

Grundlagen der Theoretischen Informatik

4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen (IV)

23.05.2019

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Übersicht

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

Letzte Vorlesung

Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Pushdown-Automaten (PDAs)

Grammatiken vs. Automaten

Erzeugende Grammatiken– akzeptierende Automaten

Erinnerung: Reguläre Sprachen

- werden erzeugt von rechtslinearen Grammatiken
- werden akzeptiert von endlichen Automaten

Grammatiken vs. Automaten

Erzeugende Grammatiken– akzeptierende Automaten

Erinnerung: Reguläre Sprachen

- werden erzeugt von rechtslinearen Grammatiken
- werden akzeptiert von endlichen Automaten

Jetzt: Kontextfreie Sprachen

- werden erzeugt von kontextfreien Grammatiken
- werden akzeptiert von **Pushdown-Automaten**

Idee des Push-Down-Automaten

Beispiel

Die „prototypische“ cf-Sprache

$$\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

- Endliche Automaten reichen nicht aus.
- Sie können sich nicht merken, wie oft sie einen Zustand durchlaufen haben.
- Für $a^n b^n$ muss man aber **mitzählen**.

Idee des Push-Down-Automaten

Idee: Wie kann man diese Sprache akzeptieren?

- Weitere Informationen auf dem **Stack** sichern
- Später **zurückholen**
- Ähnlich einem “Prozeduraufruf”
- Grammatikregel wie $S \rightarrow aAb$ entspricht Aufruf einer Prozedur für das A .

Idee des Push-Down-Automaten

Idee: Wie kann man diese Sprache akzeptieren?

- Weitere Informationen auf dem **Stack** sichern
- Später **zurückholen**
- Ähnlich einem “Prozeduraufruf”
- Grammatikregel wie $S \rightarrow aAb$ entspricht Aufruf einer Prozedur für das A .

Stack, Stapel, Keller

- Last in, first out
- Zuletzt gespeicherte Information liegt immer “obenauf”
- Beliebig viel Information kann gespeichert werden
(Aber kein beliebiger Zugriff!)

Push-Down-Automat

Push-Down-Automat (PDA): Informell

- Wie endlicher Automat, aber **zusätzlich** einen Stack
- Übergangsrelation bezieht das oberste Stacksymbol in den Übergang ein
- Bei Zustandsübergang: lesen und schreiben auf Stack

Push-Down-Automat

Definition(Push-Down-Automat)

Ein **Push-Down-Automat (PDA)** ist ein Tupel

$$\mathcal{M} = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s_0, Z_0, F)$$

Dabei ist:

K eine endliche Menge von Zuständen

Σ das Eingabealphabet

Γ das Stack- oder Kellularphabet

$s_0 \in K$ der Startzustand

$Z_0 \in \Gamma$ das Anfangssymbol im Keller

$F \subseteq K$ eine Menge von finalen Zuständen

Δ die Zustandsübergangsrelation,
eine endliche Relation: $\Delta \subset (K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma) \times (K \times \Gamma^*)$

Push-Down-Automat

Arbeitsschritt eines PDA

In Abhängigkeit

- vom aktuellen Zustand
- vom nächsten Eingabezeichen (oder auch unabhängig davon)
- vom obersten Kellersymbol

geschieht folgendes

- nächstes **Eingabezeichen** wird **gelesen oder nicht** (bei ε),
- das oberste **Kellersymbol** wird **entfernt**,
- der **Zustand** wird **geändert**,
- es werden null oder mehr **Zeichen auf den Keller** geschoben
Bei neuem Keller-Wort $\gamma = A_1 \dots A_n$ wird A_n zuerst auf den Keller geschoben usw., so dass am Schluss A_1 obenauf liegt.

Push-Down-Automat

Notation

- a, b, c für Buchstaben aus Σ
- u, v, w für Wörter aus Σ^*
- A, B für Stacksymbole aus Γ
- γ, η für Stackinhalte aus Γ^*

Push-Down-Automat: Konfiguration

Konfiguration eines PDA: Informell

- Konfiguration beschreibt die aktuelle Situation des PDA **komplett**
- Bestandteile:
 - **aktueller Zustand**
 - **noch zu lesendes Restwort**
 - **kompletter Stackinhalt**
- Für Konfigurationen C_1, C_2 bedeutet

$$C_1 \vdash C_2$$

dass der PDA in einem Schritt von C_1 nach C_2 gelangen kann.

Push-Down-Automat: Konfiguration

Definition (Konfiguration eines PDA)

Eine **Konfiguration** C eines PDA $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s_0, Z_0, F)$ ist ein Tripel

$$(q, w, \gamma) \in K \times \Sigma^* \times \Gamma^*.$$

- q ist der aktuelle Zustand
- w ist das noch zu lesende Restwort
- γ ist der komplette Stackinhalt

Push-Down-Automat: Konfiguration

Definition (Konfiguration eines PDA)

Eine **Konfiguration** C eines PDA $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s_0, Z_0, F)$ ist ein Tripel

$$(q, w, \gamma) \in K \times \Sigma^* \times \Gamma^*.$$

- q der aktuelle Zustand
- w der noch zu lesendes Restwort
- γ der komplette Stackinhalt

Definition (Startkonfiguration)

Bei Eingabewort w ist die **Startkonfiguration**:

$$(s_0, w, Z_0)$$

Push-Down-Automat: Konfiguration

Definition (Nachfolgekonfiguration)

$C_2 = (q_2, w_2, \gamma_2)$ heißt **Nachfolgekonfiguration** von $C_1 = (q_1, w_1, \gamma_1)$,

$$C_1 \vdash_{\mathcal{M}} C_2$$

falls

$$\exists a \in \Sigma \exists A \in \Gamma \exists w \in \Sigma^* \exists \gamma, \eta \in \Gamma^*$$

so dass

entweder $C_1 = (q_1, aw, A\gamma)$, $C_2 = (q_2, w, \eta\gamma)$, und $(q_1, a, A) \Delta (q_2, \eta)$,

oder $C_1 = (q_1, w, A\gamma)$, $C_2 = (q_2, w, \eta\gamma)$, und $(q_1, \varepsilon, A) \Delta (q_2, \eta)$.

Push-Down-Automat: Rechnung

Definition (Rechnung eines PDA)

Sei \mathcal{M} ein Push-Down-Automat.

$$C \vdash_{\mathcal{M}}^* C'$$

gdw es eine Reihe von Konfigurationen

$$C_0, C_1, \dots, C_n \quad (n \geq 0)$$

gibt, so dass

- $C = C_0$,
- $C' = C_n$,
- $C_i \vdash_{\mathcal{M}} C_{i+1}$ für alle $0 \leq i < n$

Dann heißt C_0, C_1, \dots, C_n eine **Rechnung** von \mathcal{M} .

Push-Down-Automat: Akzeptierte Sprache

Definition (von PDA akzeptierte Sprache)

Ein PDA \mathcal{M} kann auf zwei verschiedene Arten eine Sprache akzeptieren:

- über **finale Zustände**
- über **leeren Keller**

$$L_f(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F \exists \gamma \in \Gamma^* ((s_0, w, Z_0) \vdash_{\mathcal{M}}^* (q, \varepsilon, \gamma))\}$$

$$L_l(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in K ((s_0, w, Z_0) \vdash_{\mathcal{M}}^* (q, \varepsilon, \varepsilon))\}$$

Push-Down-Automat: Akzeptierte Sprache

Definition (von PDA akzeptierte Sprache)

Ein PDA \mathcal{M} kann auf zwei verschiedene Arten eine Sprache akzeptieren:

- über **finale Zustände**
- über **leeren Keller**

$$L_f(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F \exists \gamma \in \Gamma^* ((s_0, w, Z_0) \vdash_{\mathcal{M}}^* (q, \varepsilon, \gamma))\}$$

$$L_l(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in K ((s_0, w, Z_0) \vdash_{\mathcal{M}}^* (q, \varepsilon, \varepsilon))\}$$

Bemerkung

Das zu akzeptierende Wort w muss von \mathcal{M} ganz gelesen werden:

$$(s_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \cdot)$$

ist gefordert.

Push-Down-Automat

Bemerkung

- Das unterste Symbol im Keller kann gelöscht werden.
- Dann aber **hängt** der PDA.
- Er kann nicht mehr weiter rechnen.
- **Es gibt keine Nachfolgekonfiguration.**

Push-Down-Automat: Beispiel

Beispiel

Sprache der Palindrome über $\{a, b\}$:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$$

L wird über leeren Keller akzeptiert von dem PDA

$$\mathcal{M} := (\{s_0, s_1\}, \{a, b\}, \{Z_0, A, B\}, \Delta, s_0, Z_0, \emptyset)$$

mit ...

