Aussagenlogik, Teil 1+2

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Syntax

Aussagenvariablen: Abzählbare Menge von Symbolen, etwa

$$\Pi = \{P_0, \ldots, P_n\} \text{ oder } \Pi = \{P_0, P_1, \ldots\}$$

Definition: Menge For_Π der Formeln über Π:

Die kleinste Menge mit:

- $\top \in \mathrm{For}_\Pi$ und $\bot \in \mathrm{For}_\Pi$
- $\Pi \subseteq \mathrm{For}_\Pi$
- Wenn $F, G \in \mathrm{For}_\Pi$, dann auch

  $$\neg F, (F \wedge G), (F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$$

  Elemente von For_Π.

For_Π Menge der Formeln über Π.

Strukturelle Induktion

Beweise durch strukturelle Induktion:

Zu zeigen: Alle Formeln haben Eigenschaft p

"Für alle $F \in \mathrm{For}_\Pi$, $p(F)$ gilt"

Induktionsbasis: Wir beweisen, dass $p(A)$ für alle atomaren Formeln gilt.

Beweise $p(\bot)$, $p(\top)$ und $p(Q)$ für die Aussagenvariable Q.

Induktionsvoraussetzung: Sei F eine Formel (die nicht atomar ist)
Annahme: alle Teilformeln von F, die nicht gleich F sind, haben Eigenschaft p.

Induktionsschritt: Zeige, dass auch F Eigenschaft p hat.
Beweis durch Fallunterscheidung:

Fall 1: $F = \neg G$. Induktionvoraussetzung: $p(G)$ gilt. Folgere, dass $p(F)$ gilt.

Fall 2: $F = G \wedge H$. Induktionvoraussetzung: $p(G)$, $p(H)$ gelten. Folgere, dass $p(F)$ gilt.

Fall 3: $F = G \vee H$. Induktionvoraussetzung: $p(G)$, $p(H)$ gelten. Folgere, dass $p(F)$ gilt.

Fall 4: $F = G \longrightarrow H$. Induktionvoraussetzung: $p(G)$, $p(H)$ gelten. Folgere, dass $p(F)$ gilt.

Fall 5: $F = G \leftrightarrow H$. Induktionvoraussetzung: $p(G)$, $p(H)$ gelten. Folgere, dass $p(F)$ gilt.

Semantik der Aussagenlogik

Π eine aussagenlogische Signatur.

Aussagenvariablen für sich haben keine Bedeutung. Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) explizit oder implizit aus dem Kontext zur Verfügung stehen.

1 Symbol für den Wahrheitswert "wahr"
0 Symbol für den Wahrheitswert "falsch"

Valuation (Wertebelegung, Interpretation): Abbildung $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$.

Auswertung von Formeln in einem Modell

Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ eine Wertebelegung. $\mathcal{A}^* : For_\Pi \to \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(\bot) = 0 \qquad \mathcal{A}^*(\neg F) = \neg_b(\mathcal{A}(F))$$

$$\mathcal{A}^*(\top) = 1 \qquad \mathcal{A}^*(F_1 \circ F_2) = \mathcal{A}^*(F_1) \circ_b \mathcal{A}^*(F_2)$$

$$\mathcal{A}^*(P) = \mathcal{A}(P) \qquad \circ \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$$

Gültigkeit; Erfüllbarkeit; Folgerung, Äquivalenz

- F gilt in $\mathcal{A}$ (oder $\mathcal{A}$ ist Modell von F) gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$. (i.Z: $\mathcal{A} \models F$)
- F ist allgemeingültig (Tautologie) gdw.: $\mathcal{A} \models F$, für alle $\mathcal{A}: \Pi \to \{0,1\}$ (i.Z: $\models F$)
- F heisst erfüllbar gdw. es $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gibt, so dass $\mathcal{A} \models F$.
  Sonst heißt F unerfüllbar (oder eine Kontradiktion).

  Tautologien: Formel, die stets wahr sind. Beispiele: $p \vee (\neg p)$; $p \leftrightarrow \neg\neg p$

  Kontradiktionen: Formel, die stets falsch sind. Beispiel: $p \wedge \neg p$

  - Die Negation einer Tautologie ist eine Kontradiktion
  - Die Negation einer Kontradiktion ist eine Tautologie
- F impliziert G (oder G folgt aus F, i.Z.: $F \models G$), gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gilt: Wenn $\mathcal{A} \models F$, dann $\mathcal{A} \models G$.
- F und G sind äquivalent (i.Z.: $F \equiv G$) gdw.: für alle $\mathcal{A}: \Pi \to \{0,1\}$ gilt: $\mathcal{A} \models F$ gdw. $A \models G$.
- Erweiterung auf Formelmengen N in natürlicher Weise, z.B.:
  $N \models G$ gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gilt: falls $\mathcal{A} \models F$, für alle $F \in N$, so $\mathcal{A} \models G$.

Unerfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Theorem. $N \models F$ gdw. $N \cup \{\neg F\}$ ist unerfüllbar.

Substitutionstheorem

Theorem.
Seien F und G äquivalente Formeln. Sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Teilformel F.

Dann ist H äquivalent zu H', wobei H' aus H hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H durch G ersetzt wird.

Beweis: Strukturelle Induktion.

Beispiel:
$A \vee B \equiv B \vee A$
impliziert
$(C \wedge (A \vee B)) \equiv (C \wedge (B \vee A))$

Normalformen

Unser Ziel: Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit (für Formeln und/oder Formelmengen) Dazu brauchen wir "Normalformen"

Normalformen

- Atom: aussagenlogische Variable
- Literal: Atom, oder negation eines Atoms
- Klausel: Eine Disjunktion von Literalen
  - mehrstellige Disjunktionen $(P \vee \neg Q \vee R)$, $(P \vee P \vee \neg Q)$
  - einstellige Disjunktionen P
  - die nullstellige Disjunktion (leere Klausel) $\perp$
- Konjunktive Normalform (KNF): Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, d.h., eine Konjunktion von Klauseln (mehrstellig, einstellig oder nullstellig ($\top$))
- Disjunktive Normalform (DNF): Eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen (mehrstellig, einstellig oder nullstellig)

Umformung in KNF

6 Schritte:

1. Elimination von $\leftrightarrow$

   Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von $\rightarrow$

   Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. "Nach innen schieben" von $\neg$ (de Morgans Regeln)

4. "Nach innen schieben" von $\neg$ ($\neg\neg A \equiv A$)

   Nach Schritt 4: NNF

5. "Nach innen schieben" von $\vee$

   Verwende Distributivität von $\vee$ über $\wedge$

6. Simplifikation (falls eine der Formels $\top$ oder $\bot$ ist.

Umformung in DNF ähnlichl (im Schritt 5: Distributivität von $\wedge$ über $\vee$)