Grundlagen der Theoretischen Informatik

Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen (II)

16.06.2021

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Organisatorisches

Klausur: 12.08.2021

Übersicht

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

Turing-Maschine

Definition (Turing Machine (DTM))

Eine **determinierte Turing-Maschine (DTM)** $\mathcal{M}$ ist ein Tupel

$$\mathcal{M} = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von Zuständen mit $h \notin K$,
  (h ist der **Haltezustand**)
- Σ ein endliches Alphabet mit $L, R \notin \Sigma$, $\# \in \Sigma$,
- $\delta : K \times \Sigma \to (K \cup \{h\}) \times (\Sigma \cup \{L, R\})$ eine Übergangs**funktion**
- $s \in K$ ein Startzustand.

Anzahl der Zustände: $|K| - 1$
(Startzustand wird nicht mitgezählt).

Turing-Maschine

Anfangskonfiguration

- Ganz links auf dem Band steht ein Blank
- Direkt rechts davon steht das Eingabewort
- Wenn eine DTM mehrere Eingabewörter hintereinander bekommt, sind sie durch Blanks getrennt.
- Rechts vom letzten Eingabewort stehen nur noch Blanks.
- Der Schreib-/Lesekopf der DTM steht auf dem Blank direkt rechts neben dem (letzten) Eingabewort.

Merke:

Das Band enthält immer nur endlich viele Symbole, die keine Blanks sind.

Turing-Maschine

Definition (Konfiguration einer DTM)
Eine **Konfiguration** C einer DTM $\mathcal{M} = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$ ist ein Wort der Form $C = q, w\underline{a}u$. Dabei ist

- $q \in K \cup \{h\}$ der aktuelle Zustand,
- $w \in \Sigma^*$ der Bandinhalt links des Kopfes,
- $a \in \Sigma$ das Bandzeichen unter der Schreib-/Lesekopf.
  Notation: Die Position des Schreib-/Lesekopfes ist durch einen Unterstrich gekennzeichnet.
- $u \in \Sigma^*(\Sigma - \{\#\}) \cup \{\epsilon\}$ der Bandinhalt rechts des Kopfes.

Turing-Maschine

TM

- Konfiguration
- Nachfolgekonfiguration (halten, hängen)
- Rechnung

TM-berechenbare Funktion

Akzeptierte Sprache

TM-Flussdiagramme

TM: Akzeptierte Sprache

Definition (Von einer DTM akzeptierte Sprache)
Ein Wort w wird **akzeptiert von einer DTM $\mathcal{M}$**,
falls $\mathcal{M}$ auf Eingabe von w hält

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ **wird akzeptiert von einer DTM $\mathcal{M}$**, wenn genau die Wörter aus L aus $\mathcal{M}$ und keine anderen akzeptiert werden.

Achtung

Bei nicht akzeptierten Wörtern muss die DTM nicht halten

Sie darf es sogar nicht!

Varianten von Turing-Maschinen

Variationen von Turing-Maschinen

Standard-DTM

Die Turing-Maschine, die wir bisher kennen, ...

- ist determiniert
- hat ein einseitig unbeschränktes Band (**Halbband**).

Ab jetzt nennen wir sie auch:

Standard-Turing-Maschine (Standard-DTM oder kurz DTM)

Variationen von Turing-Maschinen

Turing-Maschinen, die nie hängen

Gegeben:

Eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$, mit Eingabge $\#w\underline{\#}$

Daraus konstruieren wir eine DTM $\mathcal{M}'$, die

- dasselbe berechnet wie $\mathcal{M}$
- **nie hängt**.

