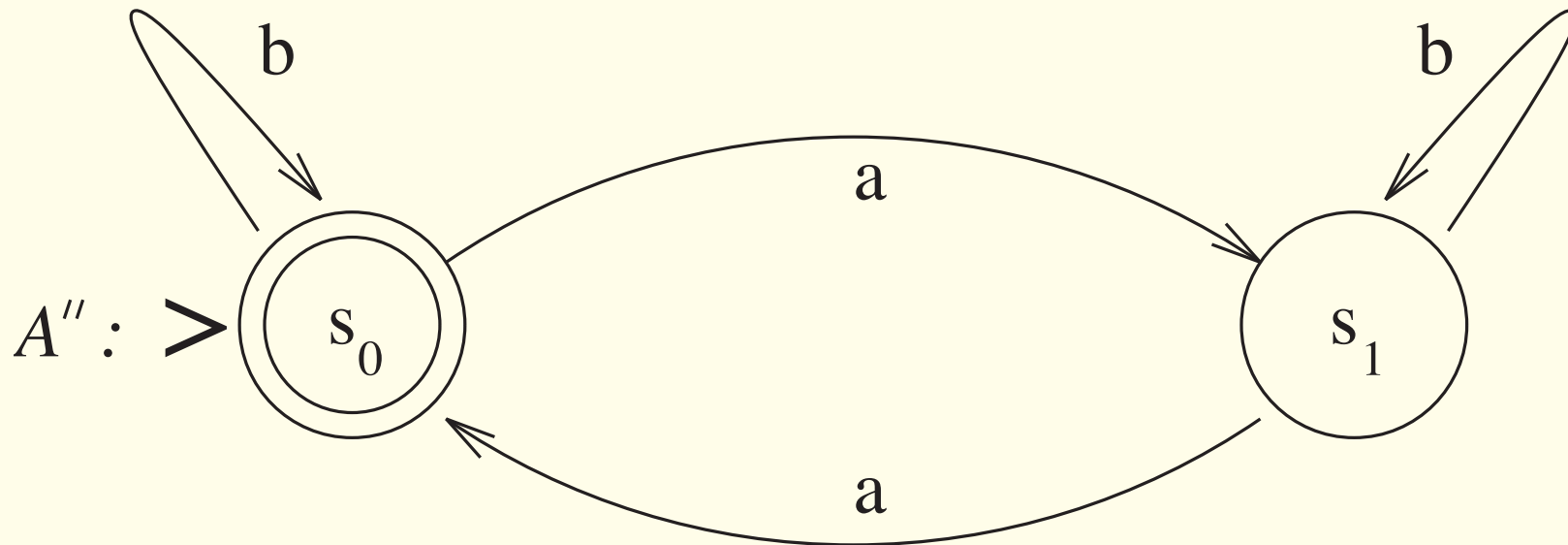
---

**Beispiel: Sprache**  $\{w \mid \#_a(w) \text{ gerade}\} \subset \{a, b\}^*$

Der folgende endliche Automat erkennt die Sprache

$\{w \mid \#_a(w) \text{ gerade}\}$  über  $\Sigma = \{a, b\}$

der Wörter mit gerader Anzahl des Buchstabens "a".



# Endlicher Automat: Definition

---

**Definition.** Ein endlicher Automat (e.a.) (finite automaton) ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F).$$

Dabei ist

- $K$  eine endliche Menge von **Zuständen**,
- $\Sigma$  ein **endliches Alphabet** (aus dessen Buchstaben die Eingabewörter bestehen können),
- $\delta : K \times \Sigma \rightarrow K$  die totale(!) **Übergangsfunktion**,
- $s_0 \in K$  der **Startzustand**, und
- $F \subseteq K$  die Menge der **finalen Zustände**.

# Endlicher Automat: Übergangsfunktion

---

## Bedeutung der Übergangsfunktion

$\delta(q, a) = q'$  bedeutet:

- Der Automat ist im Zustand  $q$ ,
- liest ein  $a$  und
- geht in den Zustand  $q'$  über.

