

Grundlagen der Theoretischen Informatik

Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen (III)

17.06.2021

Viorica Sofronie-Stokkermans

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Übersicht

1. Motivation
2. Terminologie
3. Endliche Automaten und reguläre Sprachen
4. Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen
5. Turingmaschinen und rekursiv aufzählbare Sprachen
6. Berechenbarkeit, (Un-)Entscheidbarkeit
7. Komplexitätsklassen P und NP

Bis jetzt

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- **Varianten von Turing-Maschinen**
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- Entscheidbar/Aufzählbar
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- Unentscheidbarkeit

Jetzt

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- **Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)**
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- Entscheidbar/Aufzählbar
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- Unentscheidbarkeit

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Definition (Indeterminierte Turing-Maschine, NTM)

Eine **indeterminierte Turing-Maschine** \mathcal{M} ist ein Tupel

$$M = (K, \Sigma, \Delta, s)$$

Dabei sind K , Σ , s definiert wie bei determinierten Turing-Maschinen.

Übergangsrelation:

$$\Delta \subseteq (K \times \Sigma) \times ((K \cup \{h\}) \times (\Sigma \cup \{L, R\}))$$

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Mehrere Nachfolgekonfigurationen

Konfigurationen sind definiert wie bei DTMs.

Nun kann eine Konfiguration aber mehrere mögliche Nachfolgekonfigurationen haben.

Definition (NTM: Halten, Hängen, Akzeptieren) Sei $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \Delta, s_0)$ eine indeterminierte Turing-Maschine.

- \mathcal{M} **hält** bei Input w , falls es **unter den möglichen Rechnungen**, die \mathcal{M} wählen kann, **eine gibt**, so dass \mathcal{M} eine Haltekonfiguration erreicht.
- \mathcal{M} **hängt** in einer Konfiguration, wenn es keine (durch Δ definierte) Nachfolgekonfiguration gibt.
- \mathcal{M} **akzeptiert** ein Wort w , falls sie **von $s, \#w\#$ aus einen Haltezustand erreichen kann**, und \mathcal{M} akzeptiert eine Sprache L , wenn sie genau alle Wörter $w \in L$ akzeptiert.

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Wie rechnet eine indeterminierte Turing-Maschine?

- Die Regeln einer determinierten DTM kann man sich als Programm (aus sehr einfachen Schritten) vorstellen.
- **Bei NTM ist das anders!**
- **Eine NTM ist nicht einfach eine Maschine, die immer richtig rät!**

Dieselbe Diskussion hatten wir bei indeterminierten endlichen Automaten.

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Vorstellung von einer NTM

- Korrekte Vorstellung:
 - Übergänge von Konfiguration zu Nachfolgekongfiguration entspr. Regelmenge
 - **plus Suchverfahren!**

oder: Eine NTM beschreitet alle möglichen Rechenwege parallel.

- Eine NTM akzeptiert ein Wort, wenn es mindestens einen Berechnungsweg gibt, der in einer Haltekonfiguration endet.
- Sprechweise **“Die NTM rät”**: Wir verwenden diese Sprechweise, sie ist aber mit Vorsicht zu genießen!

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Beispiel.

Sei

$$L = \{|^n \mid n \text{ ist nicht prim und } n \geq 2\}$$

Eine NTM kann diese Sprache wie folgt akzeptieren:

1. Eine Zahl „raten“ und (nach rechts) aufs Band schreiben.
2. Noch eine Zahl „raten“ und daneben schreiben.
3. Die beiden Zahlen miteinander multiplizieren.
4. Das Ergebnis mit der Eingabe vergleichen.
5. Genau dann, wenn beide gleich sind, anhalten.

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Theorem [Simulation von NTM durch DTM]

Jede Sprache, die von einer indeterminierten Turing-Maschine akzeptiert wird, wird auch von einer Standard-DTM akzeptiert.

Beweis (Anfang) Sei

- L eine Sprache über Σ_0^* mit $\# \notin \Sigma_0$;
- $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \Delta, s)$ eine indeterminierte Turing-Maschine, die L akzeptiert.