Variationen von Turing-Maschinen

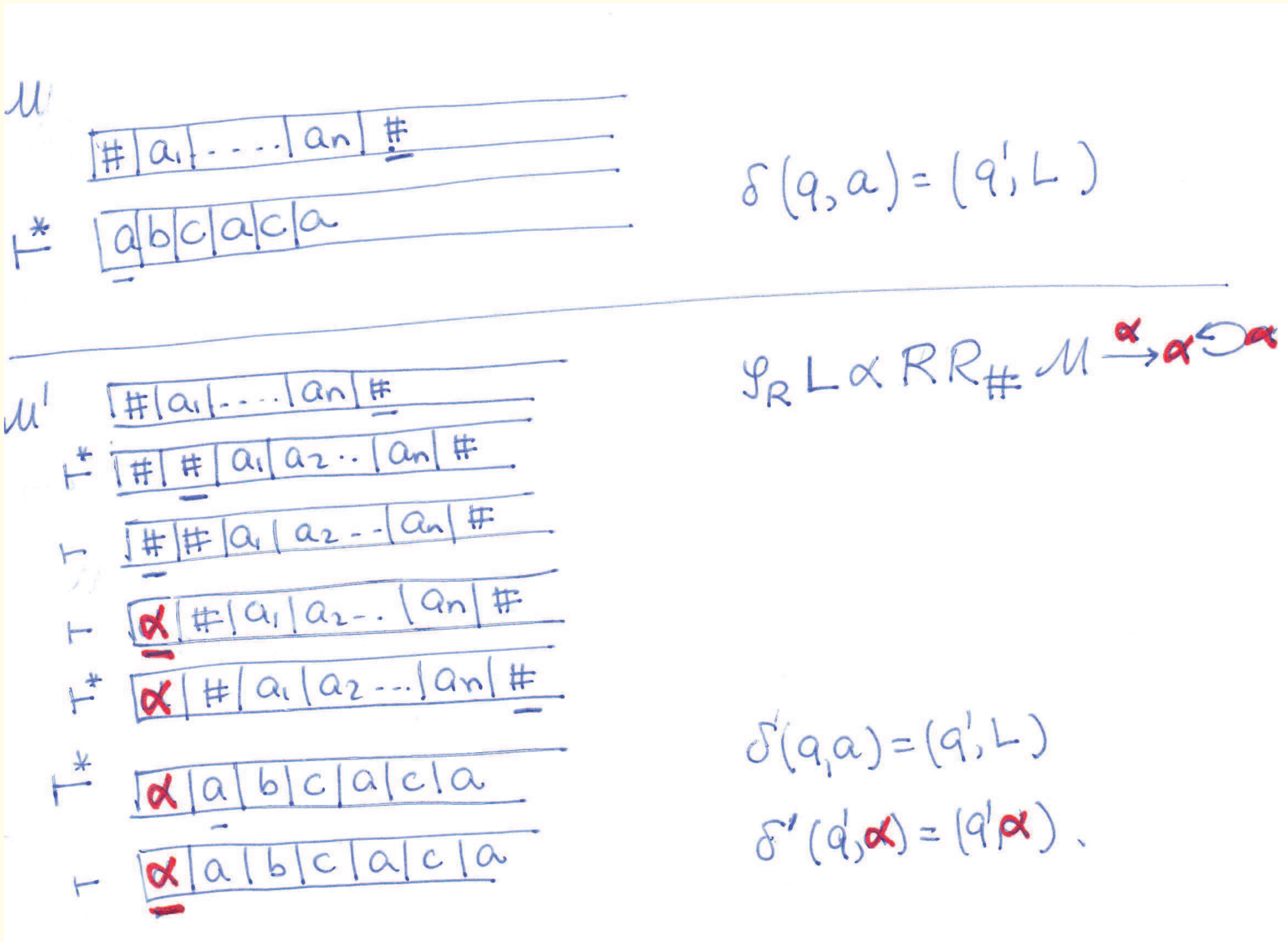
Konstruktion der TM, die nie hängt

Das Bandende ist am Anfang ein Zeichen links vom Eingabewort

DTM $\mathcal{M}'$ rechnet so:

- Sie verschiebt die Eingabe ein Zeichen nach rechts.
- Dann druckt sie ganz links ein **Sonderzeichen** α,
  das das **Bandende** anzeigt.
- Ab dann rechnet sie wie $\mathcal{M}$.
- Aber:
  Wenn sie α erreicht, bleibt sie dort stehen und druckt immer wieder α.

Variationen von Turing-Maschinen



Variationen von Turing-Maschinen

Eigenschaften der nicht-hängenden DTM

- $\mathcal{M}'$ hält für Eingabe w <u>gdw</u> $\mathcal{M}$ hält für Eingabe w.
- $\mathcal{M}'$ hängt nie.
  Wenn $\mathcal{M}$ hängt, rechnet $\mathcal{M}'$ unendlich lang.

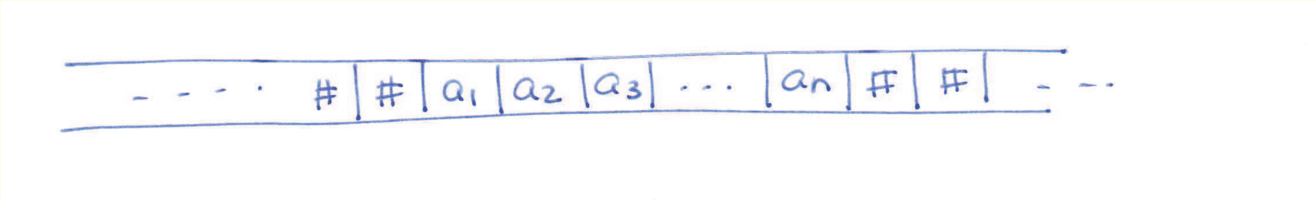
O.B.d.A. sollen alle Turing-Maschinen, die wir von jetzt an betrachten, nie hängen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

- Die Definition der Maschine bleibt gleich.
- Die Definition der **Konfiguration** ändert sich.
- Sie hat immer noch die Form $q, w\underline{a}u$, aber:
  - w umfasst analog zu u alle Zeichen bis zum letzten nicht-Blank links vom Schreib-/Lesekopf.
  - $w = \epsilon$ bzw. $u = \epsilon$ bedeutet, dass links bzw. rechts vom Schreib-/Lesekopf nur noch Blanks stehen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band



DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

Definition (DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band, zw-DTM)

Eine **Turing-Maschine mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)** ist eine DTM, für die die Begriffe der Konfiguration und der Nachfolgekonfiguration wie folgt definiert sind:

Eine **Konfiguration** C einer zw-DTM $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \delta, s)$ ist von der Form

$$C = q, w\underline{a}u$$

Dabei ist

- $q \in K \cup \{h\}$ der aktuelle Zustand,
- $w \in (\Sigma - \{\#\})\Sigma^* \cup \{\epsilon\}$ der Bandinhalt links des Kopfes,
- $a \in \Sigma$ das Zeichen unter dem Kopf, und
- $u \in \Sigma^*(\Sigma - \{\#\}) \cup \{\epsilon\}$ der Bandinhalt rechts des Kopfes.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

Definition (Forts.)

$C_2 = q_2, w_2\underline{a_2}u_2$ heißt **Nachfolgekonfiguration** von $C_1 = q_1, w_1\underline{a_1}u_1$,

in Zeichen $C_1 \vdash_{\mathcal{M}} C_2$, falls es einen Übergang $\delta(q_1, a_1) = (q_2, b)$ gibt, mit:

Fall 1: $b \in \Sigma$**.** Dann $w_1 = w_2, u_1 = u_2$ und $a_2 = b$.

Fall 2: $b = L$**.** Für u_2: Wenn $a_1{=}\#$ und $u_1{=}\epsilon$ ist, dann $u_2{=}\epsilon$, sonst $u_2{=}a_1u_1$.
Für a_2 und w_2: Wenn $w_1{=}\epsilon$ ist, dann $w_2{=}\epsilon$ und $a_2{=}\#$; sonst $w_1{=}w_2a_2$.

Fall 3: $b = R$**.** Für w_2: Wenn $a_1{=}\#$ und $w_1{=}\epsilon$ ist, dann $w_2{=}\epsilon$, sonst $w_2{=}w_1a_1$.
Für a_2 und u_2: Wenn $u_1{=}\epsilon$ ist, dann $u_2{=}\epsilon$ und $a_2{=}\#$; ansonsten $u_1{=}a_2u_2$.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

Theorem (Simulation von zw-DTM durch DTM)
Zu jeder zw-DTM $\mathcal{M}$, die eine Funktion f berechnet oder eine Sprache L akzeptiert, existiert eine Standard-DTM $\mathcal{M}'$, die ebenfalls f berechnet bzw. L akzeptiert.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

Theorem (Simulation von zw-DTM durch DTM)
Zu jeder zw-DTM $\mathcal{M}$, die eine Funktion f berechnet oder eine Sprache L akzeptiert, existiert eine Standard-DTM $\mathcal{M}'$, die ebenfalls f berechnet bzw. L akzeptiert.

Beweis Sei $w = a_1 \dots a_n$ die Eingabe für $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \delta, s)$.

Dann sieht das beidseitig unendliche Band zu Beginn der Rechnung so aus:

$$\dots \#\#\# a_1 \dots a_n \underline{\#}\# \dots$$

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

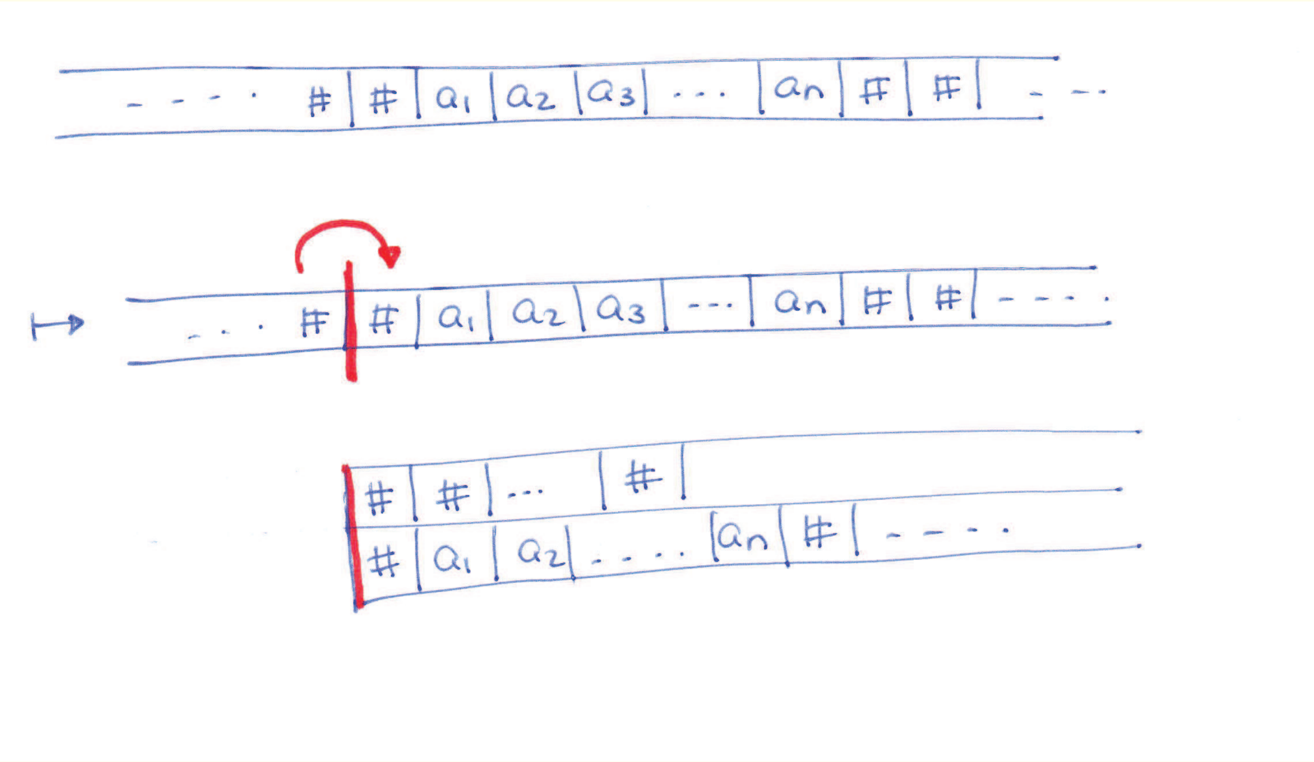
Beweis (Forts.) **Idee:**

- $\mathcal{M}$ hat quasi zwei unendlich lange Halbbänder.
- Ziel ist, den Inhalt beider Halbbänder von $\mathcal{M}$ auf einem unterzubringen.
- Dazu: Den Teil des Bandes, der zwei Zeichen links vom Input w beginnt, umklappen:

$$\begin{array}{l} \text{Spur 1}\ \#\,\#\ldots\#\,\# \\ \text{Spur 2}\ \#\,a_1\ldots a_n\,\underline{\#} \end{array} \ldots$$

- Die DTM $\mathcal{M}'$ hat zwei **Spuren**, d.h. zwei Reihen von Zeichen, die auf demselben Band untergebracht (kodiert) sind.
- Das Bandalphabet von $\mathcal{M}'$ ist $\Sigma' \supseteq \Sigma \times \Sigma$.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band



DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

Beweis (Forts.) Sei $\mathcal{M}' = (\ K', \Sigma', \delta', s\ )$. $\mathcal{M}'$ rechnet so:

- $\mathcal{M}'$ legt zunächst eine zweite Spur an,
- simuliert dann die Arbeit von $\mathcal{M}$, und
- transformiert dann das Ergebnis wieder auf nur eine Spur herunter.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

Beweis (Forts.) **Erste Phase der Rechnung:**

$\mathcal{M}'$ rechnet

$$s, \#a_1 \ldots a_n\underline{\#} \ \vdash^*_{\mathcal{M}'} \ q, \$ \begin{array}{c} \# \# \ldots \# \# \\ \# a_1 \ldots a_n \underline{\#} \end{array} \# \ldots$$

Die zweite Spur wird nur so weit wie nötig angelegt.

Mit dem Symbol \$ markiert $\mathcal{M}'$ das Ende des Halbbands, damit sie nicht hängenbleibt.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

Beweis (Forts.) **Zweite Phase der Rechnung:**

$\mathcal{M}'$ simuliert $\mathcal{M}$.

Dabei muß sie sich immer merken, auf welcher der beiden Spuren sie gerade arbeitet.

Deshalb definieren wir $K' \supseteq K \times \{1, 2\}$.

(q, i) bedeutet, dass die simulierte Maschine $\mathcal{M}$ im Zustand q ist und $\mathcal{M}'$ auf Spur i arbeitet.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

Beweis (Forts.) Für die Simulation von $\mathcal{M}$ durch $\mathcal{M}'$ soll nun gelten:

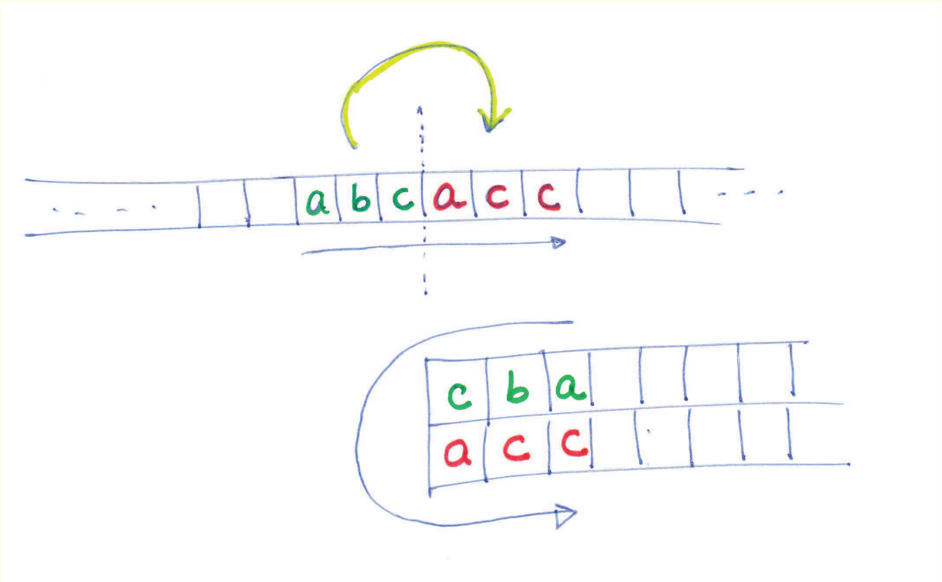
$\mathcal{M}$ erreicht von $s, \# \vdots \# w \underline{\#}$ aus eine Konfiguration $q, u_1 b \vdots a u_2$

<u>gdw</u>

$\mathcal{M}'$ rechnet $p, \$ \begin{smallmatrix} \# & \cdots & \# \\ \# & w & \underline{\#} \end{smallmatrix} \# \vdash^*_{\mathcal{M}'} p', \$ \begin{smallmatrix} b & u_1^R & \# & & \# \\ a & u_2 & \# & \dots & \# \end{smallmatrix} \#$

($\vdots$ steht in beiden Konf. zwischen denselben zwei Bandpositionen (an denen das Band “umklappt”))

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band



DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

Beweis (Forts.) $\mathcal{M}'$ simuliert $\mathcal{M}$ wie folgt:

- Wenn $\mathcal{M}'$ das Zeichen \$ erreicht, wechselt sie die Spur.
- Wenn die simulierte Maschine $\mathcal{M}$ nach rechts (links) geht, geht $\mathcal{M}'$ nach rechts (links) auf Spur 2 und nach links (rechts) auf Spur 1.
- Wenn $\mathcal{M}'$ ein $\#$ erreicht (d.h. sie erreicht den Bandteil, wo noch nicht zwei Spuren angelegt sind), macht sie daraus $\substack{\#\\\#}$.

Gilt etwa $\delta_{\mathcal{M}}(q,a) = (q',L)$, so muß in $\mathcal{M}$ gelten:

- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q,2), \substack{x\\a}\big) = \big((q',2), L\big)$ für alle möglichen x,
- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q,1), \substack{a\\x}\big) = \big((q',1), R\big)$ (auf der oberen Spur ist der Inhalt des "linken Halbbandes" revers notiert, deshalb muß hier die Laufrichtung entgegengesetzt sein).

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

Beweis (Forts.)

Außerdem gilt immer:

- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q,1),\$\big) = \big((q,2),R\big)$
- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q,2),\$\big) = \big((q,1),R\big)$
  Spurwechsel beim Überschreiten von \$
- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q,i),\#\big) = \big(q,i), \genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#}\big)$
  Erzeugen eines neuen Doppelspurstücks
- etc.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

Beweis (Forts.)

Wenn dann $\mathcal{M}$ mit $h, u\underline{\#}$ hält, dann erreicht $\mathcal{M}'$ eine Konfiguration, die eine der folgenden Formen hat:

$$(i) \qquad (h,1), \$ \genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#} \ldots \genfrac{}{}{0pt}{}{\overline{\#}}{\#} \genfrac{}{}{0pt}{}{u^R}{\#\cdots\#} \genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#} \ldots \genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#} \text{ oder}$$

$$(ii) \qquad (h,2), \$ \genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#} \ldots \genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#} \genfrac{}{}{0pt}{}{\#\cdots\#}{u} \genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\underline{\#}} \ldots \genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#} \text{ oder}$$

$$(iii) \qquad (h,2), \$ \genfrac{}{}{0pt}{}{u_1^R}{u_2\underline{\#}} \genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#} \ldots \genfrac{}{}{0pt}{}{\#}{\#} \text{ mit } u_1 u_2 = u.$$

Bei Konfigurations-Form (iii) kann entweder das u_1^R über das u_2 "hinausragen" oder umgekehrt.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

Beweis (Forts.) **Dritte Phase der Rechnung:**

Die Simulation von $\mathcal{M}$ ist abgeschlossen.

$\mathcal{M}'$ muß nun den Bandinhalt von zwei Spuren auf nur eine heruntertransformieren, um danach die Konfiguration $h, \#u\underline{\#}$ zu erreichen.

- $\mathcal{M}'$ macht zunächst alle $\substack{\# \\ \#}$ rechts vom beschriebenen Bandteil zu $\#$. Für Fall (i) und (ii) löscht sie die $\substack{\# \\ \#}$ links von u^R bzw. u.
- Für Fall (iii) schiebt $\mathcal{M}'$ dann die untere Spur nach links, bis sie eine Konfiguration $q, \substack{u_1^R \\ \#\ldots\#} u_2\underline{\#}$ erreicht.
- Für Fall (i) und (iii) muß $\mathcal{M}'$ jetzt u_1^R bzw. u^R auf nur eine Spur transformieren und zugleich invertieren, sie muß also für den allgemeineren Fall (iii) $q, \$ \substack{u_1^R \\ \#\ldots\#} u_2\underline{\#} \vdash^*_{\mathcal{M}'} q', \$u_1u_2\underline{\#}$ rechnen.
- Danach muß $\mathcal{M}'$ nur noch das \$ links löschen und nach rechts neben u laufen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

Damit hat die Standard-DTM $\mathcal{M}'$ die Arbeitsweise der zw-DTM $\mathcal{M}$ vollständig simuliert.

Also kann man mit zw-Turing-Maschinen nicht mehr berechnen als mit Standard DTMs. $\square$

Variationen von Turing-Maschinen

- Standard-DTM
- Turing-Maschinen, die nie hängen
- DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)
- DTM mit k Halbbändern

DTM mit k Halbbändern

#	1	1	#	1	1	#	

#	#	#	#	#	#	#	

#	#	#	#	#	#	#	

DTM mit k Halbbändern

#	1	1	#	#	#	#

#	1	1	#	#	#	#

#	#	#	#	#	#	#

DTM mit k Halbbändern

#	1	1	#	#	#	#

#	1	1	#	#	#	#

#	1	1	#	#	#	#

DTM mit k Halbbändern

#	1	1	#	#	#	#

#	1	1	#	#	#	#

#	1	1	1	1	#	#

DTM mit k Halbbändern

#	1	1	1	1	#	#

#	#	#	#	#	#	#

#	#	#	#	#	#	#

DTM mit k Halbbändern

Definition (DTM mit k Halbbändern, k-DTM)
Eine **Turing-Maschine** $\mathcal{M} = (\ K, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_k, \delta, s\ )$ **mit k Halbbändern** (mit je einem Kopf) ist eine Turing-Maschine mit einer Übergangsfunktion

$$\delta : K \times \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_k \to$$
$$(K \cup \{h\}) \times (\Sigma_1 \cup \{L, R\}) \times \ldots \times (\Sigma_k \cup \{L, R\})$$

Eine **Konfiguration** einer k-Turing-Maschine hat die Form

$$C = q, w_1 \underline{a_1} u_1, \ldots, w_k \underline{a_k} u_k.$$

DTM mit k Halbbändern

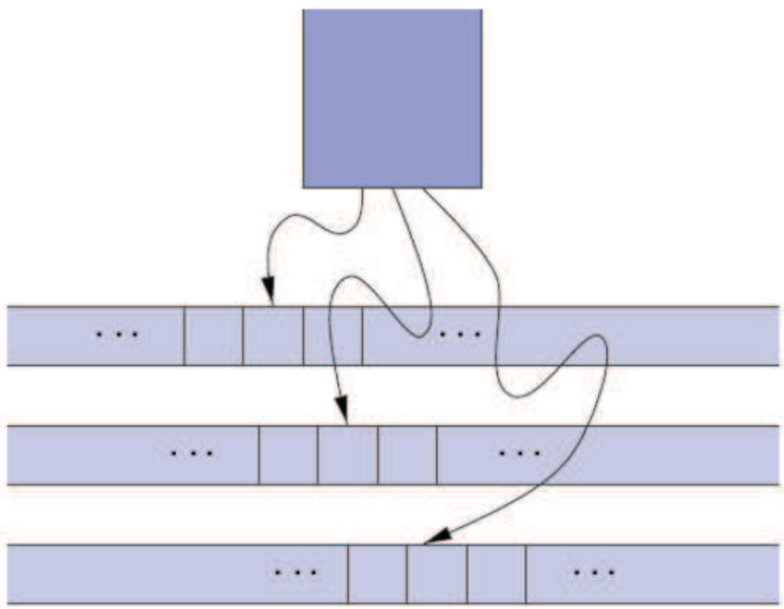


Abbildung 8.12: Eine Turing-Maschine mit mehreren Bändern

DTM mit k Halbbändern

DTM mit k Halbbändern

- Die Köpfe einer k-DTM können sich **unabhängig** bewegen (sonst hätten wir nur eine DTM mit k Spuren).
- Die Definition der Nachfolgekonfiguration verläuft analog zu der Definition bei Standard-DTM.
- Für eine k-DTM, die eine Funktion $f : \Sigma_0^m \to \Sigma_0^n$ berechnet, legen wir fest, dass sowohl die m Eingabewerte als auch – nach der Rechnung – die n Ergebniswerte auf dem ersten Band stehen sollen.
- Es übertragen sich alle Begriffe wie *berechenbar, entscheidbar* etc. kanonisch auf k-DTM.

DTM mit k Halbbändern

Theorem [Simulation von k-DTM durch DTM]
Zu jeder k-DTM $\mathcal{M}$, die eine Funktion f berechnet (resp. eine Sprache L akzeptiert), existiert eine DTM $\mathcal{M}'$, die ebenfalls f berechnet (resp. L akzeptiert).

DTM mit k Halbbändern

Beweis (Skizze)

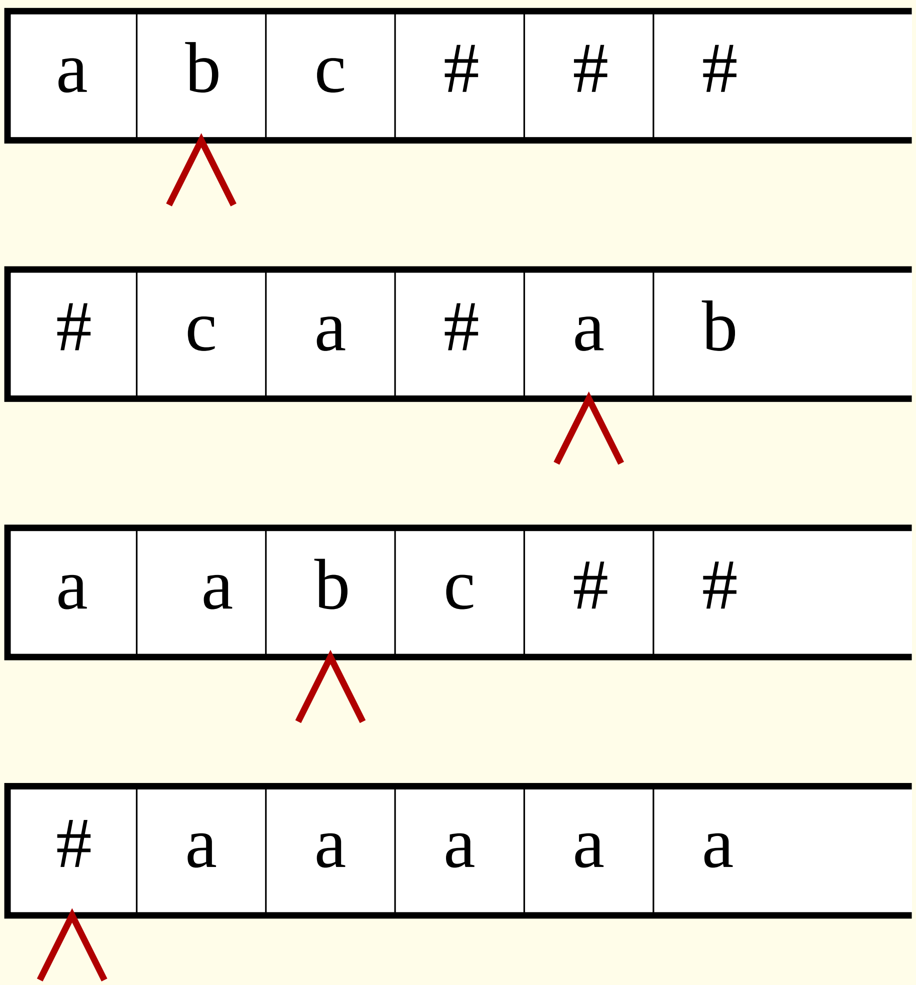
Wir arbeiten mit einer Turing-Maschine mit mehreren Spuren.

Um eine k-**DTM** zu simulieren, verwenden wir $2k$ **Spuren**, also Bandzeichen, die aus $2k$ übereinander angeordneten Buchstaben bestehen.

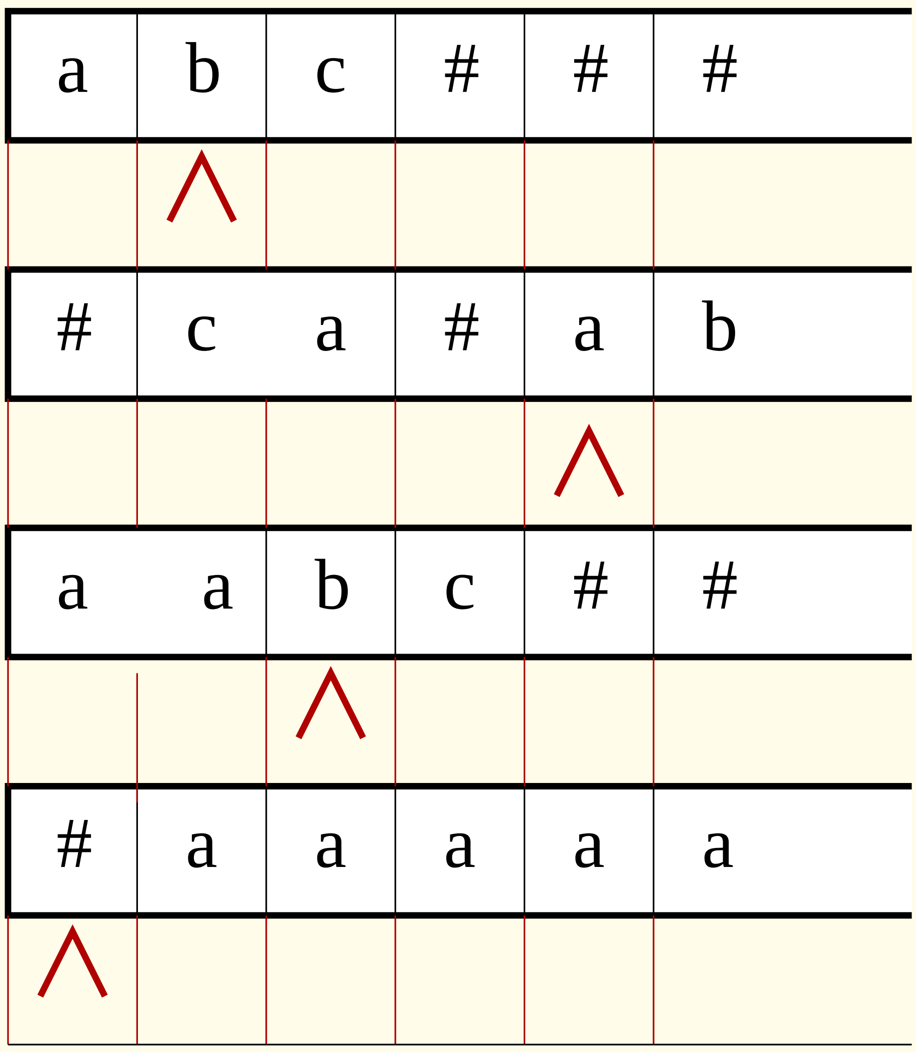
- In den Spuren mit ungerader Nummer stehen die Inhalte der k Bänder von $\mathcal{M}$.
- Die Spuren mit gerader Nummer verwenden wir, um die Positionen der Köpfe von $\mathcal{M}$ zu simulieren:
  Die $2i$-te Spur enthält an genau einer Stelle ein $\wedge$, nämlich da, wo $\mathcal{M}$ gerade seinen i-ten Kopf positioniert hätte, und ansonsten nur Blanks.

$\mathcal{M}'$ kodiert zunächst die Eingabe von $\mathcal{M}$. Dann simuliert $\mathcal{M}'$ die Maschine $\mathcal{M}$. Am Ende der Rechnung wird noch die Ausgabe dekodiert.

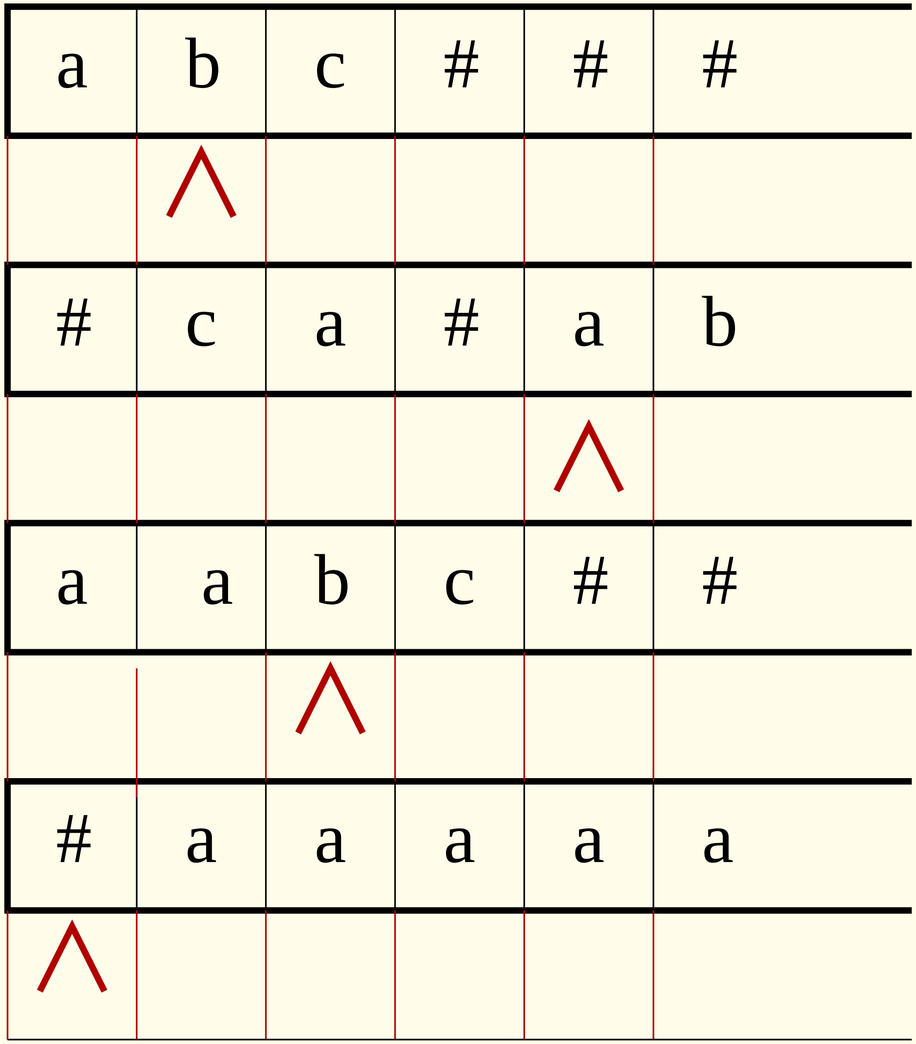
DTM mit k Halbbändern



DTM mit k Halbbändern



DTM mit k Halbbändern



Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- Entscheidbar/Aufzählbar
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- Unentscheidbarkeit