# Endlicher Automat: Übergangsfunktion

---

## Bedeutung der Übergangsfunktion

$\delta(q, a) = q'$  bedeutet:

- Der Automat ist im Zustand  $q$ ,
- liest ein  $a$  und
- geht in den Zustand  $q'$  über.

**Wir erweitern  $\delta$  zu  $\delta^*$**

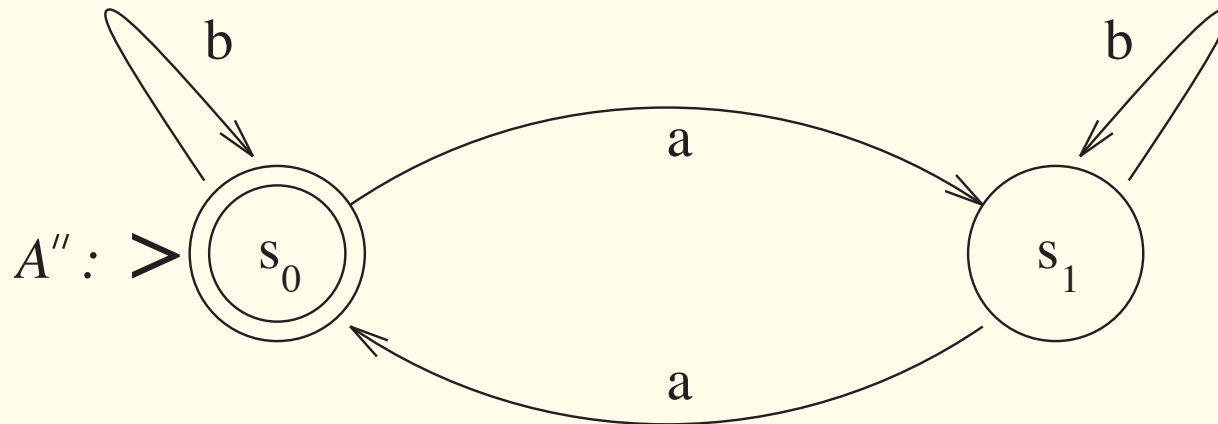
$\delta^* : K \times \Sigma^* \rightarrow K$  ist strukturell rekursiv über  $\Sigma^*$  definiert:

$$\begin{aligned}\delta^*(q, \varepsilon) &:= q \\ \delta^*(q, wa) &:= \delta(\delta^*(q, w), a)\end{aligned}$$

Wenn klar ist, was gemeint ist, wird  $\delta^*$  auch einfach als  $\delta$  geschrieben.

# Endlicher Automat: Beispiel

---

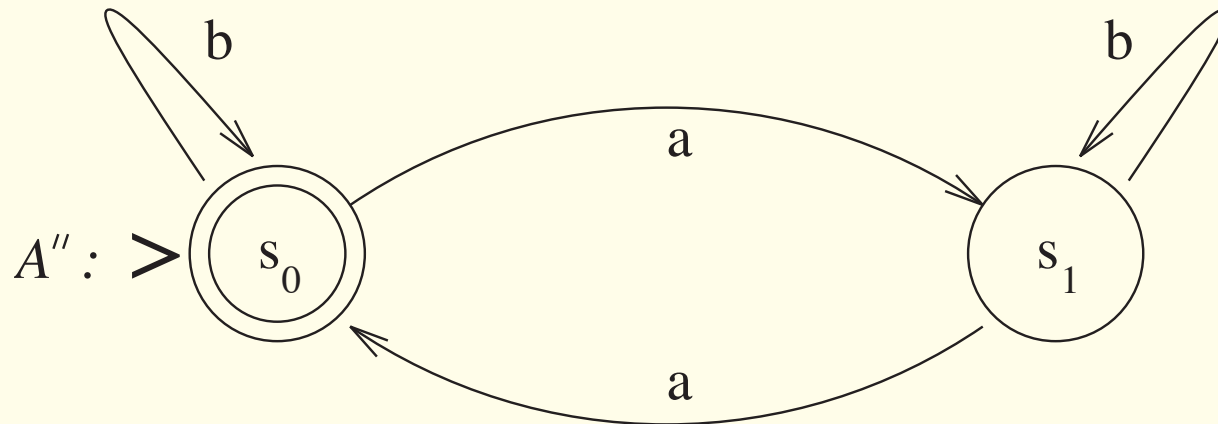


Dieser Automat akzeptiert die Sprache

$$\{w \mid \#_a(w) \text{ gerade}\} \subset \{a, b\}^* \text{ (Beispiel Seite 18)}$$