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Beweis (Fortsetzung) Wir konstruieren zu \mathcal{M} eine Standard-DTM \mathcal{M}' , die so rechnet:

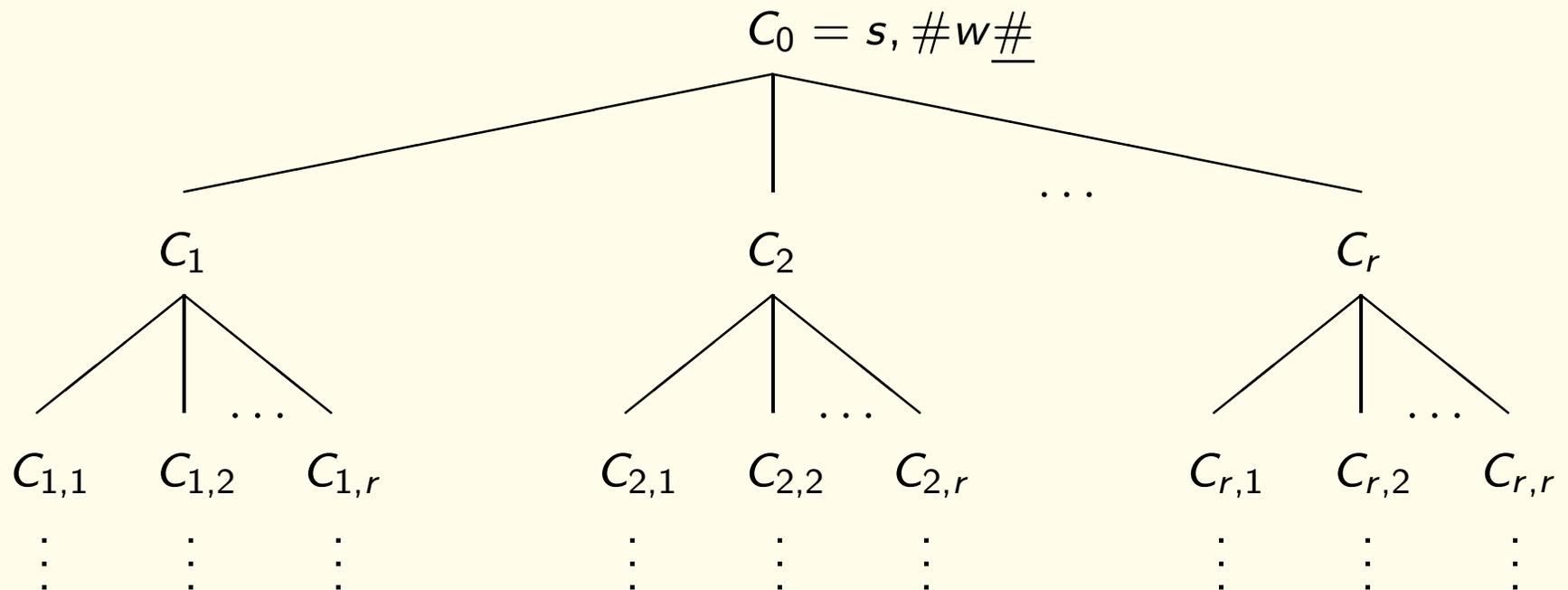
- \mathcal{M}' durchläuft systematisch **alle** Rechnungen von \mathcal{M} , und sucht dabei nach einer Haltekonfiguration.
- \mathcal{M}' hält genau dann, wenn sie eine Haltekonfiguration von \mathcal{M} findet.

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Beweis (Fortsetzung) Suchbaum, Rechnungsbaum:

Stelle alle Rechnungen von \mathcal{M} von einer Startkonfiguration C_0 dar als einen Baum mit Wurzel C_0 .

Ein Ast ist eine mögliche Rechnung von \mathcal{M} .



Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Beweis (Fortsetzung)

Problem:

Es kann zur Startkonfiguration

$$C_0 = s, \#w\underline{\#}$$

unendlich viele Rechnungen von \mathcal{M} geben,
und jede einzelne von ihnen kann unendlich lang sein.

Wir können also nicht erst einen Ast ganz durchlaufen und dann den nächsten Ast durchsuchen.

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Beweis (Fortsetzung)

Die Lösung:

Breitensuche

Durchlaufe den Rechnungsbaum nicht depth-first, sondern per **iterative deepening**.

- Untersuche alle möglichen Rechnungen bis zum ersten Schritt.
- Untersuche alle möglichen Rechnungen bis zum zweiten Schritt.
- Untersuche alle möglichen Rechnungen bis zum dritten Schritt.
- usw.

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Beweis (Fortsetzung)

Können wir damit denn in endlicher Zeit eine Haltekonfiguration finden, falls es eine gibt?

Problem:

Kann der Rechnungsbaum nicht nur **unendlich tief**, sondern auch **unendlich breit** werden?

Nein, denn:

Maximale Anzahl von Nachfolgekonfigurationen

$$r = \max\{|\Delta(q, a)| \mid q \in K, a \in \Sigma\}$$

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Beweis (Fortsetzung)

\mathcal{M}' kann (z.B.) als eine 3-DTM gewählt werden:

- **Auf dem ersten Band steht immer das Eingabewort w .**

Da die Rechnung immer wieder neu mit $s, \#w\#$ von \mathcal{M} beginnt, wird das Eingabewort immer wieder gebraucht.

- **Auf dem zweiten Band steht, welcher Weg durch den Rechnungsbaum gerade verfolgt wird.**

Der Einfachheit halber: Wenn eine Konfiguration weniger als r Nachfolgekongfigurationen hat, soll der zugehörige Knoten trotzdem r Söhne haben, und die überzähligen Konfigurationen sind leer.

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

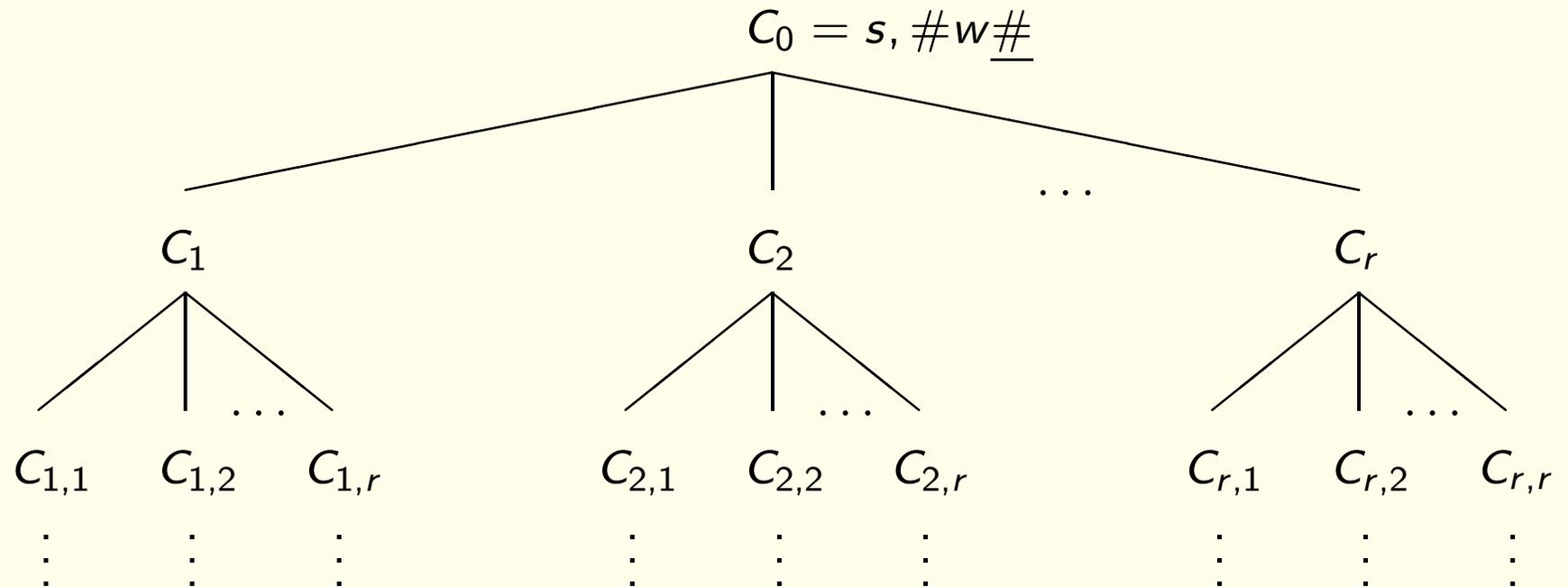
Beweis (Fortsetzung)

Darstellung des aktuellen Pfades im Rechnungsbaum als Zahl im r -adischen System.

