Grundlagen der Theoretischen Informatik

Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen (V)

4.07.2019

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Übersicht

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- Entscheidbar/Aufzählbar
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- Unentscheidbarkeit

Universelle determinierte Turing-Maschinen

Turing-Maschine, die andere TMs simuliert

- Universelle TM $\mathscr{U}$ bekommt als Eingabe:
  - die Regelmenge einer beliebigen Turing-Maschine $\mathcal{M}$ und
  - ein Wort w, auf dem $\mathcal{M}$ rechnen soll.
- $\mathscr{U}$ simuliert $\mathcal{M}$, indem sie jeweils nachschlägt, welchen δ-Übergang $\mathcal{M}$ machen würde.

Universelle determinierte Turing-Maschinen

Standardisierung von Alphabet, Zustandsmenge, Startzustand

- Unendliches Alphabet $\Sigma_\infty = \{a_0, a_1, \ldots\}$,
  so dass das Alphabet jeder DTM eine Teilmenge von Σ_∞ ist.
- Namen der Zustände einer DTM sind egal.
  Sie seien also $q_1, \ldots, q_n$ (n kann dabei von DTM zu DTM verschieden sein).
- Sei q_1 immer der Startzustand, und bezeichne q_0 den Haltezustand

Damit:

Wir können eine DTM komplett beschreiben, indem wir nur ihre δ-Übergänge beschreiben.

$\mapsto$ Wörter

Gödelisierung

Ein Verfahren, jeder Turing-Maschine eine Zahl oder ein Wort (**Gödelzahl** bzw. **Gödelwort**) so zuzuordnen, dass man aus der Zahl bzw. dem Wort die Turing-Maschine effektiv rekonstruieren kann.

Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- Entscheidbar/Aufzählbar
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- Unentscheidbarkeit

Entscheidbar/Aufzählbar

Akzeptieren

Eine DTM **akzeptiert** eine Sprache L, wenn sie

- für jedes Eingabe-Wort $w \in L$ irgendwann hält
- für jedes Wort $v \notin L$ unendlich lang rechnet oder hängt

Entscheiden

Eine DTM **entscheidet** eine Sprache L, wenn sie

- für jedes Eingabe-Wort $w \in L$ hält mit dem Bandinhalt Y ("Yes")
- für jedes Wort $v \notin L$ hält mit dem Bandinhalt N ("No")

Akzeptierbarkeit und Entscheidbarkeit

Definition [Entscheidbar]

L sei eine Sprache über Σ_0 mit $\#, N, Y \notin \Sigma_0$.

$M = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$ sei eine DTM mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

M **entscheidet** L, falls für alle $w \in \Sigma_0^*$ gilt:

$$s, \#w\underline{\#} \vdash_M^* \begin{cases} h, \#Y\underline{\#} & \text{falls } w \in L \\ h, \#N\underline{\#} & \text{sonst} \end{cases}$$

L heißt **entscheidbar**, falls es eine DTM gibt, die L entscheidet.

Akzeptierbarkeit und Entscheidbarkeit

Definition [Akzeptierbar]

L sei eine Sprache über Σ_0 mit $\#, N, Y \notin \Sigma_0$.

$M = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$ sei eine DTM mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

$\mathcal{M}$ **akzeptiert** ein Wort $w \in \Sigma_0^*$, falls $\mathcal{M}$ bei Input w hält.

$\mathcal{M}$ **akzeptiert die Sprache** L, falls für alle $w \in \Sigma_0^*$ gilt:

$$\mathcal{M} \text{ akzeptiert } w \quad \textit{genau dann wenn } w \in L$$

L heißt **akzeptierbar** (oder auch **semi-entscheidbar**),
falls es eine DTM gibt, die L akzeptiert.

Rekursiv aufzählbar

Definition [Rekursiv Aufzählbar (recursively enumerable)]

L sei eine Sprache über Σ_0 mit $\#, N, Y \notin \Sigma_0$.

$M = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$ sei eine DTM mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

$\mathcal{M}$ **zählt** L **auf**, falls es einen Zustand $q_B \in K$ gibt (den **Blinkzustand**), so dass:

$$L = \{w \in \Sigma_0^* \mid \exists u \in \Sigma^* : s, \underline{\#} \vdash_{\mathcal{M}}^* q_B, \#w\underline{\#}u\}$$

L heißt **rekursiv aufzählbar**, falls es eine DTM gibt, die L aufzählt.

Rekursiv aufzählbar

Achtung: aufzählbar $\neq$ abzählbar.

Unterschied

M **abzählbar:** Es gibt eine surjektive Abbildung der natürlichen Zahlen auf *M*

M **aufzählbar:** Diese Abbildung kann von einer Turing-Maschine berechnet werden.

Wegen Endlichkeit der Wörter und des Alphabets sind alle Sprachen abzählbar.

Aber nicht alle Sprachen sind aufzählbar.

Aufzählbarkeit/Entscheidbarkeit/Unentscheidbarkeit

Fragen:

Gibt es nicht-aufzählbare Probleme?

Gibt es nicht-entscheidbare Probleme?

Aufzählbarkeit/Entscheidbarkeit/Unentscheidbarkeit

Fragen:

Gibt es nicht-aufzählbare Probleme?

Gibt es nicht-entscheidbare Probleme?

Antwort: Ja, es gibt nicht-aufzählbare Probleme und
es gibt nicht-entscheidbare Probleme.

Beweis: Die Menge aller Sprachen ist nicht abzählbar
Die Turingmaschinen können abgezählt werden: $M_1, M_2, \ldots$

Die Mächtigkeit der Menge aller Sprachen ist größer
als die Mächtigkeit der Menge aller Turingmaschinen.

$\mapsto$ es gibt Sprachen für die es keine TM gibt, die sie aufzählt.

$\mapsto$ es gibt Sprachen für die es keine TM gibt, die sie entscheidet.

Rekursiv aufzählbar: Beispiele

Rekursiv aufzählbar aber nicht entscheidbar

Folgende Mengen sind rekursiv aufzählbar aber *nicht* entscheidbar:

- Die Menge der Gödelisierungen aller haltenden Turing-Maschinen
- Die Menge aller terminierenden Programme
- Die Menge aller allgemeingültigen prädikatenlogischen Formeln

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Theorem [Akzeptierbar = Rekursiv Aufzählbar].
Eine Sprache ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn sie akzeptierbar ist.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Theorem [Akzeptierbar = Rekursiv Aufzählbar].
Eine Sprache ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn sie akzeptierbar ist.

Beweis "⇒"

Sei L rekursiv aufzählbar

Es gibt also eine DTM $\mathcal{M}_L$, die L aufzählt.

Zur Erinnerung:

$\mathcal{M}_L$ **zählt** L **auf**, falls es einen Zustand $q_B \in K$ gibt (den **Blinkzustand**), so dass:

$$L = \{w \in \Sigma_0^* \mid \exists u \in \Sigma^* : s, \underline{\#} \vdash_{\mathcal{M}}^* q_B, \#w\underline{\#}u\}$$

Zu zeigen: L ist akzeptierbar, d.h. es existiert eine DTM, die L akzeptiert.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

Wir konstruieren aus $\mathcal{M}_L$ eine 2-DTM $\mathcal{M}$, die L akzeptiert:

- $\mathcal{M}$ wird gestartet mit

$$\begin{array}{ll} s_0, & \#w\underline{\#} \\ & \underline{\#} \end{array}$$

- $\mathcal{M}$ simuliert auf Band 2 die Maschine $\mathcal{M}_L$.
- Wenn $\mathcal{M}_L$ den **Blinkzustand** q_B erreicht, dann enthält Band 2 von $\mathcal{M}$ ein Wort

$$\#w'\underline{\#}u$$

mit $w' \in L$.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

- Nach Erreichen des Blinkzustands:
  $\mathcal{M}$ vergleicht w und w'.
  - Falls $w = w'$, dann hält $\mathcal{M}$: $w \in L$.
  - Ansonsten simuliert $\mathcal{M}$ auf Band 2 weiter die Arbeit von $\mathcal{M}_L$.
- Wenn $\mathcal{M}_L$ hält, ohne das Wort w auf Band 2 erzeugt zu haben, gerät $\mathcal{M}$ in eine Endlosschleife.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

"$\Leftarrow$"

Sei L akzeptierbar

Es gebe also eine DTM $\mathcal{M}_L$, die L akzeptiert.

Zu zeigen: L ist rekursiv aufzählbar.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

"$\Leftarrow$"

Sei L akzeptierbar
Es gebe also eine DTM $\mathcal{M}_L$, die L akzeptiert.

Zu zeigen: L ist rekursiv aufzählbar.

Wir konstruieren eine DTM $\mathcal{M}$, die L rekursiv aufzählt.

Grundidee:

- die Wörter aus Σ^* der Reihe nach aufzählen
- jedes Wort der Maschine $\mathcal{M}_L$ vorlegen
- wenn $\mathcal{M}_L$ das Wort akzeptiert, in den Blinkzustand q_B gehen

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

Problem: $\mathcal{M}_L$ akzeptiert, sie entscheidet nicht.

Wenn $\mathcal{M}_L$ ein Wort nicht akzeptiert, rechnet sie unendlich.

Lösung: Wir betrachten die Rechnung von $\mathcal{M}_L$ zu allen Wörtern aus Σ^* **gleichzeitig**.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

$\Sigma^* = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$ (in lexikalischer Reihenfolge aufgezählt).

Dann rechnet $\mathcal{M}$ so:

- Im ersten Durchlauf berechne den ersten Rechenschritt von $\mathcal{M}_L$ für w_1.
- Im zweiten Durchlauf berechne
  - die ersten zwei Rechenschritte von $\mathcal{M}_L$ für w_1,
  - einen Rechenschritt für w_2.
- Im dritten Durchlauf berechne drei Rechenschritte für w_1, zwei für w_2 und einen für w_3 und so weiter.

Immer wieder bei der Startkonfiguration anfangen: So müssen wir uns den Bandinhalt der Rechnung von $\mathcal{M}_L$ zu w_i nach j Schritten nicht merken.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

Wenn $\mathcal{M}$ so rechnet, dann gilt:

- $\mathcal{M}$ fängt für jedes $w_i \in \Sigma^*$ in endlicher Zeit (nämlich im i-ten Durchlauf) an, die Arbeit von $\mathcal{M}_L$ zu w_i zu simulieren, und
- falls $w_i \in L$ und falls $\mathcal{M}_L$, gestartet mit $s, \#w_i\underline{\#}$, in j Schritten einen Haltezustand erreicht, dann erreicht $\mathcal{M}$ nach endlicher Zeit (nämlich im $i + j$-ten Durchlauf) den Haltezustand von $\mathcal{M}_L$ in der Rechnung zu w_i.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Ende)

- Wenn $\mathcal{M}$ bei Simulation von $\mathcal{M}_L$ zur Eingabe w_i auf eine Haltekonfiguration trifft, dann ist $w_i \in L$.
- $\mathcal{M}$ nimmt dann eine Konfiguration

$$q_B, \#w_i\underline{\#}u_i$$

  ein – q_B ist der Blinkzustand.
- In der Nebenrechnung u_i steht, welche Teilrechnung von $\mathcal{M}_L$ als nächste zu simulieren ist.

Also zählt $\mathcal{M}$ die $w \in \Sigma^*$ auf, für die $\mathcal{M}_L$ hält, und das sind gerade die $w \in L$. $\square$

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Theorem. Jede entscheidbare Sprache ist akzeptierbar.

Beweis

Sei L eine entscheidbare Sprache und $\mathcal{M}$ eine DTM, die L entscheidet.

Dann wird L akzeptiert von der DTM $\mathcal{M}'$,
die zunächst $\mathcal{M}$ simuliert und danach in eine Endlosschleife geht, falls $\mathcal{M}$ mit $h, \#N\underline{\#}$ endet.

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Theorem [Komplement einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar]
Das Komplement einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar.

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Theorem [Komplement einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar]
Das Komplement einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar.

Beweis

Sei L eine entscheidbare Sprache und $\mathcal{M}$ eine DTM, die L entscheidet.

Dann wird $\overline{L}$ entschieden von einer DTM $\mathcal{M}'$,
die genau wie $\mathcal{M}$ rechnet
und nur am Schluß die Antworten Y und N vertauscht. $\square$

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Theorem [Charakterisierung von Entscheidbarkeit]
Eine Sprache L ist genau dann entscheidbar, wenn
sie und ihr Komplement akzeptierbar sind.

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Theorem [Charakterisierung von Entscheidbarkeit]
Eine Sprache L ist genau dann entscheidbar, wenn
sie und ihr Komplement akzeptierbar sind.

Beweis

"$\Rightarrow$"

Sei L ist entscheidbar.

Zu zeigen: L und $\overline{L}$ sind akzeptierbar.

- L ist entscheidbar, also ist L akzeptierbar
- L ist entscheidbar, also ist $\overline{L}$ entscheidbar
- $\overline{L}$ ist entscheidbar, also ist $\overline{L}$ akzeptierbar

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Beweis (Fortsetzung)

"$\Leftarrow$"

Seien L und $\overline{L}$ akzeptierbar.

Zu zeigen: L ist entscheidbar.

- Sei $\mathcal{M}_1$ eine DTM, die L akzeptiert.
- Sei $\mathcal{M}_2$ eine DTM, die $\overline{L}$ akzeptiert.

Daraus konstruieren wir eine 2-DTM $\mathcal{M}$, die L entscheidet:

- $\mathcal{M}$ wird gestartet mit

  $s_0, \#w\underline{\#}$

  $\underline{\#}$
- $\mathcal{M}$ kopiert w auf Band 2.

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Beweis (Ende)

- M simuliert abwechselnd
  - einen Schritt von $\mathcal{M}_1$ auf Band 1 und
  - einen Schritt von $\mathcal{M}_2$ auf Band 2.
- Das tut $\mathcal{M}$, bis entweder $\mathcal{M}_1$ oder $\mathcal{M}_2$ hält.
- Eine von beiden muss halten: w gehört entweder zu L oder zu $\overline{L}$.
- Wenn $\mathcal{M}_1$ hält, dann hält $\mathcal{M}$ mit
  - $\#Y\underline{\#}$ auf Band 1 und
  - $\underline{\#}$ auf Band 2.
- Wenn $\mathcal{M}_2$ hält, dann hält $\mathcal{M}$ mit
  - $\#N\underline{\#}$ auf Band 1 und
  - $\underline{\#}$ auf Band 2. $\square$

Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- Entscheidbar/Aufzählbar
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- Unentscheidbarkeit

Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- Entscheidbar/Aufzählbar
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- Unentscheidbarkeit

Rekursiv Aufzählbar = Typ 0

Zur Erinnerung

Formale Sprachen sind vom **Typ 0**, wenn sie durch beliebige Grammatiken (keinerlei Einschränkungen) erzeugt werden können.

Rekursiv Aufzählbar = Typ 0

Theorem [Rekursiv aufzählbar = Typ 0].
Die rekursiv aufzählbaren Sprachen
(also die durch DTMs akzeptierbaren Sprachen)
sind genau die durch beliebige Grammatiken erzeugten Sprachen
(also die vom Typ 0).

Rekursiv Aufzählbar = Typ 0

Theorem [Rekursiv aufzählbar = Typ 0].
Die rekursiv aufzählbaren Sprachen
(also die durch DTMn akzeptierbaren Sprachen)
sind genau die durch beliebige Grammatiken erzeugten Sprachen
(also die vom Typ 0).

Beweisidee

- Zu jeder Turing-Maschine kann eine Grammatik konstruiert werden, deren Ableitungsschritte die Rechenschritte der TM simulieren (spezielle Variable markiert Position des Schreib-/Lesekopfes).
- Zu jeder Grammatik kann eine indeterminierte Turing-Maschine (und damit auch eine DTM) konstruiert werden, deren Rechenschritte den Ableitungsschritten der Grammatik entsprechen.

Beweisdetails: Buch von Erk und Priese, Seiten 198-201.

Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- Entscheidbar/Aufzählbar
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- Unentscheidbarkeit

Zentrale Fragestellung

Welche Funktionen sind durch einen Algorithmus berechenbar?

bzw.

Welche Probleme sind durch einen Algorithmus entscheidbar?

Die Motivation, die Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit zu studieren, stammt ursprünglich von dem Mathematiker David Hilbert:

Anfang des 20. Jahrhunderts formulierte er einen Forschungsplan, dessen Ziel die Entwicklung eines Formalismus was, mit dem man alle mathematischen Probleme lösen konnte.

Zentrale Fragestellung

Welche Funktionen sind durch einen Computer berechenbar?

bzw.

Welche Probleme kann ein Computer entscheiden?

Um diese Fragen in einem mathematisch exakten Sinne klären zu können, müssen wir klären was eigentlich ein Computer ist.

Rechnermodell: Turingmaschinen

Alan Turing

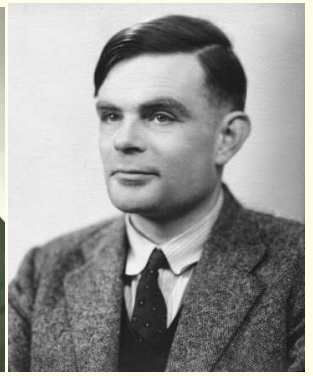
Church-Turing-These

Es wurde festgestellt, dass alle vernünftigen Modelle zur Spezifikation der algorithmischen Lösbarkeit äquivalent zu Turingmaschinen sind.

mehr darüber: Vertiefung Theoretische Informatik

Dies führte zu der Formulierung der sogenannten Church-Turing-These:

Church-Turing-These
Die Klasse der Turing-berechenbaren Funktionen stimmt mit der Klasse der "intuitiv berechenbaren" Funktionen überein.



Beispiel einer nicht berechenbaren Funktion

Definition (Busy-Beaver-Funktion)

Die Funktion $BB : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert

$n \mapsto BB(n) :=$ die maximale Anzahl an Einsen, die eine **haltende** DTM mit maximal n Zuständen auf einem leeren Band erzeugen kann

Beispiel einer nicht berechenbaren Funktion

Definition (Busy-Beaver-Funktion)

Die Funktion $BB : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert

$n \mapsto BB(n) :=$ die maximale Anzahl an Einsen, die eine **haltende** DTM mit maximal n Zuständen auf einem leeren Band erzeugen kann

BB wächst extrem schnell

Exakte Werte von $BB(n)$ für $n \geq 4$ nicht bekannt.

- $BB(4) \geq 4098$
- $BB(5) \geq 1,29 * 10^{865}$

Beispiel einer nicht berechenbaren Funktion

Theorem

BB wächst zu stark um berechenbar zu sein:

Es gibt keine DTM, die *BB* berechnet.

Beweis (erster Teil)

Man kann immer mindestens ein | mehr erzeugen, wenn man einen weiteren Zustand zur Verfügung hat:

- man benennt den Haltezustand um in q_{neu} und geht in den richtigen Haltezustand h nur, wenn man in q_{neu} ein Blank # gelesen hat. Zusätzlich ersetzt man das Blank durch |.
- Wenn man ein | liest, geht man nach rechts und bleibt in q_{neu}.

Damit haben wir bewiesen:

BB **wächst streng monoton.**

Beispiel einer nicht berechenbaren Funktion

Beweis (zweiter Teil)

Angenommen, es gäbe eine DTM $\mathcal{M}_{BB}$, die BB berechnet.
Sie habe n_0 Zustände.

Wir betrachten folgende zusammengesetzte Maschine:

- zuerst schreibt sie m Einsen auf das leere Band
- dann führt sie $\mathcal{M}_{BB}$ aus

Diese Maschine kommt mit $n_0 + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 10$ Zuständen aus.

Sei nun m so groß, dass

$$m > n_0 + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 10$$

Dann schreibt die neue Maschine $BB(m)$ Einsen auf das Band und arbeitet mit streng weniger als m Zuständen: Widerspruch. $\square$

Zur Erinnerung

Beispiel 4 (Print n)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ konstruieren wir eine Maschine,
die genau n Einsen auf das leere Band schreibt
(**mit möglichst wenig Zuständen**):

1. schreibe $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ viele Einsen auf das Band
   (höchstens $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Zustände)
2. kopiere diesen String
   (8 Zustände)
3. ersetze das trennende # durch eine 1
4. falls n gerade ist, ersetzen die letzte 1 durch # (2 neue Zustände)

Insgesamt können wir n Einsen mit höchstens $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 10$ Zuständen
konstruieren

Beispiel einer nicht berechenbaren Funktion

Beweis (zweiter Teil)

Angenommen, es gäbe eine DTM $\mathcal{M}_{BB}$, die BB berechnet.
Sie habe n_0 Zustände.

Wir betrachten folgende zusammengesetzten Maschine:

- zuerst schreibt sie m Einsen auf das leere Band
- dann führt sie $\mathcal{M}_{BB}$ aus

Diese Maschine kommt mit $n_0 + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 10$ Zuständen aus.

Sei nun m so groß, dass

$$m > n_0 + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 10$$

Dann schreibt die neue Maschine $BB(m)$ Einsen auf das Band und arbeitet mit streng weniger als m Zuständen: Widerspruch. $\square$

Gödelisierung von DTMs

Definition (Gödelnummern von DTMs)

DTMs werden als Gödelzahlen kodiert:

- DTMs können als Gödelwörter dargestellt werden.
- Die Buchstaben der Gödelwörter können in Ziffern kodiert werden, um Gödelnummern zu bekommen.
- Notation: $\hat{g}(\mathcal{M})$ für die Gödelnummer der DTM $\mathcal{M}$.

Gödelisierung von DTMs

Definition (Jede Zahl ist Gödelnummer)

Jede natürliche Zahl n soll Gödelnummer einer DTM $\mathcal{M}_n$ sein.

Wir definieren

$$\mathcal{M}_n := \begin{cases} \mathcal{M}, & \text{falls } \hat{g}(\mathcal{M}) = n \\ \mathcal{M}_{halt} & \text{falls } \nexists \mathcal{M} \;\; \hat{g}(\mathcal{M}) = n \end{cases}$$

$\mathcal{M}_{halt}$ ist eine TM, die sofort anhält und weiter nichts tut.