# Endlicher Automat: Beispiel

---



Formal hat er die Form:  $\mathcal{A} = (\{s_0, s_1\}, \{a, b\}, \delta, s_0, \{s_0\})$  mit

$$\delta(s_0, a) = s_1 \quad \delta(s_1, a) = s_0$$

$$\delta(s_0, b) = s_0 \quad \delta(s_1, b) = s_1$$

# Endlicher Automat: Übergangsfunktion

---

## Beispiel für $\delta^*$

$$\begin{aligned}\delta^*(s_0, aab) &= \delta(\delta^*(s_0, aa), b) \\ &= \delta(\delta(\delta^*(s_0, a), a), b) \\ &= \delta(\delta(\delta(\delta^*(s_0, \varepsilon), a), a), b) \\ &= \delta(\delta(\delta(s_0, a), a), b) \\ &= \delta(\delta(s_1, a), b) \\ &= \delta(s_0, b) \\ &= s_0\end{aligned}$$



# Endlicher Automat: Akzeptierte Sprache

---

## **Definition (Von einem endlichen Automaten akzeptierte Sprache)**

Die von einem Automaten  $\mathcal{A}$  **akzeptierte** Sprache, ist definiert als

$$L(\mathcal{A}) := \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(s_0, w) \in F\}$$

# Endlicher Automat: Akzeptierte Sprache

---

## Definition (Von einem endlichen Automaten akzeptierte Sprache)

Die von einem Automaten  $\mathcal{A}$  **akzeptierte** Sprache, ist definiert als

$$L(\mathcal{A}) := \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(s_0, w) \in F\}$$

## Definition (Von endlichen Automaten akzeptierte Sprachen)

Die Menge

$$\mathbf{RAT} := \{L \mid \text{es gibt einen endlichen Automaten } \mathcal{A} \text{ mit } L = L(\mathcal{A})\}$$

der von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen  
heißt Menge der **rationalen** Sprachen

# Endlicher Automat: Akzeptierte Sprache

---

## Definition (Von einem endlichen Automaten akzeptierte Sprache)

Die von einem Automaten  $\mathcal{A}$  **akzeptierte** Sprache, ist definiert als

$$L(\mathcal{A}) := \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(s_0, w) \in F\}$$

## Definition (Von endlichen Automaten akzeptierte Sprachen)

Die Menge

$$\mathbf{RAT} := \{L \mid \text{es gibt einen endlichen Automaten } \mathcal{A} \text{ mit } L = L(\mathcal{A})\}$$

der von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen  
heißt Menge der **rationalen** Sprachen