Push-Down-Automat: Beispiel

Beispiel (Forts.) Idee:

- Ein Palindrom $w = w^R$ hat die Form

$$vv^R \quad \text{oder} \quad vav^R \quad \text{oder} \quad vbv^R$$

für ein $v \in \{a, b\}^*$

- Der Automat \mathcal{M} liest v und merkt sich jeden Buchstaben.
- **Er rät indeterminiert die Wortmitte.**

Falls das Wort eine ungerade Anzahl von Buchstaben hat,
also $w = vav^R$ oder $w = vbv^R$,

dann muss dabei ein Buchstabe überlesen werden.

- Der Stack enthält nun v^R .
 \mathcal{M} muss jetzt nur noch jeden weiteren gelesenen Buchstaben mit dem jeweils obersten Kellersymbol vergleichen.

Push-Down-Automat: Beispiel

Beispiel (Forts.)

$(s_0, \varepsilon, Z_0) \Delta (s_1, \varepsilon)$	}	ε akzeptieren
$(s_0, a, Z_0) \Delta (s_0, A)$		
$(s_0, a, A) \Delta (s_0, AA)$	}	Stack aufbauen
$(s_0, a, B) \Delta (s_0, AB)$		
$(s_0, b, Z_0) \Delta (s_0, B)$		
$(s_0, b, A) \Delta (s_0, BA)$		
$(s_0, b, B) \Delta (s_0, BB)$		

Push-Down-Automat: Beispiel

Beispiel (Forts.)

$(s_0, \varepsilon, A) \Delta (s_1, \varepsilon)$ }
 $(s_0, \varepsilon, B) \Delta (s_1, \varepsilon)$ } Richtungswechsel für Palindrome
mit ungerader Buchstabenanzahl

$(s_0, a, A) \Delta (s_1, \varepsilon)$ }
 $(s_0, b, B) \Delta (s_1, \varepsilon)$ } Richtungswechsel für Palindrome
mit gerader Buchstabenanzahl

$(s_1, a, A) \Delta (s_1, \varepsilon)$ }
 $(s_1, b, B) \Delta (s_1, \varepsilon)$ } Stack abbauen

Push-Down-Automat: Beispiel

Beispiel (Forts.)

Für das Eingabewort *abbabba* rechnet \mathcal{M} so:

$$\begin{aligned} (s_0, \text{abbabba}, Z_0) \vdash (s_0, \text{bbabba}, A) \vdash (s_0, \text{babba}, BA) \vdash \\ (s_0, \text{abba}, BBA) \vdash (s_0, \text{bba}, ABBA) \vdash (s_1, \text{bba}, BBA) \vdash \\ (s_1, \text{ba}, BA) \vdash (s_1, \text{a}, A) \vdash (s_1, \varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

Push-Down-Automat: Beispiel

Die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$$

wird über finalen Zustand akzeptiert von dem PDA

$$\mathcal{M} = (\{s_0, s_1\}, \{a, b\}, \{Z_0, \underline{A}, A, \underline{B}, B\}, \Delta, s_0, Z_0, \{s_0\})$$

mit ...

Push-Down-Automat: Beispiel

Idee:

- auf dem Stack mitzählen, wieviel A -Überhang oder B -Überhang momentan besteht
- Der Stack enthält zu jedem Zeitpunkt
 - entweder nur A/\underline{A} (A -Überhang)
 - oder nur B/\underline{B} (B -Überhang)
 - oder nur das Symbol Z_0 (Gleichstand).
- Das unterste A bzw. B auf dem Stack ist durch einen Unterstrich gekennzeichnet.

So weiß \mathcal{M} , wenn er dies Stacksymbol löscht, dass dann bis zu diesem Moment gleich viel as wie bs gelesen wurden.

Push-Down-Automat: Beispiel

$$\begin{array}{ll} (s_0, a, Z_0) \Delta (s_1, \underline{A}) & (s_0, b, Z_0) \Delta (s_1, \underline{B}) \\ (s_1, a, \underline{A}) \Delta (s_1, A\underline{A}) & (s_1, b, \underline{B}) \Delta (s_1, B\underline{B}) \\ (s_1, a, A) \Delta (s_1, AA) & (s_1, b, B) \Delta (s_1, BB) \\ (s_1, a, \underline{B}) \Delta (s_0, Z_0) & (s_1, b, \underline{A}) \Delta (s_0, Z_0) \\ (s_1, a, B) \Delta (s_1, \varepsilon) & (s_1, b, A) \Delta (s_1, \varepsilon) \end{array}$$