Theorem. Die Menge $\mathbb{R}$ der rellen Zahlen ist überabzählbar.

Beweis. Wir zeigen, dass schon das Intervall $[0,1]$ überabzählbar ist.
Annahme: Es gibt eine Aufzählung, also eine surjektive Funktion

$$f : \mathbb{N} \to [0,1]$$

$$\begin{array}{lllllllll}
f(0) = & 0, & d_0^0 & d_1^0 & d_2^0 & \dots & d_n^0 & \dots \\
f(1) = & 0, & d_0^1 & d_1^1 & d_2^1 & \dots & d_n^1 & \dots \\
f(2) = & 0, & d_0^2 & d_1^2 & d_2^2 & \dots & d_n^2 & \dots \\
\dots \\
f(n) = & 0, & d_0^n & d_1^n & d_2^n & \dots & d_n^n & \dots \\
\dots
\end{array}$$

Wir definieren eine neue Zahl $d = 0, \overline{d}_0 \overline{d}_1 \overline{d}_2 \dots$ durch

$$\overline{d}_n = \begin{cases} d_n^n + 1 & \text{falls } d_n^n < 9 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$d \neq f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lemma. Es gibt überabzählbar viele Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Beweis: Angenommen, es existiere eine Abzählung

$$f_0, f_1, f_2, \dots f_n, \dots$$

$$\begin{array}{llllllll}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\
f_0 : & f_0(0) & f_0(1) & f_0(2) & f_0(3) & \dots & f_0(n) & \dots \\
f_1 : & f_1(0) & f_1(1) & f_1(2) & f_1(3) & \dots & f_1(n) & \dots \\
f_2 : & f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) & \dots & f_2(n) & \dots \\
f_3 : & f_3(0) & f_3(1) & f_3(2) & f_3(3) & \dots & f_3(n) & \dots \\
\dots \\
f_n : & f_n(0) & f_n(1) & f_n(2) & f_n(3) & \dots & f_n(n) & \dots \\
\dots
\end{array}$$

Dann sei

$$C : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad C(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f_n(n) = 0; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$C(n) \neq f_n(n)$ f́ur alle $n \in \mathbb{N}$, also $C \neq f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$y