Wir zeigen demnächst: **RAT** = Menge der regulären Sprachen

# Endlicher Automat: UML State Chart

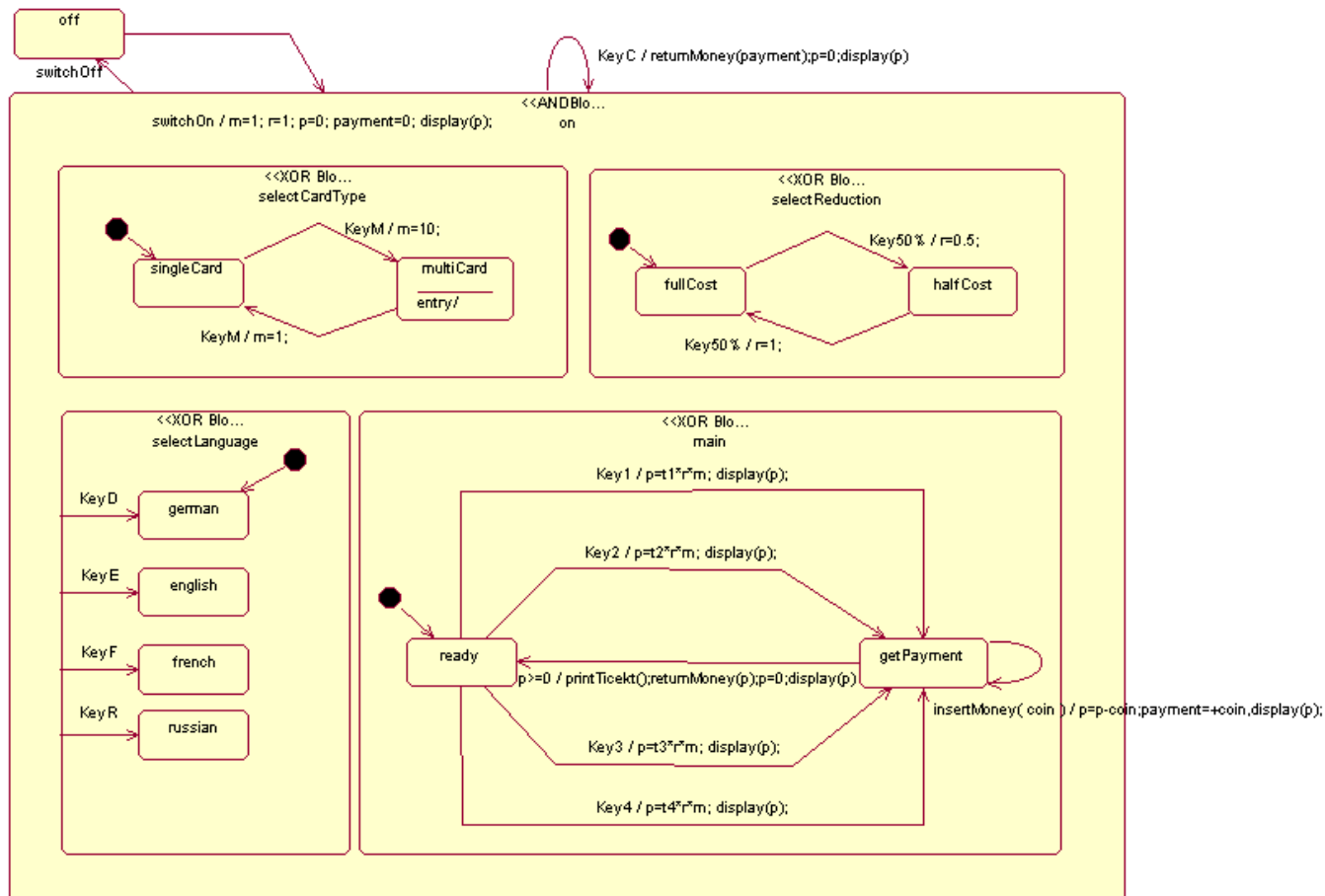
---

**UML State Charts** sind eine (erweiterte) Form endlicher Automaten

# Endlicher Automat: UML State Chart

**UML State Charts** sind eine (erweiterte) Form endlicher Automaten

## Beispiel:



# Endliche Automaten: Weitere Beispiele

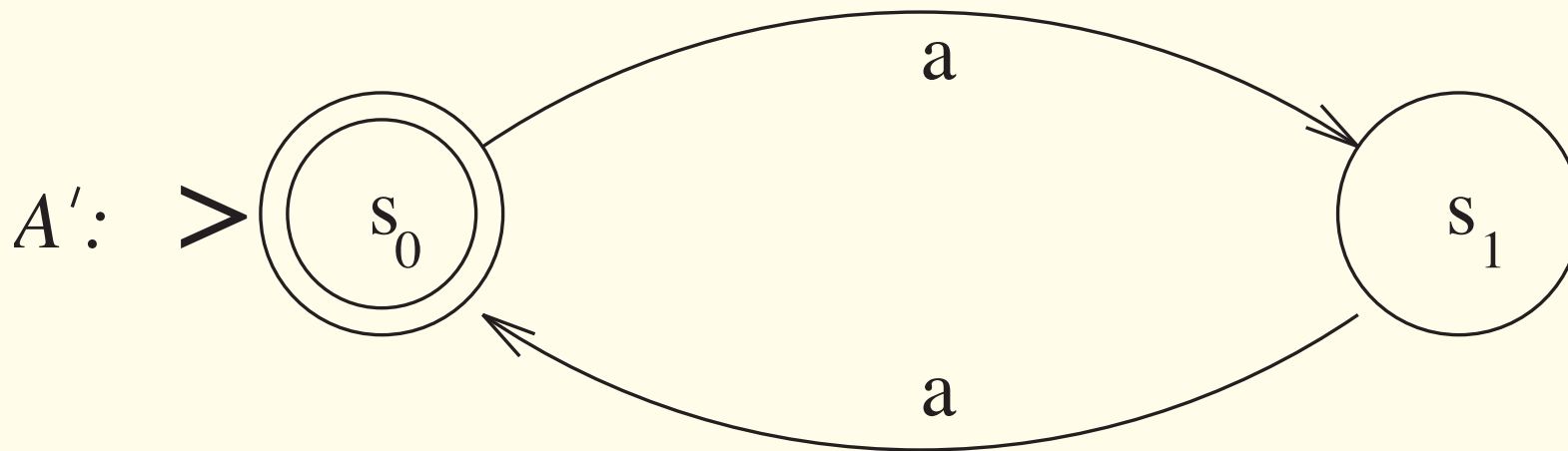
---

**Beispiel.** Die Sprache aller Wörter mit gerader Anzahl von  $a$  über dem (kleineren) Alphabet  $\Sigma = \{a\}$  wird akzeptiert von

# Endliche Automaten: Weitere Beispiele

---