Eine Zahl $d_1 \dots d_n$ bedeutet:

- Von der Startkonfiguration C_0 aus ist die d_1 -te der r möglichen Nachfolgekongfigurationen gewählt worden, C_{d_1} .
- Von C_{d_1} , einem Knoten der Tiefe 1, aus wurde die d_2 -te mögliche Nachfolgekongfiguration gewählt,
- usw.

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)



Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Beweis (Fortsetzung)

Ausführung des Iterative Deepening:

- Beginne mit 0 auf zweitem Band.
- Jeweils nächste zu betrachtende Rechnung durch Erhöhen der Zahl auf Band 2 um 1
- Auf Band 3 wird eine Rechnung von \mathcal{M} **determiniert** simuliert.
Und zwar entsprechend der Zahl $d_1 \dots d_n$ auf Band 2.
Die Endkonfiguration $C_{d_1 \dots d_n}$ dieser Rechnung steht im Rechenbaum an dem Knoten, der das Ende des Pfades $d_1 \dots d_n$ bildet.
- Ist die Konfiguration $C_{d_1 \dots d_n}$ eine Haltekonfiguration, so hält \mathcal{M}' .
- Sonst Zahl auf Band 2 erhöhen und die nächste Rechnungssimulation beginnen

Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)

Beweis (Ende)

Damit gilt:

\mathcal{M}' hält bei Input w

gdw

es gibt in R_{C_0} eine Haltekonfiguration.

Das ist genau dann der Fall, wenn

- \mathcal{M} bei Input w hält,
- w in L liegt.

□

Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- **Universelle determinierte Turing-Maschinen**
- Entscheidbar/Aufzählbar
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- Unentscheidbarkeit

Universelle determinierte Turing-Maschinen

Vergleich Turing-Maschine / „normaler“ Computer

Turing-Maschinen sind sehr mächtig.

Wie mächtig sind sie wirklich?

- Eine Turing-Maschine hat ein vorgegebenes „Programm“ (Regelmenge)
- „Normale“ Computer können beliebige Programme ausführen.

Tatsächlich geht das mit Turing-Maschinen auch!

Universelle determinierte Turing-Maschinen

Turing-Maschine, die andere TMs simuliert

- Universelle TM \mathcal{U} bekommt als Eingabe:
 - die Regelmenge einer beliebigen Turing-Maschine \mathcal{M} und
 - ein Wort w , auf dem \mathcal{M} rechnen soll.
- \mathcal{U} simuliert \mathcal{M} , indem sie jeweils nachschlägt, welchen δ -Übergang \mathcal{M} machen würde.

Universelle determinierte Turing-Maschinen

TM als Eingabe für eine andere TM

Frage:

In welches Format fasst man die Regeln einer DTM \mathcal{M} am besten, um sie einer universellen DTM als Eingabe zu geben?

Was muss man angeben, um eine DTM komplett zu beschreiben?

- das Alphabet,
- die Zustände,
- die δ -Übergänge,
- den Startzustand.

Universelle determinierte Turing-Maschinen

Standardisierung von Alphabet, Zustandsmenge, Startzustand

- Unendliches Alphabet $\Sigma_\infty = \{a_0, a_1, \dots\}$,
so dass das Alphabet jeder DTM eine Teilmenge von Σ_∞ ist.
- Namen der Zustände einer DTM sind egal.
Sie seien also q_1, \dots, q_n
(n kann dabei von DTM zu DTM verschieden sein).
- Sei q_1 immer der Startzustand, und
bezeichne q_0 den Haltezustand

Damit:

**Wir können eine DTM komplett beschreiben,
indem wir nur ihre δ -Übergänge beschreiben.**

Universelle determinierte Turing-Maschinen

(Mögliche) Kodierung der Übergangsrelation Die DTM $\mathcal{L}_\#$ habe die Regeln

$$q_1, \# \mapsto q_2, L \quad q_2, \# \mapsto h, \#$$

$$q_1, | \mapsto q_2, L \quad q_2, | \mapsto q_2, L$$

Dabei sei: $\# = a_0$ und $| = a_1$

Dann kann die DTM $\mathcal{L}_\#$ so beschrieben werden:

	a_0	a_1
q_1	q_2, L	q_2, L
q_2	h, a_0	q_2, L

oder kürzer:

$Z S 2\lambda S 2\lambda$

$Z S 00 S 2\lambda$

Universelle determinierte Turing-Maschinen

(Mögliche) Kodierung der Übergangsrelation Dabei steht:

- Z für “nächste Zeile”
- S für “nächste Spalte”
- λ für “links”, ρ für “rechts”
- die Zahl n für den n -ten Zustand und für das n -te Zeichen von Σ_∞ .

Damit ist die DTM insgesamt durch ein einziges Wort beschrieben:

$ZS2\lambda S2\lambda ZS00S2\lambda$

Universelle determinierte Turing-Maschinen

Gödelisierung

Ein Verfahren, jeder Turing-Maschine eine Zahl oder ein Wort (**Gödelzahl** bzw. **Gödelwort**) so zuzuordnen, dass man aus der Zahl bzw. dem Wort die Turing-Maschine effektiv rekonstruieren kann.

Kurt Gödel

Kurt Gödel 1906-1978

- Bedeutendster Logiker des 20. Jahrhunderts
- Vollständigkeitssatz (1929)
Promotion in Wien
- Unvollständigkeitssatz (1931)
Idee der Gödelisierung
- Beweis der Unabhängigkeit der
Kontinuumshypothese
- Dozent in Princeton,
befreundet mit Albert Einstein
- Tragischer Tod:
Verfolgungswahn, Depressionen,
Tod durch Unterernährung.



Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- **Entscheidbar/Aufzählbar**
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- Unentscheidbarkeit

Entscheidbar/Aufzählbar

Akzeptieren

Eine DTM **akzeptiert** eine Sprache L , wenn sie

- für jedes Eingabe-Wort $w \in L$ irgendwann hält
- für jedes Wort $v \notin L$ unendlich lang rechnet oder hängt

Entscheiden

Eine DTM **entscheidet** eine Sprache L , wenn sie

- für jedes Eingabe-Wort $w \in L$ hält mit dem Bandinhalt Y ("Yes")
- für jedes Wort $v \notin L$ hält mit dem Bandinhalt N ("No")

Akzeptierbarkeit und Entscheidbarkeit

Definition [Entscheidbar]

L sei eine Sprache über Σ_0 mit $\#, N, Y \notin \Sigma_0$.

$M = (K, \Sigma, \delta, s)$ sei eine DTM mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

M **entscheidet** L , falls für alle $w \in \Sigma_0^*$ gilt:

$$s, \# \underline{w} \# \vdash_M^* \begin{cases} h, \# \underline{Y} \# & \text{falls } w \in L \\ h, \# \underline{N} \# & \text{sonst} \end{cases}$$

L heißt **entscheidbar**, falls es eine DTM gibt, die L entscheidet.

Akzeptierbarkeit und Entscheidbarkeit

Definition [Akzeptierbar]

L sei eine Sprache über Σ_0 mit $\#, N, Y \notin \Sigma_0$.

$M = (K, \Sigma, \delta, s)$ sei eine DTM mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

\mathcal{M} **akzeptiert** ein Wort $w \in \Sigma_0^*$, falls \mathcal{M} bei Input w hält.

\mathcal{M} **akzeptiert die Sprache L** , falls für alle $w \in \Sigma_0^*$ gilt:

\mathcal{M} akzeptiert w *genau dann wenn* $w \in L$

L heißt **akzeptierbar** (oder auch **semi-entscheidbar**), falls es eine DTM gibt, die L akzeptiert.

Rekursiv aufzählbar

Definition [Rekursiv Aufzählbar (recursively enumerable)]

L sei eine Sprache über Σ_0 mit $\#, N, Y \notin \Sigma_0$.

$M = (K, \Sigma, \delta, s)$ sei eine DTM mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

\mathcal{M} **zählt** L **auf**, falls es einen Zustand $q_B \in K$ gibt (den **Blinkzustand**), so dass:

$$L = \{w \in \Sigma_0^* \mid \exists u \in \Sigma^* : s, \underline{\#} \vdash_{\mathcal{M}}^* q_B, \#w\underline{\#}u\}$$

L heißt **rekursiv aufzählbar**, falls es eine DTM gibt, die L aufzählt.

Rekursiv aufzählbar

Achtung: aufzählbar \neq abzählbar.

Unterschied

M **abzählbar:** Es gibt eine surjektive Abbildung der natürlichen Zahlen auf M

M **aufzählbar:** Diese Abbildung kann von einer Turing-Maschine berechnet werden.

Wegen Endlichkeit der Wörter und des Alphabets sind alle Sprachen abzählbar.

Aber nicht alle Sprachen sind aufzählbar.

Aufzählbarkeit / Entscheidbarkeit / Unentscheidbarkeit

Fragen:

Gibt es nicht-aufzählbare Probleme?

Gibt es nicht-entscheidbare Probleme?

Aufzählbarkeit / Entscheidbarkeit / Unentscheidbarkeit

Fragen:

Gibt es nicht-aufzählbare Probleme?

Gibt es nicht-entscheidbare Probleme?

Antwort: Ja, es gibt nicht-aufzählbare Probleme und es gibt nicht-entscheidbare Probleme.

Beweis: Die Menge aller Sprachen ist nicht abzählbar

Die Turingmaschinen können abgezählt werden: M_1, M_2, \dots

Die Mächtigkeit der Menge aller Sprachen ist größer als die Mächtigkeit der Menge aller Turingmaschinen.

⇒ es gibt Sprachen für die es keine TM gibt, die sie aufzählt.

⇒ es gibt Sprachen für die es keine TM gibt, die sie entscheidet.

Rekursiv aufzählbar: Beispiele

Rekursiv aufzählbar aber nicht entscheidbar

Folgende Mengen sind rekursiv aufzählbar aber *nicht* entscheidbar:

- Die Menge der Gödelisierungen aller haltenden Turing-Maschinen
- Die Menge aller terminierenden Programme
- Die Menge aller allgemeingültigen prädikatenlogischen Formeln

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Theorem [Akzeptierbar = Rekursiv Aufzählbar].

Eine Sprache ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn sie akzeptierbar ist.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Theorem [Akzeptierbar = Rekursiv Aufzählbar].

Eine Sprache ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn sie akzeptierbar ist.

Beweis “ \Rightarrow ”

Sei L rekursiv aufzählbar

Es gibt also eine DTM \mathcal{M}_L , die L aufzählt.

Zur Erinnerung:

\mathcal{M}_L **zählt** L **auf**, falls es einen Zustand $q_B \in K$ gibt (den **Blinkzustand**), so dass:

$$L = \{w \in \Sigma_0^* \mid \exists u \in \Sigma^* : s, \underline{\#} \vdash_{\mathcal{M}}^* q_B, \#w\underline{\#}u\}$$

Zu zeigen: L ist akzeptierbar, d.h. es existiert eine DTM, die L akzeptiert.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

Wir konstruieren aus \mathcal{M}_L eine 2-DTM \mathcal{M} , die L akzeptiert:

- \mathcal{M} wird gestartet mit

$$s_0, \quad \#w\underline{\#}$$
$$\underline{\#}$$

- \mathcal{M} simuliert auf Band 2 die Maschine \mathcal{M}_L .
- Wenn \mathcal{M}_L den **Blinkzustand** q_B erreicht, dann enthält Band 2 von \mathcal{M} ein Wort

$$\#w'\underline{\#}u$$

mit $w' \in L$.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

- Nach Erreichen des Blinkzustands:
 \mathcal{M} vergleicht w und w' .
 - Falls $w = w'$, dann hält \mathcal{M} : $w \in L$.
 - Ansonsten simuliert \mathcal{M} auf Band 2 weiter die Arbeit von \mathcal{M}_L .
- Wenn \mathcal{M}_L hält, ohne das Wort w auf Band 2 erzeugt zu haben, gerät \mathcal{M} in eine Endlosschleife.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

“ \Leftarrow ”

Sei L akzeptierbar

Es gebe also eine DTM \mathcal{M}_L , die L akzeptiert.

Zu zeigen: L ist rekursiv aufzählbar.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

“ \Leftarrow ”

Sei L akzeptierbar

Es gebe also eine DTM \mathcal{M}_L , die L akzeptiert.

Zu zeigen: L ist rekursiv aufzählbar.

Wir konstruieren eine DTM \mathcal{M} , die L rekursiv aufzählt.

Grundidee:

- die Wörter aus Σ^* der Reihe nach aufzählen
- jedes Wort der Maschine \mathcal{M}_L vorlegen
- wenn \mathcal{M}_L das Wort akzeptiert, in den Blinkzustand q_B gehen

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

Problem: \mathcal{M}_L akzeptiert, sie entscheidet nicht.

Wenn \mathcal{M}_L ein Wort nicht akzeptiert, rechnet sie unendlich.

Lösung: Wir betrachten die Rechnung von \mathcal{M}_L zu allen Wörtern aus Σ^*
gleichzeitig.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

$\Sigma^* = \{w_1, w_2, w_3, \dots\}$ (in lexikalischer Reihenfolge aufgezählt).

Dann rechnet \mathcal{M} so:

- Im ersten Durchlauf berechne den ersten Rechenschritt von \mathcal{M}_L für w_1 .
- Im zweiten Durchlauf berechne
 - die ersten zwei Rechenschritte von \mathcal{M}_L für w_1 ,
 - einen Rechenschritt für w_2 .
- Im dritten Durchlauf berechne drei Rechenschritte für w_1 , zwei für w_2 und einen für w_3 und so weiter.

Immer wieder bei der Startkonfiguration anfangen: So müssen wir uns den Bandinhalt der Rechnung von \mathcal{M}_L zu w_i nach j Schritten nicht merken.

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

Wenn \mathcal{M} so rechnet, dann gilt:

- \mathcal{M} fängt für jedes $w_i \in \Sigma^*$ in endlicher Zeit (nämlich im i -ten Durchlauf) an, die Arbeit von \mathcal{M}_L zu w_i zu simulieren, und
- falls $w_i \in L$ und falls \mathcal{M}_L , gestartet mit $s, \#w_i\#$, in j Schritten einen Haltezustand erreicht, dann erreicht \mathcal{M} nach endlicher Zeit (nämlich im $i + j$ -ten Durchlauf) den Haltezustand von \mathcal{M}_L in der Rechnung zu w_i .

Akzeptierbar = Rekursiv aufzählbar

Beweis (Ende)

- Wenn \mathcal{M} bei Simulation von \mathcal{M}_L zur Eingabe w_i auf eine Haltekonfiguration trifft, dann ist $w_i \in L$.
- \mathcal{M} nimmt dann eine Konfiguration

$$q_B, \#w_i\# \underline{u_i}$$

ein – q_B ist der Blinkzustand.

- In der Nebenrechnung u_i steht, welche Teilrechnung von \mathcal{M}_L als nächste zu simulieren ist.

Also zählt \mathcal{M} die $w \in \Sigma^*$ auf, für die \mathcal{M}_L hält, und das sind gerade die $w \in L$. \square

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Theorem. Jede entscheidbare Sprache ist akzeptierbar.

Beweis

Sei L eine entscheidbare Sprache und \mathcal{M} eine DTM, die L entscheidet.

Dann wird L akzeptiert von der DTM \mathcal{M}' ,
die zunächst \mathcal{M} simuliert und danach in eine Endlosschleife geht, falls \mathcal{M}
mit $h, \#N\#$ endet.

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Theorem [Komplement einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar]

Das Komplement einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar.

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Theorem [Komplement einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar]

Das Komplement einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar.

Beweis

Sei L eine entscheidbare Sprache und \mathcal{M} eine DTM, die L entscheidet.

Dann wird \bar{L} entschieden von einer DTM \mathcal{M}' ,
die genau wie \mathcal{M} rechnet
und nur am Schluß die Antworten Y und N vertauscht. \square

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Theorem [Charakterisierung von Entscheidbarkeit]

Eine Sprache L ist genau dann entscheidbar, wenn sie und ihr Komplement akzeptierbar sind.

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Theorem [Charakterisierung von Entscheidbarkeit]

Eine Sprache L ist genau dann entscheidbar, wenn sie und ihr Komplement akzeptierbar sind.

Beweis

“ \Rightarrow ”

Sei L ist entscheidbar.

Zu zeigen: L und \bar{L} sind akzeptierbar.

- L ist entscheidbar, also ist L akzeptierbar
- L ist entscheidbar, also ist \bar{L} entscheidbar
- \bar{L} ist entscheidbar, also ist \bar{L} akzeptierbar

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Beweis (Fortsetzung)

“ \Leftarrow ”

Seien L und \bar{L} akzeptierbar.

Zu zeigen: L ist entscheidbar.

- Sei \mathcal{M}_1 eine DTM, die L akzeptiert.
- Sei \mathcal{M}_2 eine DTM, die \bar{L} akzeptiert.

Daraus konstruieren wir eine 2-DTM \mathcal{M} , die L entscheidet:

- \mathcal{M} wird gestartet mit

$s_0, \# w \underline{\#}$

$\underline{\#}$

- \mathcal{M} kopiert w auf Band 2.

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Beweis (Ende)

- M simuliert abwechselnd
 - einen Schritt von \mathcal{M}_1 auf Band 1 und
 - einen Schritt von \mathcal{M}_2 auf Band 2.
- Das tut \mathcal{M} , bis entweder \mathcal{M}_1 oder \mathcal{M}_2 hält.
- Eine von beiden muss halten: w gehört entweder zu L oder zu \bar{L} .
- Wenn \mathcal{M}_1 hält, dann hält \mathcal{M} mit
 - $\#Y\#$ auf Band 1 und
 - $\#$ auf Band 2.
- Wenn \mathcal{M}_2 hält, dann hält \mathcal{M} mit
 - $\#N\#$ auf Band 1 und
 - $\#$ auf Band 2. \square

Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- **Entscheidbar/Aufzählbar**
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- Unentscheidbarkeit

Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- Entscheidbar/Aufzählbar
- **Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0**
- Unentscheidbarkeit

Rekursiv Aufzählbar = Typ 0

Zur Erinnerung

Formale Sprachen sind vom **Typ 0**, wenn sie durch beliebige Grammatiken (keinerlei Einschränkungen) erzeugt werden können.

Rekursiv Aufzählbar = Typ 0

Theorem [Rekursiv aufzählbar = Typ 0].

Die rekursiv aufzählbaren Sprachen

(also die durch DTMs akzeptierbaren Sprachen)

sind genau die durch beliebige Grammatiken erzeugten Sprachen

(also die vom Typ 0).

Rekursiv Aufzählbar = Typ 0

Theorem [Rekursiv aufzählbar = Typ 0].

Die rekursiv aufzählbaren Sprachen

(also die durch DTMn akzeptierbaren Sprachen)

sind genau die durch beliebige Grammatiken erzeugten Sprachen

(also die vom Typ 0).

Beweisidee

- Zu jeder Turing-Maschine kann eine Grammatik konstruiert werden, deren Ableitungsschritte die Rechenschritte der TM simulieren (spezielle Variable markiert Position des Schreib-/Lesekopfes).
- Zu jeder Grammatik kann eine indeterminierte Turing-Maschine (und damit auch eine DTM) konstruiert werden, deren Rechenschritte den Ableitungsschritten der Grammatik entsprechen.

Beweisdetails: Buch von Erk und Priese, Seiten 198-201.

Übersicht

- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- Varianten von Turing-Maschinen
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- Universelle determinierte Turing-Maschinen
- Entscheidbar/Aufzählbar
- Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- Unentscheidbarkeit