Grundlagen der Theoretischen Informatik

3. Endliche Automaten (V)

9.05.2019

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Letzte Vorlesung

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping-Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Abschlusseigenschaften

Theorem. Wenn L, L' reguäre Sprachen sind, dann sind auch

- $\overline{L}$
- $L \cup L'$
- $L \circ L'$
- L^*
- $L \cap L'$

reguläre Sprachen.

Beweis.

Gemäß Lemma existieren Automaten, die diese Sprachen akzeptieren.

Also sind sie regulär.

Anwendung

Beispiele (letzte Vorlesung):

1. $L_{eq} = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ nicht regulär.
2. $L_{neq} = \{w \mid \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$ nicht regulär.
3. Die Dycksprache D_k ist nicht regulär

Anwendung

Beispiele:

4. $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Beweis. Annahme: L regulär.

Es ist leicht zu sehen, dass $\{a^m bba^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ regulär.

Dann ist auch $L \cap \{a^m bba^n \mid m, n \in \mathbb{N}\} = \{a^n bba^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ regulär

Widerspruch: $\{a^n bba^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär (Pumping Lemma, stärkere Version).

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping-Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational = Reguläre Ausdrücke

Wortprobleme

Lemma. Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat.

Es ist entscheidbar, ob die Sprache $L(\mathcal{A})$

1. leer ist.
2. unendlich ist.

Wortprobleme

Lemma. Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat.

Es ist entscheidbar, ob die Sprache $L(\mathcal{A})$

1. leer ist.
2. unendlich ist.

Korollar

Sei G eine rechtslineare Grammatik.
Es ist entscheidbar, ob die Sprache $L(G)$

1. leer ist.
2. unendlich ist.

Wortprobleme

Beweis.

Zu 1.: $L(\mathcal{A})$ ist nicht leer

$\underline{\text{gdw}}$

Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand.

Wortprobleme

Beweis.

Zu 1.: $L(\mathcal{A})$ ist nicht leer

gdw

Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand.

Zu 2.: $L(\mathcal{A})$ ist unendlich

gdw

Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand, der einen Zyklus enthält.

Beides ist leicht zu überprüfen.

Wortprobleme

Lemma.

Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ endliche Automaten.

Es ist entscheidbar, ob

(1) $L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2) = \emptyset$

(2) $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$

Wortprobleme

Beweis.

Seien $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ endliche Automaten.

(1) Man kann zu $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ einen endlichen Automaten $\mathcal{A}_\cap$ konstruieren mit $L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2) = L(\mathcal{A}_\cap)$.

Die Frage, ob $L(\mathcal{A}_\cap) = \emptyset$ ist entscheidbar.

(2) Man kann zu $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ einen endlichen Automaten $\mathcal{A}_=$ konstruieren mit

$$L(\mathcal{A}_=) \;=\; (L(\mathcal{A}_1) \;\cap\; \overline{L(\mathcal{A}_2)}) \cup (\overline{L(\mathcal{A}_1)} \cap L(\mathcal{A}_2))$$

Es gilt

$$L(\mathcal{A}_=) = \emptyset \quad \underline{\text{gdw}} \quad L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$$

Dies ist entscheidbar.

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping-Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Rational = Reguläre Ausdrücke

Hauptsatz von Kleene

Theorem (Hauptsatz von Kleene)
Die durch endliche Automaten akzeptierten Sprachen sind genau die, die man durch reguläre Ausdrücke beschreiben kann.

Reminder: Reguläre Ausdrücke

Definition (Reguläre Ausdrücke)

Menge $\mathfrak{Reg}_\Sigma$ der **regulären Ausdrücke** (über Σ) ist definiert durch:

1. 0 ist ein regulärer Ausdruck
2. Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdruck
3. Sind r und s reguläre Ausdrücke, so auch
   - $(r + s)$ (Vereinigung),
   - (rs) (Konkatenation),
   - (r^*) (Kleene Stern)

Klammern können weggelassen werden, dann

- * hat Vorrang vor Konkatenation
- Konkatenation hat Vorrang vor $+$

Reguläre Ausdrücke

Definition (Semantik regulärer Ausdrücke])
Ein regulärer Ausdruck r stellt eine Sprache $\mathfrak{I}(r)$ über Σ wie folgt dar:

$$\begin{array}{rcll} \mathfrak{I}(0) & := & \emptyset & \\ \mathfrak{I}(a) & := & \{a\} & \text{für } a \in \Sigma \\ \mathfrak{I}(r+s) & := & \mathfrak{I}(r) \cup \mathfrak{I}(s) & \\ \mathfrak{I}(rs) & := & \mathfrak{I}(r)\mathfrak{I}(s) & \\ \mathfrak{I}(r^*) & := & \mathfrak{I}(r)^* & \end{array}$$

Wir benutzen auch das Makro ...

$$1 := 0^*$$

Es gilt: $\mathfrak{I}(1) = \{\varepsilon\}$

Hauptsatz von Kleene

Theorem (Hauptsatz von Kleene)
Die durch endliche Automaten akzeptierten Sprachen sind genau die, die man durch reguläre Ausdrücke beschreiben kann.

Hauptsatz von Kleene

Theorem (Hauptsatz von Kleene)
Die durch endliche Automaten akzeptierten Sprachen sind genau die, die man durch reguläre Ausdrücke beschreiben kann.

Beweis.

„$\Rightarrow$“ (schwierigere Richtung)

Gegeben ein DEA $\mathcal{A}$.

Zustände von $\mathcal{A}$ seien $q_1, \ldots, q_n$.

O.B.d.A. sei q_1 der initiale Zustand von $\mathcal{A}$

Induktion über die **Kompliziertheit** des Akzeptierens

Hauptsatz von Kleene

Beweis.

„$\Rightarrow$“ (schwierigere Richtung)

Gegeben ein DEA $\mathcal{A}$.

Zustände von $\mathcal{A}$ seien $q_1, \ldots, q_n$.

O.B.d.A. sei q_1 der initiale Zustand von $\mathcal{A}$

Induktion über die **Kompliziertheit** des Akzeptierens

Dafür sei genauer:

$$
\begin{aligned}
R_{i,j}^k := \{w \in \Sigma^* : \quad & \delta^*(q_i, w) = q_j \text{ und für alle Präfixe } u \text{ von } w \\
& \text{mit } \varepsilon \neq u \neq w \text{ gilt } \delta^*(q_i, u) \in \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}\,\}
\end{aligned}
$$

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis (Forts.)

Offensichtlich ist

$$L(\mathcal{A}) = \bigcup_{q_f \in F} R^n_{1,f}$$

Es genügt zu zeigen:

Alle Mengen $R^n_{1,f}$ sind durch reguläre Ausdrücke beschreibbar.

Dazu: Durch Induktion über k (an der Tafel):

Für alle $1 \leq i, j \leq n$: $R^k_{1,j}$ ist durch einen regulären Ausdruck beschreibb.

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis (Forts.) Dazu: Durch Induktion über k (an der Tafel):

Für alle $1 \leq i, j \leq n$: $\quad R^k_{1,j}$ ist durch einen regulären Ausdruck beschreibb.

Induktionsbasis k = 0

$$R^0_{ij} = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & \text{falls } i \neq j \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\varepsilon\} & \text{falls } i = j \end{cases}$$

Induktionsvoraussetzung $R^k_{ij} \in \mathfrak{Reg}_\Sigma$

Induktionsschritt Zu zeigen: $R^{k+1}_{ij} \in \mathfrak{Reg}_\Sigma$

$$R^{k+1}_{ij} = R^k_{ij} \cup R^k_{i,k+1}(R^k_{k+1,k+1})^* R^k_{k+1,j}$$

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis (Forts.)

„$\Leftarrow$**“** (einfachere Richtung)

Durch **Induktion** über den **Aufbau** regulärer Ausdrücke:

Zu jedem regulären Ausdruck gibt es einen äquivalenten ε-NDEA

(an der Tafel)

Übersicht

- Determinierte endliche Automaten (DEAs)
- Indeterminierte endliche Automaten (NDEAs)
- Automaten mit epsilon-Kanten
- Endliche Automaten akzeptieren genau die Typ-3-Sprachen
- Pumping Lemma
- Abschlusseigenschaften und Wortprobleme
- Rational $=$ Reguläre Ausdrücke

Bis jetzt

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP