Grundlagen der Theoretischen Informatik

Komplexitätstheorie (I)

30.06.2021

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Abschätzung mit dem O-Kalkül

Abschätzung mit dem O-Kalkül

Komplexität

$$\begin{array}{ccc} \text{Größe des Eingabewertes} & \mapsto & \text{Anzahl der Schritte} \\ n & \mapsto & f(n) \end{array}$$

Abschätzung mit dem O-Kalkül

Komplexität

$$\begin{array}{ccc} \text{Größe des Eingabewertes} & \mapsto & \text{Anzahl der Schritte} \\ n & \mapsto & f(n) \end{array}$$

Idee:

Nicht die genaue Schrittzahl interessant, sondern Abschätzung

$\mapsto$ Einteilung der Algorithmen in “Schwierigkeitsklassen”

Suche eine einfache Funktion g, sodass f “höchstens so schnell wächst” wie g

Abschätzung mit dem O-Kalkül

Definition. Seinen $f, h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

h ist in der Klasse $O(f)$ g.d.w. $\exists c \in \mathbb{R}, c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $\forall n \geq n_0 \; |h(n)| \leq c|f(n)|$

Notation: $h \in O(f)$, manchmal $h(n) \in O(f(n))$.
Manchmal auch $h = O(f)$.

$5n + 4 \in O(n)$

$5n + n^2 \notin O(n)$

$\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)}{2} \in O(n^2)$

p Polynom vom Grad m. Dann $p(n) \in O(n^m)$

Abschätzung mit dem O-Kalkül

Rechenregeln für O

- $f \in O(f)$
- $c \cdot O(f) = O(f)$ (falls $c > 0$)
- $O(O(f)) \subseteq O(f)$
- $O(f) \cdot O(g) \subseteq O(f \cdot g)$
- If $|f| \leq |g|$ then $O(f) \subseteq O(g)$

Abschätzung mit dem O-Kalkül

Es gilt:

(a) $\forall d > 0,\ n^{d+1} \notin O(n^d)$

(b) $\forall r > 1 \forall d\ \ (r^n \notin O(n^d)$ und $n^d \in O(r^n))$

Abschätzung mit dem O-Kalkül

Es gilt:

(a) $\forall d > 0,\ n^{d+1} \notin O(n^d)$

Beweis:

Annahme: $\exists d > 0$ mit $n^{d+1} \in O(n^d)$

$\Rightarrow \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : n^{d+1} \leq cn^d$

$\Rightarrow \exists c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : n \leq c$

Widerspruch

Abschätzung mit dem O-Kalkül

Es gilt:

(b) $\forall r > 1 \forall d \ \ (r^n \notin O(n^d)$ und $n^d \in O(r^n))$

Abschätzung mit dem O-Kalkül

Es gilt:

(b) $\forall r > 1 \forall d \ \ (r^n \notin O(n^d)$ und $n^d \in O(r^n))$

Beweis: Sei n_0 mit $(1 + \frac{1}{n_0})^d = r$

$\frac{(n+1)^d}{n^d} = (1 + \frac{1}{n})^d \leq (1 + \frac{1}{n_0})^d = r \quad$ für alle $n \geq n_0$.

Sei $c = \frac{n_0^d}{r^{n_0}}$. Zu zeigen: $\forall n \geq n_0 : \quad n^d \leq c \cdot r^n$

(äquivalent: $\forall k \geq 0 : (n_0 + k)^d \leq c \cdot r^{n_0+k}$)

$$
\begin{array}{rcl}
(n_0 + k)^d & = & n_0^d \left(\frac{n_0+1}{n_0}\right)^d \left(\frac{n_0+2}{n_0+1}\right)^d \cdots \left(\frac{n_0+k}{n_0+k-1}\right)^d \\
& \leq & n_0^d \cdot \quad r \quad \cdot \quad r \quad \cdots \quad r \\
& \leq & n_0^d \cdot r^k = c \dot{r}^{n_0} \cdot r^k = c \dot{r}^{n_0+k}
\end{array}
$$

Abschätzung mit dem O-Kalkül

Es gilt:

(b) $\forall r > 1 \forall d \;\; (r^n \notin O(n^d)$ und $n^d \in O(r^n))$

Beweis:

Annahme: $\exists r_0 > 1, \exists d_0 : \quad r^n \in O(n^{d_0})$

Schon gezeigt: $\forall r > 1 \forall d \;\; n^d \in O(r^n)$

$\Rightarrow n^{d_0+1} \in O(r_0^n)$

$\Rightarrow n^{d_0+1} \in O(r_0^n) \subseteq O(n^{d_0})$.

Widerspruch.