

# Grundlagen der Theoretischen Informatik

## 3. Endliche Automaten (IV)

8.05.2019

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: [sofronie@uni-koblenz.de](mailto:sofronie@uni-koblenz.de)

# Übersicht

---

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

# Jetzt

---

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

# Pumping-Lemma: Formal

---

## Theorem (Pumping-Lemma für $\mathcal{L}_3$ -Sprachen)

Sei  $L \in \mathbf{RAT}$ . Dann existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass:

Für alle

$$x \in L \quad \text{mit} \quad |x| \geq n$$

existiert eine Zerlegung

$$x = uvw \quad u, v, w \in \Sigma^*$$

mit

- $|v| \geq 1$
- $|v| < n$
- $uv^m w \in L$  für alle  $m \in \mathbb{N}$

# Pumping-Lemma: Umkehrung

---

## Korollar.

Wenn für eine Sprache das Pumping-Lemma **nicht** gilt, dann ist sie **nicht** regulär.

## Vorsicht

- Es gibt nicht-reguläre Sprachen, für die das Pumping-Lemma gilt.  
(Beispiel:  $L = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 1\} \cup \{b^m c^n \mid m, n \geq 0\}$ )
- Daraus, dass das Pumping-Lemma für eine Sprache gilt, folgt **nicht**, dass sie regulär ist.

# Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

---

**Beispiele** (letzte Vorlesung)

Folgende Sprachen sind **nicht regulär**:

1.  $L_1 := \{a^i b a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$  (Beweis: letzte Vorlesung)

2.  $L_2 := \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$

# Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

---

Beweis der Nichtregularität von  $L_2 := \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$

# Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

---

Beweis der Nichtregularität von  $L_2$

$$L_2 := \{ a^p \mid p \text{ ist Primzahl} \}$$

**Annahme:**  $L_2$  ist regulär.

Dann gilt für  $L_2$  das Pumping-Lemma.

Sei  $n$  die Zahl aus dem Pumping-Lemma.

Dann muss sich jedes Wort

$$a^p \in L_2 \quad \text{mit} \quad p \geq n$$

aufpumpen lassen.

Sei  $a^p = uvw$  eine passende Zerlegung laut Lemma.



# Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

---

Beweis der Nichtregularität von  $L_2$  (Forts.)

Sei

$$a^p = uvw = a^i a^j a^k$$

also

$$i + j + k = p \geq n \quad \text{und} \quad 0 < j < n$$

# Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

---

Beweis der Nichtregularität von  $L_2$  (Forts.)

**Fall 1:**  $i + k > 1$ .

Pumpe  $(i + k)$  mal:

$$uv^{i+k}w = a^i a^{j(i+k)} a^k$$

Nach Pumping-Lemma liegt dieses Wort in  $L_2$ , d. h.

$$i + j(i + k) + k \quad \text{prim}$$

Aber **Widerspruch**:

$$\begin{aligned} i + j(i + k) + k &= i + ij + jk + k \\ &= i(1 + j) + (j + 1)k \\ &= i(1 + j) + k(1 + j) \\ &= (i + k)(1 + j) \end{aligned}$$

# Pumping-Lemma: Anwendung der Umkehrung

---

Beweis der Nichtregularität von  $L_2$  (Forts.)

**Fall 2:**  $i + k = 1$ .

Pumpe  $(j + 2)$  mal:

$$uv^{j+2}w = a^i a^{j(j+2)} a^k$$

Nach Pumping-Lemma liegt dieses Wort in  $L_2$ , d. h.

$$i + j(j + 2) + k \quad \text{prim}$$

Aber **Widerspruch!**:

$$\begin{aligned} i + j(j + 2) + k &= 1 + j(j + 2) \\ &= 1 + 2j + j^2 \\ &= (1 + j)^2 \end{aligned}$$

**Also:** Annahme falsch.  $L_2$  nicht regulär.  $\square$

# Pumping-Lemma: Beweis

---

## Theorem (Pumping-Lemma für $\mathcal{L}_3$ -Sprachen)

Sei  $L \in \mathbf{RAT}$ . Dann existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass:

Für alle

$$x \in L \quad \text{mit} \quad |x| \geq n$$

existiert eine Zerlegung

$$x = uvw \quad u, v, w \in \Sigma^*$$

mit

- $|v| \geq 1$
- $|v| < n$
- $uv^m w \in L$  für alle  $m \in \mathbb{N}$

# Pumping-Lemma: Beweis

---

Beweis. Sei  $L$  eine reguläre Sprache.

## 1. Fall: $L$ ist endlich.

Sei  $w_{max}$  das längste Wort in  $L$ .

Wir setzen

$$n := |w_{max}| + 1$$

Dann gibt es keine Wörter  $x \in L$ , für die  $|x| \geq n$  gilt.

Also gilt dann das Pumping-Lemma trivialerweise.

# Pumping-Lemma: Beweis

---

Beweis (Fortsetzung)

**2. Fall:  $L$  ist unendlich.**

Sei

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$$

ein endlicher Automat (DEA), der  $L$  akzeptiert.

Wir setzen

$$n := |K| + 1$$

# Pumping-Lemma: Beweis

---

Beweis (Fortsetzung)

Wir betrachten ein beliebiges Wort

$$x = x_1x_2 \dots x_t \in L \quad \text{mit} \quad |x| = t \geq n, \quad x_i \in \Sigma$$

**Zu zeigen:**  $x$  lässt sich aufpumpen.

Seien

$$q_0, q_1, \dots, q_t \in K,$$

die Zustände, die beim Akzeptieren von  $x$  durchlaufen werden:

$$q_0 = s_0, \quad q_t \in F, \quad \delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1} \quad \forall 0 \leq i \leq t - 1$$

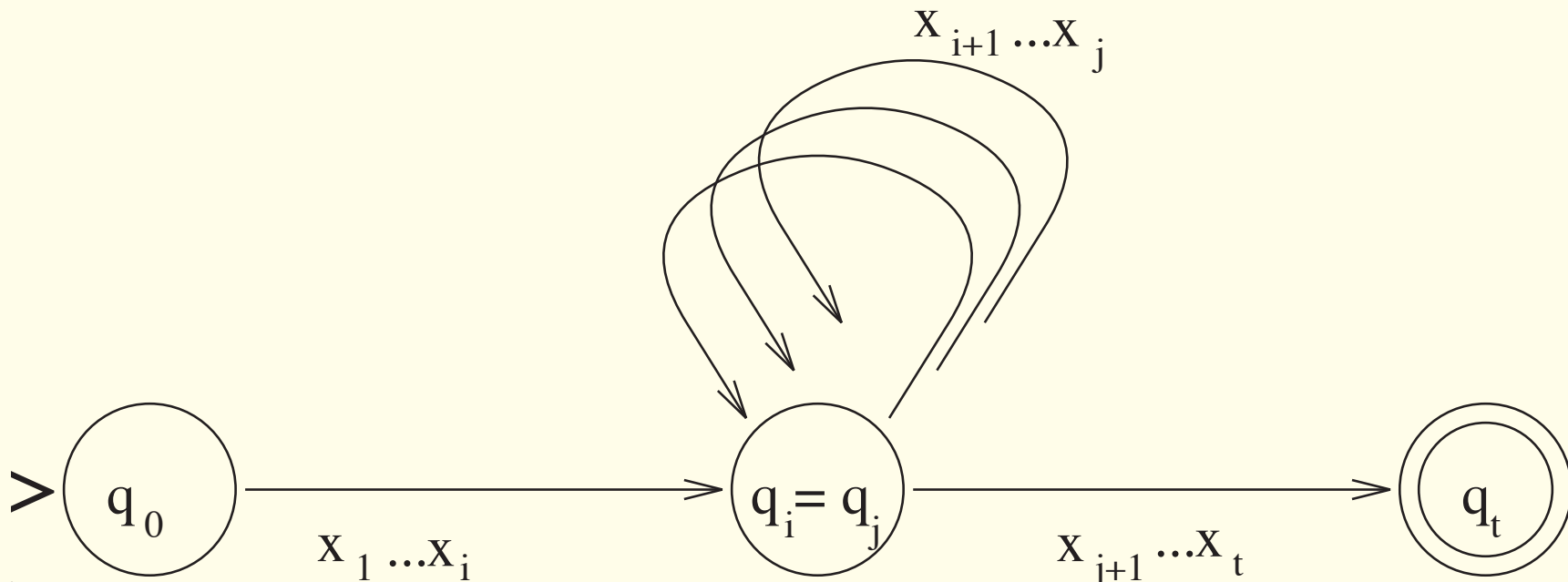
# Pumping-Lemma: Beweis

---

Beweis (Fortsetzung)

Da  $t \geq |K| + 1$ , muss es  $0 \leq i < j \leq t - 1$  geben mit

- $q_i = q_j$
- $|j - i| \leq |K|$





# Pumping-Lemma: Beweis

---

Beweis (Fortsetzung)

Wähle nun:

$$\left. \begin{array}{l} u \quad x_1 \dots x_i \\ v \quad x_{i+1} \dots x_j \\ w \quad x_{j+1} \dots x_t \end{array} \right\} x = uvw \text{ mit } 1 \leq |v| < n.$$

Damit:

- Für alle  $m \geq 0$  gibt es Wege

$$q_0, \dots, q_{i-1}, \underbrace{q_i, \dots, q_j = q_i, \dots, q_j = \dots = q_i \dots, q_j, q_{j+1}, \dots, q_t}_{m \text{ mal}}$$

- Also:  $uv^m w$  wird von  $\mathcal{A}$  akzeptiert.
- Also:  $uv^m w \in L \quad \square$

# Pumping-Lemma: Stärkere Variante

---

## Theorem (Pumping-Lemma für $\mathcal{L}_3$ -Sprachen, stärkere Variante)

Sei  $L \in \mathbf{RAT}$ . Dann existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass:

Für alle

$$x \in L \quad \text{mit} \quad |x| \geq n$$

existiert eine Zerlegung

$$x = uvw \quad u, v, w \in \Sigma^*$$

mit

- $|v| \geq 1$
- $|uv| < n$  (statt  $|v| < n$ )
- $uv^m w \in L$  für alle  $m \in \mathbb{N}$

# Pumping-Lemma: Anwendung der stärkeren Variante

---

## Beispiel (Palindrome)

Die Sprache der Palindrome

$$L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

ist nicht regulär

- Beweis gelingt **nicht** mit der schwächeren Variante des PL (die schwächere Version gilt für die Sprache)
- Beweis **gelingt** mit der stärkeren Varianten des PL

# Pumping-Lemma: Anwendung der stärkeren Variante

---

## Beispiel (Palindrome)

Die Sprache der Palindrome

$$L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

ist nicht regulär

**Annahme:**  $L$  ist regulär. Dann gilt für  $L_1$  das Pumping-Lemma. Sei  $n$  die Zahl aus dem Pumping-Lemma.

Dann muss sich das Wort  $a^n bba^n \in L$  aufpumpen lassen (da  $|a^n bba^n| \geq n$ ).

Sei  $a^n bba^n = uvw$  eine passende Zerlegung laut Lemma.

Da  $|uv| < n$ , ist  $u = a^i$ ,  $v = a^j$ ,  $w = a^k bba^n$ , wobei  $j > 0$  und  $i + j + k = n$

Aber dann  $uv^0w = a^{i+k} bba^n \notin L$ , da  $i + k < n$ . Widerspruch.

# Übersicht

---

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- **Abschlusseigenschaften und Wortprobleme**
- Rational = Reguläre Ausdrücke

# Abschlusseigenschaften und Wortprobleme

---

# Abschlusseigenschaften

---

**Lemma.** Seien zwei reguläre Sprachen  $L, L'$  gegeben.

Dann kann man folgende endlichen Automaten konstruieren:

- $\mathcal{A}_{\neg}$  akzeptiert  $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$
- $\mathcal{A}_{\cup}$  akzeptiert  $L \cup L'$
- $\mathcal{A}_{\circ}$  akzeptiert  $L \circ L'$
- $\mathcal{A}_{*}$  akzeptiert  $L^*$
- $\mathcal{A}_{\cap}$  akzeptiert  $L \cap L'$

# Abschlusseigenschaften

---

Idee:

1)  $L = L(\mathcal{A})$  mit  $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \delta, s_0, F)$

- $\mathcal{A}_{\neg} = (K, \Sigma, \delta, s_0, K \setminus F)$

2)  $L = L(\mathcal{A}), L' = L(\mathcal{A}')$  mit  $\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F), \mathcal{A}' = (K', \Sigma', \Delta', I', F')$

- $\mathcal{A}_{\cup} = (K \cup K', \Sigma, \Delta \cup \Delta', I \cup I', F \cup F')$
- $\mathcal{A}_{\circ} = (K \cup K', \Sigma, \Delta \cup \Delta' \cup (F \times \{\varepsilon\}) \times I', I, F')$
- $\mathcal{A}_{*} = (K \cup \{s_{neu}\}, \Sigma, \Delta \cup (F \times \{\varepsilon\}) \times I, I \cup \{s_{neu}\}, F \cup \{s_{neu}\})$
- $L \cap L' = \overline{(\bar{L} \cup \bar{L}')}$



# Abschlusseigenschaften

---

**Theorem.** Wenn  $L, L'$  reguläre Sprachen sind, dann sind auch

- $\bar{L}$
- $L \cup L'$
- $L \circ L'$
- $L^*$
- $L \cap L'$

reguläre Sprachen.

**Beweis.**

Gemäß Lemma existieren Automaten, die diese Sprachen akzeptieren.

Also sind sie regulär.

# Anwendung

---

## Beispiele:

1.  $L_{eq} = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  nicht regulär.

# Anwendung

---

## Beispiele:

1.  $L_{eq} = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  nicht regulär.

**Beweis.** Annahme:  $L_{eq}$  regulär

Da  $\{a^m cb^n \mid m, n \geq 0\}$  regulär, wäre dann auch

$L_{eq} \cap \{a^m cb^n \mid m, n \geq 0\}$  regulär.

Aber  $L_{eq} \cap \{a^m cb^n \mid m, n \geq 0\} = \{a^i cb^i \mid i \geq 0\}$  nicht regulär.

# Anwendung

---

## Beispiele:

2.  $L_{neq} = \{w \mid \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$  nicht regulär.

# Anwendung

---

## Beispiele:

2.  $L_{neq} = \{w \mid \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$  nicht regulär.

Beweis.  $L_{eq} = \overline{L_{neq}}$ .

Falls  $L_{neq}$  regulär wäre, dann wäre auch  $L_{eq}$  regulär. Widerspruch.

# Anwendung

---

## Beispiele:

3. Die Dycksprache  $D_k$  ist nicht regulär

# Anwendung

---

## Beispiele:

3. Die Dycksprache  $D_k$  ist nicht regulär

### Definition

Gegeben:

- $k \in \mathbb{N}$
- $\Sigma_k := \{x_1, \bar{x}_1, x_2, \dots, x_k, \bar{x}_k\}$  ein Alphabet mit  $2k$  Symbolen

Die Dycksprache  $D_k$  ist die kleinste Menge, die folgende Bedingungen erfüllt:

1.  $\epsilon \in D_k$ ,
2. Falls  $w \in D_k$ , so auch  $x_i w \bar{x}_i$ .
3. Falls  $u, v \in D_k$ , so auch  $uv$ .

Interpretiert man die  $x_i$  als öffnende und die  $\bar{x}_i$  als zugehörige schließende Klammern, so kann man die Dycksprache als die **Menge aller korrekten Klammerausdrücke** sehen.

# Anwendung

---

## Beispiele:

3. Die Dycksprache  $D_k$  ist nicht regulär

Beweis:

$$D_k \cap \{x_i\}^* \{\bar{x}_i\}^* = \{x_i^n \bar{x}_i^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

- $\{x_i\}^* \{\bar{x}_i\}^*$  ist regulär
- $\{x_i^n \bar{x}_i^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär (Pumping Lemma)



# Anwendung

---

## Beispiele:

$$4. L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

**Beweis.** Annahme:  $L$  regulär.

Es ist leicht zu sehen, dass  $\{a^m b b a^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$  regulär.

Dann ist auch  $L \cap \{a^m b b a^n \mid m, n \in \mathbb{N}\} = \{a^n b b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  regulär

Widerspruch:  $\{a^n b b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ist nicht regulär (Pumping Lemma, stärkere Version).