**Beispiel.** Die Sprache aller Wörter mit gerader Anzahl von  $a$  über dem (kleineren) Alphabet  $\Sigma = \{a\}$  wird akzeptiert von:



# Endliche Automaten: Weitere Beispiele

---

**Beispiel.** Die Sprache

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ enthält genau zwei Einsen}\}$$

wird akzeptiert von dem folgenden endlichen Automaten:



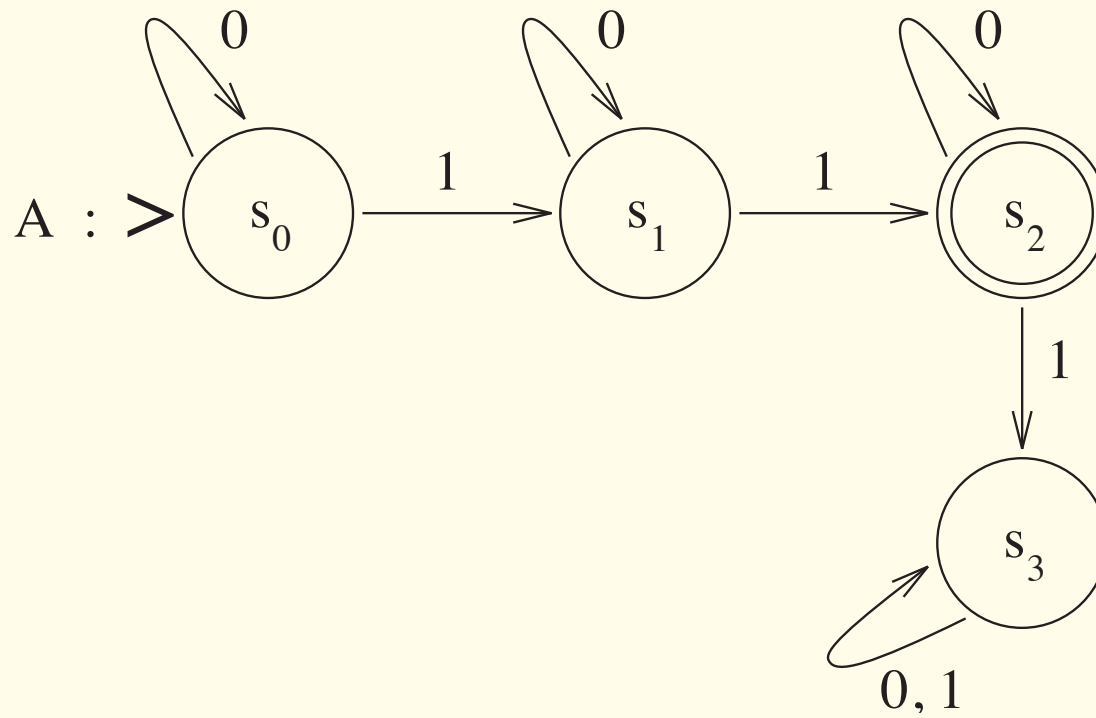
# Endliche Automaten: Weitere Beispiele

---

**Beispiel.** Die Sprache

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ enthält genau zwei Einsen}\}$$

wird akzeptiert von dem folgenden endlichen Automaten:



# Endliche Automaten: Weitere Beispiele

---

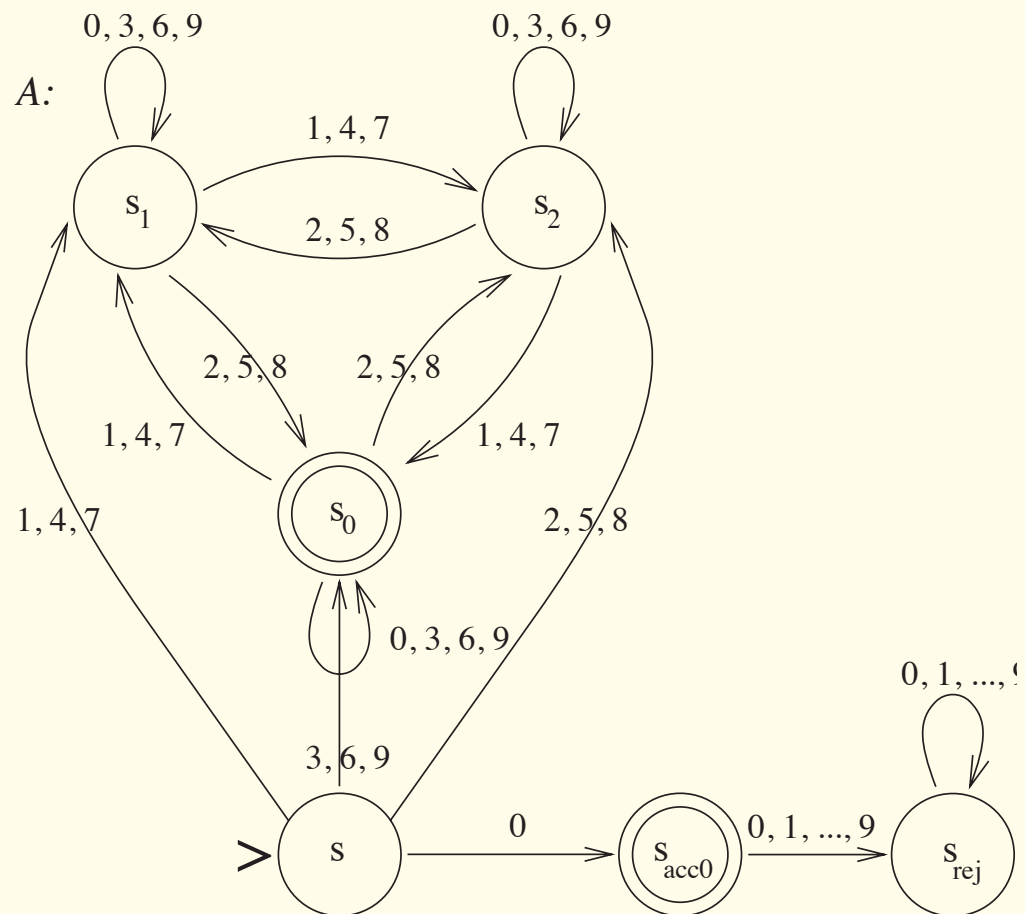
## Beispiel

Die Sprache aller durch 3 teilbaren Dezimalzahlen wird akzeptiert durch:

# Endliche Automaten: Weitere Beispiele

## Beispiel

Die Sprache aller durch 3 teilbaren Dezimalzahlen wird akzeptiert durch:



# Bis jetzt

---

- **Determinierte endliche Automaten (DEAs)**
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping-Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke