

Grundlagen der Theoretischen Informatik

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

0. Organisatorisches

Kontakt:

Viorica Sofronie-Stokkermans

sofronie@uni-koblenz.de

Raum B 225

Sprechstunde: Montag: 16:00 (Anmeldung über E-Mail)

Übung

Dennis Peuter

dpeuter@uni-koblenz.de

Raum B 223

Webseite

Webseite:

<https://userpages.uni-koblenz.de/~sofronie/gti-ss-2021/>

Alle relevante Information auf der Webseite

- Folien
- Weitere Materialien
- Termine usw.

Übung

https://userpages.uni-koblenz.de/~dpeuter/teaching/21ss_gti/

Konferenzsystem Big Blue Button (BBB) unter OLAT

<https://olat.vcrp.de/auth/BusinessGroup/3180265689>

KLIPS: E-Mails (bitte melden Sie sich in KLIPS an!)

Vorlesung

4 Stunden/Woche

Termine

- Mittwoch, 14:00 -16:00
- Donnerstag, 14:00 -16:00

14:00 s.t. ?

Übungen

2 Stunden/Woche

- 3-4 Gruppen
 - Gruppe 1: Montag 16:00 - 18:00
 - Gruppe 2: Dienstag 16:00 - 18:00
 - Gruppe 3: Donnersag 10:00 - 12:00
- erste Übungsstunde: 19/20/22.04.2021

Vorlesung und Übung

Solange kein Präsenzunterricht stattfindet: Vorlesung online

Informationen werden regelmäßig auf der Webseite der Vorlesung aktualisiert

<http://userpages.uni-koblenz.de/~sofronie/gti-ss-2021/#Aktuelles>

- **Folien:** Website + **Audiokommentierte Folien:** Panopto spätestens 4 Tage vor dem Termin der Vorlesung.

Links: Auf der Webseite der Vorlesung unter:

<http://userpages.uni-koblenz.de/~sofronie/gti-ss-2021/slides/>

- **Fragen zu den Folien:** können im OLAT Forum gestellt werden
- **Interaktion:** Bei der Terminen der Vorlesung und Übung Konferenzsystem: Informationen per E-Mail.

Übungsblätter

- Übungszettel werden freitags auf der Webseite der Übung veröffentlicht.
- Besprechung der Übungszettel erfolgt in der darauf folgenden Woche in den Übungsstunden.
- Abgabe der Übungszettel ist nicht erforderlich.

Scheinvergabe

Klausur (120 min) Voraussichtlich Ende Juli oder Anfang August.

Nachklausur (120 min) Voraussichtlich Ende September oder Anfang Oktober

Frage- und Antwortstunde: In der letzten Vorlesung (22.07.2021).

Literatur zur Vorlesung

Katrin Erk, und Lutz Priese (2008).

Theoretische Informatik: Eine umfassende Einführung.

3. Auflage.

Springer-Verlag.

Weitere Literatur

J. Hopcroft, R. Motwani, and J. Ullman (2002).

Einführung in die Automatentheorie, Formale Sprachen und Komplexitätstheorie.

Pearson.

U. Schöning (1994).

Theoretische Informatik: kurzgefaßt.

Spektrum-Verlag.

Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

Katrin Erk (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Jürgen Dix (gehalten an der TU Clausthal)

Bernhard Beckert (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Ulrich Furbach (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Ihnen gilt mein herzlicher Dank.

Motivation; Inhalt der Vorlesung

Theoretische Informatik befasst sich mit ...

Grundlegende Konzepte der Informatik

- Probleme und ihre Beschreibung
- Systeme/Automaten/Maschinen, die Probleme lösen
- Lösbarkeit von Problemen
(Entscheidbarkeit/Berechenbarkeit und deren Grenzen)
- Schwierigkeit (Komplexität) der Lösung von Problemen

Teilgebiete der Theoretischen Informatik

- Formale Sprachen
- Automatentheorie
- Berechenbarkeitstheorie
- Komplexitätstheorie
- (Logik)

Warum Theoretische Informatik?

- ist die Grundlage
- ist wichtig
(bspw. für Algorithmentechnik, Software-Engineering, Compilerbau)
- hilft, weitere Themen/Vorlesungen der Informatik zu verstehen
- veraltet nicht
- macht Spaß

Inhalt der Vorlesung

1. Terminologie
2. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
3. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
4. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
5. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
6. Komplexitätsklassen P und NP

Kurzer Überblick: Logik

Logische Formeln

Aussagenlogische Operatoren

- \neg Negationssymbol („nicht“)
- \wedge Konjunktionssymbol („und“)
- \vee Disjunktionssymbol („oder“)
- \rightarrow Implikationssymbol („wenn ... dann“)
- \leftrightarrow Symbol für Äquivalenz („genau dann, wenn“)

Zusätzliche prädikatenlogische Operatoren

- \forall Allquantor („für alle“)
- \exists Existenzquantor („es gibt“)

Logische Formeln

Formeln

- Atomare Aussagen sind Formeln
- Seien A, B Formeln, x eine Variable, dann sind

$\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $\forall x A$, $\exists x A$

Formeln

Logische Formeln

Beispiele

$$\underbrace{\neg(y \leq x)}_{\text{Atom}} \rightarrow \exists z \underbrace{(\neg(z \leq x) \wedge \neg(y \leq z))}_{\text{Skopus von } \exists z}$$

Logische Formeln

Beispiele

“Alle, die in Koblenz studieren, sind schlau.“

$$\forall \underbrace{x}_{\text{Variable}} \underbrace{(\text{studiertIn}(x, \text{koblenz}) \rightarrow \text{schlau}(x))}_{\text{Formel(Skopus)}}$$

Formel

“Es gibt Jemand, der in Landau studiert und schlau ist.“

$$\exists \underbrace{x}_{\text{Variable}} \underbrace{(\text{studiertIn}(x, \text{landau}) \wedge \text{schlau}(x))}_{\text{Formel(Skopus)}}$$

Formel

Eigenschaften von Quantoren

Eigenschaften von Quantoren

Quantoren gleicher Art kommutieren

$\forall x \forall y$ ist das gleiche wie $\forall y \forall x$

$\exists x \exists y$ ist das gleiche wie $\exists y \exists x$

Eigenschaften von Quantoren

Quantoren gleicher Art kommutieren

$\forall x \forall y$ ist das gleiche wie $\forall y \forall x$

$$\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$$

$\exists x \exists y$ ist das gleiche wie $\exists y \exists x$

$$\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$$

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

$\exists x \forall y$ ist **nicht** das gleiche wie $\forall y \exists x$

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren **NICHT**

$\exists x \forall y$ ist **nicht** das gleiche wie $\forall y \exists x$

Beispiel

- $\exists x \forall y \text{ loves}(x, y)$
- $\forall y \exists x \text{ loves}(x, y)$

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

$\exists x \forall y$ ist **nicht** das gleiche wie $\forall y \exists x$

Beispiel

- $\exists x \forall y \text{ loves}(x, y)$

Es gibt eine Person, die jeden Menschen in der Welt liebt (einschließlich sich selbst).

- $\forall y \exists x \text{ loves}(x, y)$

Jeder Mensch wird von mindestens einer Person geliebt.

(Beides hoffentlich wahr, aber verschieden:
das erste impliziert das zweite, aber nicht umgekehrt)

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren **NICHT**

$\exists x \forall y$ ist **nicht** das gleiche wie $\forall y \exists x$

Beispiel

- $\forall x \exists y \text{mutter}(y, x)$
- $\exists y \forall x \text{mutter}(y, x)$

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

$\exists x \forall y$ ist **nicht** das gleiche wie $\forall y \exists x$

Beispiel

- $\forall x \exists y \text{mutter}(y, x)$
Jeder hat eine Mutter. **(richtig)**
- $\exists y \forall x \text{mutter}(y, x)$
Es gibt eine Person, die die Mutter von jedem ist. **(falsch)**

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \dots$ ist das gleiche wie $\neg \exists x \neg \dots$

$\exists x \dots$ ist das gleiche wie $\neg \forall x \neg \dots$

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \dots$ ist das gleiche wie $\neg \exists x \neg \dots$

$\exists x \dots$ ist das gleiche wie $\neg \forall x \neg \dots$

Beispiel

- $\forall x \text{ mag}(x, \text{eiscreme})$ ist das gleiche wie $\neg \exists x \neg \text{mag}(x, \text{eiscreme})$
- $\exists x \text{ mag}(x, \text{broccoli})$ ist das gleiche wie $\neg \forall x \neg \text{mag}(x, \text{broccoli})$

Eigenschaften von Quantoren

\forall distributiert über \wedge

\exists distributiert über \vee

Eigenschaften von Quantoren

\forall distributiert **NICHT** über \vee

$\forall x (\dots \vee \dots)$ ist **NICHT** das gleiche wie $(\forall x \dots) \vee (\forall x \dots)$

Eigenschaften von Quantoren

\forall distributiert **NICHT** über \vee

$\forall x (\dots \vee \dots)$ ist **NICHT** das gleiche wie $(\forall x \dots) \vee (\forall x \dots)$

Beispiel

$\forall x (eiscreme(x) \vee broccoli(x))$
ist **NICHT** das gleiche wie
 $(\forall x eiscreme(x)) \vee (\forall x broccoli(x))$

Eigenschaften von Quantoren

\exists distributiert **NICHT** über \wedge

$\exists x (\dots \wedge \dots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x \dots) \wedge (\exists x \dots)$

Eigenschaften von Quantoren

\exists distributiert **NICHT** über \wedge

$\exists x (\dots \wedge \dots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x \dots) \wedge (\exists x \dots)$

Beispiel

$\exists x (\text{gerade}(x) \wedge \text{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie
 $(\exists x \text{gerade}(x)) \wedge (\exists x \text{ungerade}(x))$

Beispiele: Familienverhältnisse

- „Brüder sind Geschwister“
- „bruder“ ist symmetrisch
- „Mütter sind weibliche Elternteile“
- „Ein Cousin ersten Grades ist das Kind eines Geschwisters eines Elternteils“

Beispiele: Familienverhältnisse

- „Brüder sind Geschwister“
 $\forall x \forall y (bruder(x, y) \rightarrow geschwister(x, y))$
- „bruder“ ist symmetrisch
- „Mütter sind weibliche Elternteile“
- „Ein Cousin ersten Grades ist das Kind eines Geschwisters eines Elternteils“

Beispiele: Familienverhältnisse

- „Brüder sind Geschwister“
 $\forall x \forall y (bruder(x, y) \rightarrow geschwister(x, y))$
- „bruder“ ist symmetrisch
 $\forall x \forall y (bruder(x, y) \leftrightarrow bruder(y, x))$
- „Mütter sind weibliche Elternteile“
- „Ein Cousin ersten Grades ist das Kind eines Geschwisters eines Elternteils“

Beispiele: Familienverhältnisse

- „Brüder sind Geschwister“
 $\forall x \forall y (bruder(x, y) \rightarrow geschwister(x, y))$
- „bruder“ ist symmetrisch
 $\forall x \forall y (bruder(x, y) \leftrightarrow bruder(y, x))$
- „Mütter sind weibliche Elternteile“
 $\forall x \forall y (mutter(x, y) \leftrightarrow weiblich(x) \wedge elter(x, y))$
- „Ein Cousin ersten Grades ist
das Kind eines Geschwisters eines Elternteils“

Beispiele: Familienverhältnisse

- „Brüder sind Geschwister“
 $\forall x \forall y (bruder(x, y) \rightarrow geschwister(x, y))$
- „bruder“ ist symmetrisch
 $\forall x \forall y (bruder(x, y) \leftrightarrow bruder(y, x))$
- „Mütter sind weibliche Elternteile“
 $\forall x \forall y (mutter(x, y) \leftrightarrow weiblich(x) \wedge elter(x, y))$
- „Ein Cousin ersten Grades ist
das Kind eines Geschwisters eines Elternteils“
 $\forall x \forall y (cousin1(x, y) \leftrightarrow \exists p \exists ps (elter(p, x) \wedge geschwister(ps, p) \wedge elter(ps, y)))$

Beispiele: Familienverhältnisse

Formalisierung von „Bruder, der nicht nur Halbbruder ist“

$$\begin{aligned} \forall x \forall y \text{ bruder}(x, y) \leftrightarrow & (\neg(x = y) \wedge \\ & \exists m \exists v (\neg(m = v) \wedge \\ & \text{elter}(m, x) \wedge \text{elter}(v, x) \wedge \\ & \text{elter}(m, y) \wedge \text{elter}(v, y))) \end{aligned}$$

Kurzer Überblick:

Beweismethoden und Mathematische Konzepte

Wichtige Beweismethoden

Deduktiver Beweis (Direkter Beweis)

- Aneinanderkettung von Argumenten/Aussagen

$$A = A_1, A_2, \dots, A_n = B$$

- Zwischenaussagen A_i müssen schlüssig aus dem Vorhergehenden folgen
- Verwendet werden dürfen nur
 - Annahmen aus A
 - mathematische Grundgesetze
 - bereits bewiesene Aussagen
 - logische Schlussfolgerungen

Wichtige Beweismethoden

Deduktiver Beweis (Direkter Beweis)

Beispiel: Zu beweisen:

Wenn x die Summe der Quadrate von vier strikt positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

Wichtige Beweismethoden

Deduktiver Beweis (Direkter Beweis)

Beispiel: Zu beweisen:

Wenn x die Summe der Quadrate von vier positiven ganzen Zahlen ist, dann gilt $2^x \geq x^2$

Beweis in schematischer Darstellung:

Aussage	Begründung
1. $x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$	Gegeben
2. $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 1$	Gegeben
3. $a^2 \geq 1, b^2 \geq 1, c^2 \geq 1, d^2 \geq 1$	(2) und Gesetze der Arithmetik
4. $x \geq 4$	(1), (3) und Gesetze der Arithmetik
5. $2^x \geq x^2$	(4) und Satz aus der Analysis

Wichtige Beweismethoden

Beweis durch Kontraposition

Um zu zeigen, dass B aus der Annahme A folgt,

beweise, dass **nicht** A aus der Annahme **nicht** B folgt:

$$\neg B \rightarrow \neg A \quad \text{logisch äquivalent zu} \quad A \rightarrow B$$

Wichtige Beweismethoden

Beweis durch Kontraposition

Um zu zeigen, dass B aus der Annahme A folgt,

beweise, dass **nicht** A aus der Annahme **nicht** B folgt:

$$\neg B \rightarrow \neg A \quad \text{logisch äquivalent zu} \quad A \rightarrow B$$

Widerspruchsbeweis

Um zu zeigen, dass B aus der Annahme A folgt,

beweise, dass aus **A und nicht B** ein Widerspruch folgt:

$$(A \wedge \neg B) \leftrightarrow \textit{false} \quad \text{logisch äquivalent zu} \quad A \rightarrow B$$

Wichtige Beweismethoden

Beweis durch Kontraposition

Um zu zeigen, dass B aus der Annahme A folgt,
beweise, dass **nicht** A aus der Annahme **nicht** B folgt:

$$\neg B \rightarrow \neg A \quad \text{logisch äquivalent zu} \quad A \rightarrow B$$

Widerspruchsbeweis

Um zu zeigen, dass B aus der Annahme A folgt,
beweise, dass aus **A und nicht B** ein Widerspruch folgt:

$$(A \wedge \neg B) \leftrightarrow \text{false} \quad \text{logisch äquivalent zu} \quad A \rightarrow B$$

- A kann „leer“ (\top) sein
- Widerspruch zu \forall -Aussage gelingt durch Gegenbeispiel

Wichtige Beweismethoden

Beweis durch Kontraposition

Beispiel

Behauptung: Ist die Wurzel aus einer geraden natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl, so ist diese gerade.

$$n \text{ gerade und } \sqrt{n} = k \in \mathbb{N} \rightarrow k \text{ gerade}$$

Beweis durch Kontraposition: Zu zeigen:

$$\sqrt{n} = k \in \mathbb{N} \text{ und } k \text{ ungerade} \rightarrow n \text{ ungerade.}$$

Beweis: Angenommen, $\sqrt{n} = k$ wäre ungerade. Dann $k = 2l + 1$, so $k^2 = 4l^2 + 4l + 1$, d.h. auch $k^2 = n$ ist ungerade.

Wichtige Beweismethoden

Widerspruchsbeweis

Beispiel

Behauptung: Ist die Wurzel aus einer geraden natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl, so ist diese gerade.

$$n \text{ gerade und } \sqrt{n} = k \in \mathbb{N} \rightarrow k \text{ gerade}$$

Beweis: Wir zeigen, dass aus n gerade und k nicht gerade ein Widerspruch folgt:
Angenommen, $\sqrt{n} = k$ wäre ungerade und n gerade.

Dann $k = 2l + 1$, so $k^2 = 4l^2 + 4l + 1$, d.h. auch $k^2 = n$ ist ungerade, und das ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass n gerade ist.

Also ist die getroffene Annahme falsch, d.h., \sqrt{n} ist gerade.

Wichtige Beweismethoden

Widerspruchsbeweis

Beispiel

Behauptung: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Wichtige Beweismethoden

Widerspruchsbeweis

Beispiel

Behauptung: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis: Wir nehmen an, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ und somit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ wobei der Bruch $\frac{p}{q}$ in gekürzter Form vorliegt (d.h. p und q teilerfremde ganze Zahlen sind).

Wichtige Beweismethoden

Widerspruchsbeweis

Beispiel

Behauptung: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis: Wir nehmen an, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ und somit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ wobei der Bruch $\frac{p}{q}$ in gekürzter Form vorliegt (d.h. p und q teilerfremde ganze Zahlen sind).

Dann $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, d.h.: $p^2 = 2q^2$. Da $2q^2$ eine gerade Zahl ist, ist auch p^2 gerade. Daraus folgt, dass auch p gerade ist, d.h. $p = 2r$ (wobei $r \in \mathbb{Z}$).

Wichtige Beweismethoden

Widerspruchsbeweis

Beispiel

Behauptung: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis: Wir nehmen an, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ und somit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ wobei der Bruch $\frac{p}{q}$ in gekürzter Form vorliegt (d.h. p und q teilerfremde ganze Zahlen sind).

Dann $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, d.h: $p^2 = 2q^2$. Da $2q^2$ eine gerade Zahl ist, ist auch p^2 gerade.

Daraus folgt, dass auch p gerade ist, d.h. $p = 2r$ (wobei $r \in \mathbb{Z}$).

Damit erhält man mit obiger Gleichung: $2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2$, und hieraus nach Division durch 2: $q^2 = 2r^2$. Mit der gleichen Argumentation wie zuvor folgt, dass q^2 und damit auch q eine gerade Zahl ist.

Wichtige Beweismethoden

Widerspruchsbeweis

Beispiel

Behauptung: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis: Wir nehmen an, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ und somit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ wobei der Bruch $\frac{p}{q}$ in gekürzter Form vorliegt (d.h. p und q teilerfremde ganze Zahlen sind).

Dann $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, d.h.: $p^2 = 2q^2$. Da $2q^2$ eine gerade Zahl ist, ist auch p^2 gerade.

Daraus folgt, dass auch p gerade ist, d.h. $p = 2r$ (wobei $r \in \mathbb{Z}$).

Damit erhält man mit obiger Gleichung: $2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2$, und hieraus nach Division durch 2: $q^2 = 2r^2$. Mit der gleichen Argumentation wie zuvor folgt, dass q^2 und damit auch q eine gerade Zahl ist.

Da p und q durch 2 teilbar sind, erhalten wir einen Widerspruch zur Teilerfremdheit von p und q .

Wichtige Beweismethoden

Widerspruchsbeweis

Beispiel

Behauptung: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis: Wir nehmen an, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ und somit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ wobei der Bruch $\frac{p}{q}$ in gekürzter Form vorliegt (d.h. p und q teilerfremde ganze Zahlen sind).

Dann $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, d.h: $p^2 = 2q^2$. Da $2q^2$ eine gerade Zahl ist, ist auch p^2 gerade.

Daraus folgt, dass auch p gerade ist, d.h. $p = 2r$ (wobei $r \in \mathbb{Z}$).

Damit erhält man mit obiger Gleichung: $2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2$, und hieraus nach Division durch 2: $q^2 = 2r^2$. Mit der gleichen Argumentation wie zuvor folgt, dass q^2 und damit auch q eine gerade Zahl ist.

Da p und q durch 2 teilbar sind, erhalten wir einen Widerspruch zur Teilerfremdheit von p und q . Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme, $\sqrt{2}$ sei eine rationale Zahl, falsch ist und daher das Gegenteil gelten muss. Damit ist die Behauptung, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, bewiesen.

Wichtige Beweismethoden

Induktionsbeweise

Standardinduktion:

Gilt $A(0)$ und
folgt $A(i + 1)$ aus $A(i)$,
dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Vollständige Induktion:

Gilt $A(0)$ und
folgt $A(i + 1)$ aus $A(0) \wedge \dots \wedge A(i)$,
dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Strukturelle Induktion (auf Datentypen wie Listen, Bäumen, Wörtern):

Gilt A für das Basiselement und
folgt die Gültigkeit von A für ein beliebiges Element aus der Gültigkeit
von A für seine Unterelemente,
dann gilt A für alle Elemente.

Standardinduktion: Beispiel

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^n 2 * i = n(n + 1)$.

$$p(n) : \sum_{i=0}^n 2i = n(n + 1)$$

- (1) Induktionsbasis: Beweise $p(0)$ **OK**
- (2) Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebig gewähltes $n \in \mathbb{N}$ gilt $p(n)$: $\sum_{i=0}^n 2i = n(n + 1)$
- (3) Induktionsschluss: Folgere $p(n + 1)$ aus $p(n)$
 $p(n + 1) : \sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n + 1)(n + 2)$.

Beweis: $\sum_{i=0}^{n+1} 2i = \left(\sum_{i=0}^n 2i\right) + 2(n + 1) \stackrel{p(n)}{=} n(n + 1) + 2(n + 1) = (n + 1)(n + 2)$.

Vollständige Induktion: Beispiel

Satz: Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ lässt sich als Produkt von (≥ 1) Primzahlen darstellen.
 $p(n)$: $n \geq 2 \Rightarrow n$ lässt sich als Produkt von (≥ 1) Primzahlen darstellen.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, beliebig gewählt.

Induktionsvoraussetzung: $p(k)$ gilt für alle $k < n$

Induktionsschluss: Folgere $p(n)$ aus der Induktionsvoraussetzung.

Fallunterscheidung:

Fall 1: n Primzahl. Dann lässt sich n als Produkt von (≥ 1) Primzahlen darstellen ($n = n$)

Fall 2: n keine Primzahl. Dann $n = k_1 \cdot k_2$, mit $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $k_1, k_2 \geq 2$.

Da aber $k_i < n$, $i = 1, 2$, ist nach Induktionsvoraussetzung bereits eine Darstellung als Produkt von Primzahlen für k_i bekannt.

Multipliziert man diese beiden Produkte miteinander, so erhält man eine Darstellung für n .

Strukturelle Induktion

Induktive Definition von Mengen:

Induktive Definition einer Menge M aus einer Basismenge B mit “Konstruktoren” in Σ .

(Konstruktoren sind Funktionssymbole; für $f \in \Sigma$ ist $a(f) \in \mathbb{N}$ die Stelligkeit von f .)

Basismenge: B

Erzeugungsregel: Wenn $f \in \Sigma$ mit Stelligkeit n und $e_1, \dots, e_n \in M$, dann gilt $f(e_1, \dots, e_n) \in M$.

M ist die kleinste Menge,

- die die Basismenge B enthält,
- mit der Eigenschaft, dass für alle $f \in \Sigma$ mit Stelligkeit n und alle $e_1, \dots, e_n \in M$: $f(e_1, \dots, e_n) \in M$.

Induktive Definitionen: Beispiele

(1) Menge \mathbb{N} aller natürlichen Zahlen

Basismenge: 0

Erzeugungsregel: Wenn $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $n + 1 \in \mathbb{N}$

\mathbb{N} ist die kleinste aller Mengen A mit folgenden Eigenschaften:

- (1) A enthält 0;
- (2) für alle Elemente n : falls $n \in A$, so $n + 1 \in A$.

Das bedeutet, dass:

- (1) $0 \in \mathbb{N}$
- (2) Falls $n \in \mathbb{N}$, so $n + 1 \in \mathbb{N}$.
- (3) Für jede Menge A mit Eigenschaften (1) und (2) gilt: $\mathbb{N} \subseteq A$.

Induktive Definitionen: Beispiele

(3) Bin : die Menge aller (vollständigen) binären Bäume

Basismenge: \circ Baum mit nur einem Knoten.

Erzeugungsregel: Wenn $B_1, B_2 \in \text{Bin}$, dann ist auch $\text{Tree}(B_1, B_2) \in \text{Bin}$.

Bin ist die kleinste aller Mengen A mit folgenden Eigenschaften:

- (1) A enthält den Baum mit nur einem Knoten \circ .
- (2) für alle Elemente B_1, B_2 : falls $B_1, B_2 \in A$, so $\text{Tree}(B_1, B_2) \in A$.

Das bedeutet, dass:

- (1) $\circ \in \text{Bin}$
- (2) Falls $B_1, B_2 \in \text{Bin}$, so $\text{Tree}(B_1, B_2) \in \text{Bin}$.
- (3) Für jede Menge A mit Eigenschaften (1) und (2) gilt: $\text{Bin} \subseteq A$.

Induktive Definitionen: Beispiele

(4) Menge aller aussagenlogischen Formeln

Basismenge: \perp (falsch), \top (wahr), P_0, P_1, P_2, \dots sind
aussagenlogische Formeln (atomare Formeln)

Erzeugungsregel: Wenn F_1, F_2 aussagenlogische Formeln sind,
dann sind auch $\neg F_1, F_1 \wedge F_2, F_1 \vee F_2,$
 $F_1 \rightarrow F_2, F_1 \leftrightarrow F_2$ aussagenlogische Formeln

Strukturelle Induktion

Sei M die kleinste Menge mit folgenden Eigenschaften:

- M enthält die Basismenge B ,
- für alle $f \in \Sigma$ mit Stelligkeit n und alle $e_1, \dots, e_n \in M$: $f(e_1, \dots, e_n) \in M$.

Zu zeigen: $\forall x \in M : P(x)$

(1) **Induktionsbasis:** Beweise, dass für alle $b \in B$, $P(b)$ gilt.

(2) Sei $e \in M$, $e \notin B$.

Dann $e = f(e_1, \dots, e_n)$, mit $f \in \Sigma$ und $e_1, \dots, e_n \in M$.

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass $P(e_1), \dots, P(e_n)$ gelten.

Induktionsschluss: Folgere, dass $P(e)$ gilt.

Strukturelle Induktion

Satz. Falls:

- (1) bewiesen werden kann, dass für alle $b \in B$, $P(b)$ gilt. (Induktionsbasis)
- (2) falls $e = f(e_1, \dots, e_n)$ mit $f \in \Sigma$
unter der Annahme dass $P(e_1), \dots, P(e_n)$ gelten (Induktionsvoraussetzung)
bewiesen werden kann, dass auch $P(e)$ gilt (Induktionsschritt)

Dann gilt $P(m)$ für alle $m \in M$.

Beweis: Sei $A = \{e \mid P(e) \text{ wahr}\}$.

- (1) Da bewiesen werden kann, dass für alle $b \in B$, $P(b)$ gilt, wissen wir, dass A die Basismenge B enthält.
- (2) Da wir aus der Annahme, dass $P(e_1), \dots, P(e_n)$ wahr sind, beweisen können, dass auch $P(e)$ wahr ist, wissen wir, dass falls $e_1, \dots, e_n \in A$, und $f \in \Sigma$ (mit Stelligkeit n), so $f(e_1, \dots, e_n)$ in A .

Da M die kleinste aller Mengen mit Eigenschaften (1) und (2) ist, folgt, dass $M \subseteq A = \{e \mid P(e) \text{ wahr}\}$, d.h. $\forall m \in M, P(m)$ wahr.

Übersicht

- Organisatorisches
- Literatur
- Motivation und Inhalt
- Kurzer Überblick: Logik
- Kurzer Überblick: Beweismethoden