# Logik für Informatiker

## 2. Aussagenlogik

## Teil 1

23.04.2012

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

# Bis jetzt

- Grundlegende Beweisstrategien
- Induktion über die natürlichen Zahlen / Fehlerquellen
- Strukturelle Induktion

# Bis jetzt

- Grundlegende Beweisstrategien
- Induktion über die natürlichen Zahlen / Fehlerquellen
- Strukturelle Induktion

**Heute:** Aussagenlogik

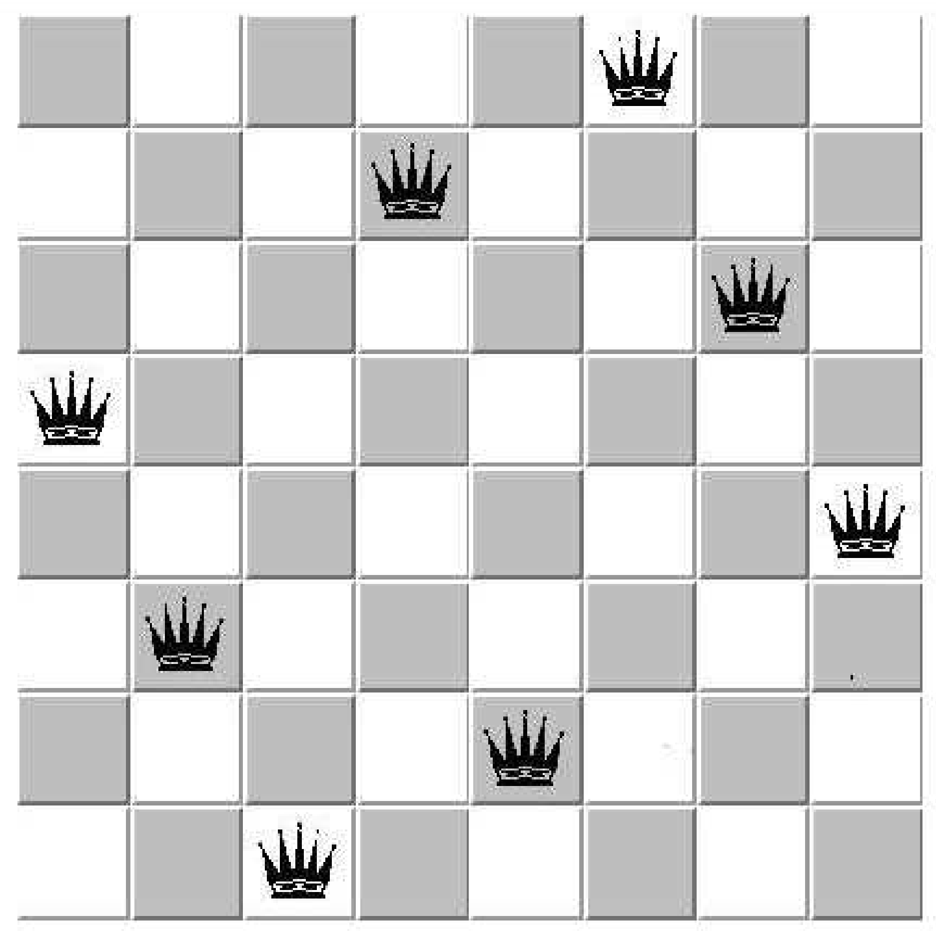
- Beispiel
- Formale Aussagenlogik
  - Syntax (Sprache)
  - Semantik (Modelle)

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

Man platziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

Man platziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.



# Beispiel: Das 8-Damen Problem

## Beschreibung des Problems

Für jedes Feld des Schachbretts eine aussagenlogische Variable

$$D_{ij}$$

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

## Beschreibung des Problems

Für jedes Feld des Schachbretts eine aussagenlogische Variable

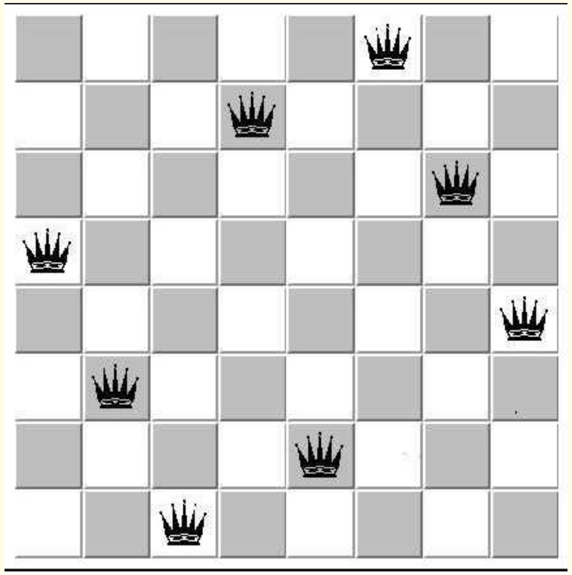
$$D_{ij}$$

Mit der Vorstellung, dass $D_{ij}$ den Wert wahr hat, wenn auf dem Feld $(i, j)$ eine Dame steht.

Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame $\mapsto D_{57}$ wahr.



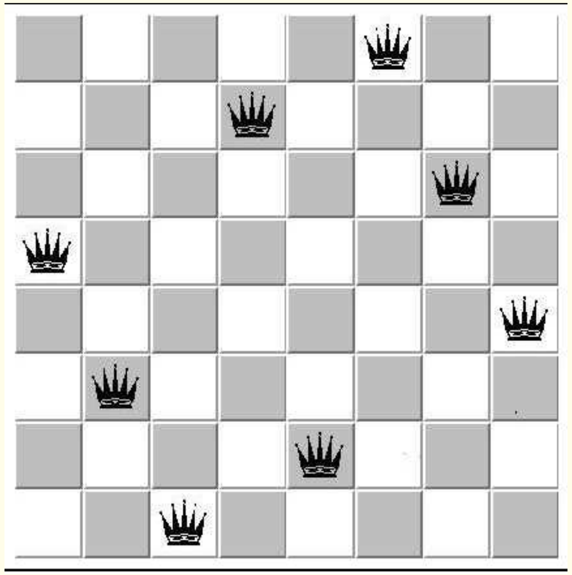
**Einschränkungen pro Feld: $F_{ij}$**

Falls auf dem Feld (5, 7) eine Dame steht:

- keine andere Dame auf Feld (5,1), (5,2), (5,3), (5,4),(5,5), (5,6), (5,8)
- keine andere Dame auf Feld (1,7), (2,7), (3,7), (4,7),(6,7), (7,7), (8,7)
- keine andere Dame auf Feld (6,8), (4,6), (3,5), (2,4),(1,3)
- keine andere Dame auf Feld (4,8), (6,6), (7,5), (8,4)

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame $\mapsto D_{57}$ wahr.



**Einschränkungen pro Feld: $F_{ij}$**

Falls auf dem Feld (5, 7) eine Dame steht:

- keine andere Dame auf Feld (5,8), (5,6), (5,5), (5,4),(5,3), (5,2), (5,1)

$D_{57} \rightarrow \neg D_{58} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,1}$

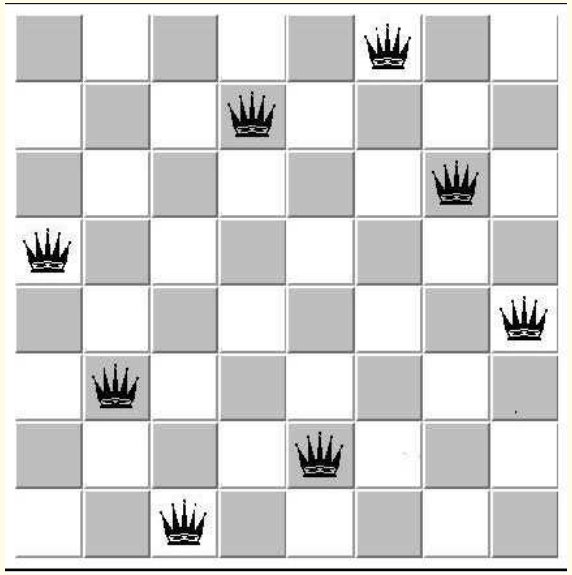
- keine andere Dame auf Feld (1,7), (2,7), (3,7), (4,7),(6,7), (7,7), (8,7)

- keine andere Dame auf Feld (6,8), (4,6), (3,5), (2,4),(1,3)

- keine andere Dame auf Feld (4,8), (6,6), (7,5), (8,4)

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame $\mapsto$ $D_{57}$ wahr.



**Einschränkungen pro Feld: $F_{ij}$**

Falls auf dem Feld (5, 7) eine Dame steht:

- keine andere Dame auf Feld
  (5,8), (5,6), (5,5), (5,4),(5,3), (5,2), (5,1)

$D_{57} \rightarrow \neg D_{58} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,1}$

- keine andere Dame auf Feld
  (1,7), (2,7), (3,7), (4,7),(6,7), (7,7), (8,7)

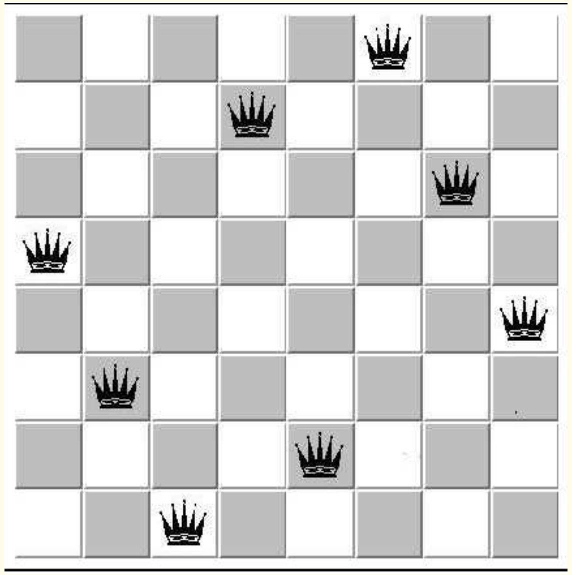
$D_{57} \rightarrow \neg D_{17} \wedge \neg D_{2,7} \wedge \neg D_{3,7} \wedge \neg D_{4,7} \wedge \neg D_{6,7} \wedge \neg D_{7,7} \wedge \neg D_{87}$

- keine andere Dame auf Feld (6,8), (4,6), (3,5), (2,4),(1,3)

- keine andere Dame auf Feld (4,8), (6,6), (7,5), (8,4)

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame $\mapsto D_{57}$ wahr.



**Einschränkungen pro Feld: $F_{ij}$**

Falls auf dem Feld (5, 7) eine Dame steht:

- keine andere Dame auf Feld
  (5,8), (5,6), (5,5), (5,4),(5,3), (5,2), (5,1)

$D_{57} \to \neg D_{58} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,1}$

- keine andere Dame auf Feld
  (1,7), (2,7), (3,7), (4,7),(6,7), (7,7), (8,7)

$D_{57} \to \neg D_{17} \wedge \neg D_{2,7} \wedge \neg D_{3,7} \wedge \neg D_{4,7} \wedge \neg D_{6,7} \wedge \neg D_{7,7} \wedge \neg D_{87}$

- keine andere Dame auf Feld (6,8), (4,6), (3,5), (2,4),(1,3)

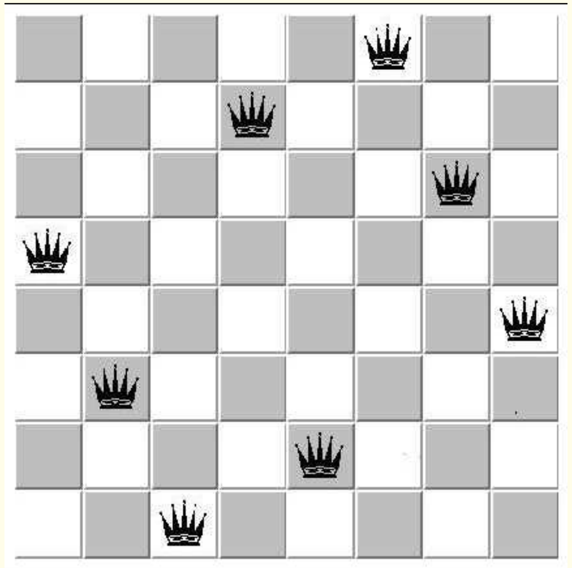
$D_{57} \to \neg D_{68} \wedge \neg D_{4,6} \wedge \neg D_{3,5} \wedge \neg D_{2,4} \wedge \neg D_{1,3}$

- keine andere Dame auf Feld (4,8), (6,6), (7,5), (8,4)

$D_{57} \to \neg D_{48} \wedge \neg D_{6,6} \wedge \neg D_{7,5} \wedge \neg D_{8,4}$

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame $\mapsto D_{57}$ wahr.

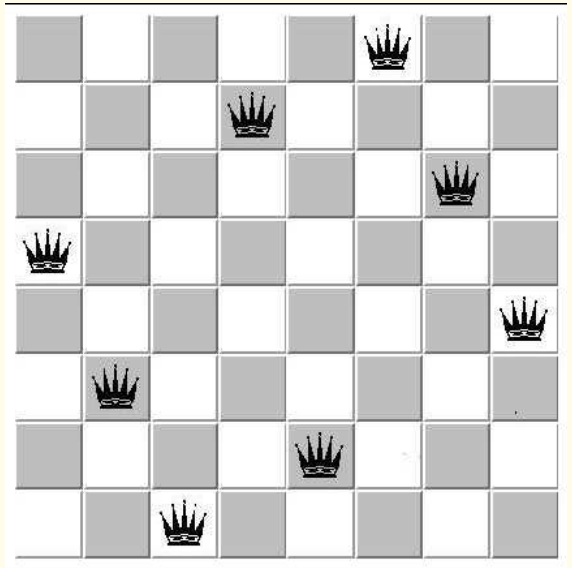


**Einschränkungen pro Feld: $F_{ij}$**

$$\underbrace{\begin{array}{l} D_{57} \rightarrow \neg D_{58} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,1} \\ D_{57} \rightarrow \neg D_{17} \wedge \neg D_{2,7} \wedge \neg D_{3,7} \wedge \neg D_{4,7} \wedge \neg D_{6,7} \wedge \neg D_{7,7} \wedge \neg D_{87} \\ D_{57} \rightarrow \neg D_{68} \wedge \neg D_{4,6} \wedge \neg D_{3,5} \wedge \neg D_{2,4} \wedge \neg D_{1,3} \\ D_{57} \rightarrow \neg D_{48} \wedge \neg D_{6,6} \wedge \neg D_{7,5} \wedge \neg D_{8,4} \end{array}}_{F_{57}}$$

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

Beispiel: Auf dem Feld (5, 7) steht eine Dame $\mapsto D_{57}$ wahr.



**Einschränkungen pro Feld: $F_{ij}$**

$$\left.\begin{array}{l}
D_{57} \rightarrow \neg D_{58} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,1} \\
D_{57} \rightarrow \neg D_{17} \wedge \neg D_{2,7} \wedge \neg D_{3,7} \wedge \neg D_{4,7} \wedge \neg D_{6,7} \wedge \neg D_{7,7} \wedge \neg D_{87} \\
D_{57} \rightarrow \neg D_{68} \wedge \neg D_{4,6} \wedge \neg D_{3,5} \wedge \neg D_{2,4} \wedge \neg D_{1,3} \\
D_{57} \rightarrow \neg D_{48} \wedge \neg D_{6,6} \wedge \neg D_{7,5} \wedge \neg D_{8,4}
\end{array}\right\} F_{57}$$

**Globale Einschränkungen**

Für jedes $k$ mit $1 \leq k \leq 8$:

$R_k := D_{1,k} \vee D_{2,k} \vee D_{3,k} \vee D_{4,k} \vee D_{5,k} \vee D_{6,k} \vee D_{7,k} \vee D_{8,k}$

# Beispiel: Das 8-Damen Problem

**Struktur:** Wahrheitswerte für die atomaren Aussagen $D_{ij}$

**Modell für $F_{ij}$ ($R_k$):** Wahrheitswerte für die atomaren Aussagen $D_{ij}$ so dass $F_{ij}$ wahr (bzw. $R_k$ wahr).

**Lösung des 8-Damen Problems:**
Eine aussagenlogische Struktur beschreibt eine Lösung des 8-Damen-Problems genau dann, wenn sie ein Modell der Formeln

- $F_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq 8$
- $R_k$ für alle $1 \leq k \leq 8$

ist.

# Formale Logik

- Syntax

  welche Formeln?

- Semantik

  Modelle (Strukturen)

  Wann ist eine Formel wahr (in einer Struktur)?

- Deduktionsmechanismus

  Ableitung neuer wahrer Formeln

# Aussagenlogik

Die Welt besteht aus Fakten die wahr oder falsch sein können.

# Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

$\top$ Symbol für die Formel “wahr” (Formel, die immer wahr ist)

$\bot$ Symbol für die Formel “falsch” (Formel, die immer falsch ist)

# Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

$\top$ Symbol für die Formel "wahr"

$\bot$ Symbol für die Formel "falsch"

$\neg$ Negationssymbol ("nicht")

# Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

$\top$ Symbol für die Formel "wahr"

$\bot$ Symbol für die Formel "falsch"

$\neg$ Negationssymbol ("nicht")

$\wedge$ Konjunktionssymbol ("und")

$\vee$ Disjunktionssymbol ("oder")

$\rightarrow$ Implikationssymbol ("wenn ... dann")

$\leftrightarrow$ Symbol für Äquivalenz ("genau dann, wenn")

# Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

$\top$ Symbol für die Formel "wahr"

$\bot$ Symbol für die Formel "falsch"

$\neg$ Negationssymbol ("nicht")

$\wedge$ Konjunktionssymbol ("und")

$\vee$ Disjunktionssymbol ("oder")

$\rightarrow$ Implikationssymbol ("wenn ... dann")

$\leftrightarrow$ Symbol für Äquivalenz ("genau dann, wenn")

( ) die beiden Klammern

# Vokabular der Aussagenlogik

Abzählbare Menge von Symbolen, etwa

$$\Pi = \{P_0, \ldots, P_n\}$$

oder

$$\Pi = \{P_0, P_1, \ldots\}$$

# Vokabular der Aussagenlogik

Abzählbare Menge von Symbolen, etwa

$$\Pi = \{P_0, \ldots, P_n\}$$

oder

$$\Pi = \{P_0, P_1, \ldots\}$$

**Bezeichnungen für Symbole in $\Pi$**

- atomare Aussagen
- Atome
- Aussagenvariablen

# Formeln der Aussagenlogik

**Definition:** Menge $\mathsf{For}_\Pi$ der Formeln über $\Pi$:

Die kleinste Menge mit:

- $\top \in \mathsf{For}_\Pi$ und $\bot \in \mathsf{For}_\Pi$

# Formeln der Aussagenlogik

**Definition:** Menge $\mathrm{For}_\Pi$ der Formeln über $\Pi$:

Die kleinste Menge mit:

- $\top \in \mathrm{For}_\Pi$ und $\bot \in \mathrm{For}_\Pi$
- $\Pi \subseteq \mathrm{For}_\Pi$

# Formeln der Aussagenlogik

**Definition:** Menge $\mathrm{For}_\Pi$ der Formeln über $\Pi$:

Die kleinste Menge mit:

- $\top \in \mathrm{For}_\Pi$ und $\bot \in \mathrm{For}_\Pi$
- $\Pi \subseteq \mathrm{For}_\Pi$
- Wenn $F, G \in \mathrm{For}_\Pi$, dann auch

  $$\neg F, (F \land G), (F \lor G), (F \to G), (F \leftrightarrow G)$$

  Elemente von $\mathrm{For}_\Pi$.

# Aussagenformeln

$\text{For}_\Pi$ Menge der Formeln über $\Pi$:

$$
\begin{array}{lcll}
F, G, H & ::= & \bot & \text{(Falsum)} \\
& \mid & \top & \text{(Verum)} \\
& \mid & P, \quad P \in \Pi & \text{(atomare Formel)} \\
& \mid & \neg F & \text{(Negation)} \\
& \mid & (F \wedge G) & \text{(Konjunktion)} \\
& \mid & (F \vee G) & \text{(Disjunktion)} \\
& \mid & (F \rightarrow G) & \text{(Implikation)} \\
& \mid & (F \leftrightarrow G) & \text{(Äquivalenz)}
\end{array}
$$

# Konventionen zur Notation

- Klammereinsparungen werden nach folgenden Regeln vorgenommen:
  - $\neg \quad >_p \quad \wedge \quad >_p \quad \vee \quad >_p \quad \rightarrow \quad >_p \quad \leftrightarrow$ (Präzedenzen),
  - $\vee$ und $\wedge$ sind assoziativ und kommutativ,

# Konventionen zur Notation

- Klammereinsparungen werden nach folgenden Regeln vorgenommen:
  - $\neg \quad >_p \quad \wedge \quad >_p \quad \vee \quad >_p \quad \rightarrow \quad >_p \quad \leftrightarrow$ (Präzedenzen),
  - $\vee$ und $\wedge$ sind assoziativ und kommutativ,

**Beispiele:** $\Pi = \{P, Q, R\}$

$\bot,\ P,\ \neg Q,\ P \wedge \neg Q,\ (P \vee (\neg R \wedge \top))$ sind Formeln

Wir schreiben $P \wedge Q \wedge R$ statt $(P \wedge Q) \wedge R$.

# Beispiel: 8-Damenproblem

Aussagenlogische Variablen

$D_{i,j}$ bedeutet: Auf dem Feld $(i, j)$ steht eine Dame.

# Beispiel: 8-Damenproblem

## Aussagenlogische Variablen

$D_{i,j}$ bedeutet: Auf dem Feld $(i, j)$ steht eine Dame.

## Formeln

"Wenn auf dem Feld $(5, 7)$ eine Dame steht, kann keine Dame auf Feld (5,8), (5,6), (5,5), (5,4),(5,3), (5,2), (5,1) stehen":

$$D_{57} \to \neg D_{58} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,1}$$

# Syntax: Beispiel

“Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?”,
wurde ein 100 Jähriger gefragt.

“Ich halte mich streng an die Diätregeln:

- Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke,
  dann habe ich immer Fisch.
- Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe,
  verzichte ich auf Eiscreme.
- Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide,
  dann rühre ich Fisch nicht an.”

# Beispiel 1

Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch.

- $\neg B \rightarrow F$

# Beispiel 1

Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch.

- $\neg B \rightarrow F$

Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme.

- $F \wedge B \rightarrow \neg E$

# Beispiel 1

Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch.

- $\neg B \rightarrow F$

Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme.

- $F \wedge B \rightarrow \neg E$

Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, dann rühre ich Fisch nicht an.

- $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

# Beispiel 1

- $\neg B \rightarrow F$
- $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

# Beispiel 1

- $\neg B \rightarrow F$
- $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Wir möchten wissen, welche Menüs solche Diätregeln erfüllen.

z.B.:

- kein Bier, Fisch und Eiscreme
  erfüllt 3. Diätregel nicht!
- Bier, Fisch, keine Eiscreme
  erfüllt alle Diätregeln

# Beispiel 1

- $\neg B \rightarrow F$
- $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Wir möchten wissen, welche Menüs solche Diätregeln erfüllen.

z.B.: **Formalisierung:**

- kein Bier, Fisch und Eiscreme — $B \mapsto$ falsch, $F \mapsto$ wahr, $E \mapsto$ wahr
  erfüllt 3. Diätregel nicht!
- Bier, Fisch, keine Eiscreme — $B \mapsto$ wahr, $F \mapsto$ wahr, $E \mapsto$ falsch
  erfüllt alle Diätregeln

# Beispiel 1

- $\neg B \to F$
- $F \wedge B \to \neg E$
- $E \vee \neg B \to \neg F$

Wir möchten wissen, welche Menüs solche Diätregeln erfüllen.

z.B.: **Formalisierung:**

0:falsch, 1:wahr $\qquad \mathcal{A} : \{B, F, E\} \to \{0, 1\}$

• kein Bier, Fisch und Eiscreme $\qquad \mathcal{A}(B) = 0, \mathcal{A}(F) = 1, \mathcal{A}(E) = 1$

erfüllt 3. Diätregel nicht!

• Bier, Fisch, keine Eiscreme $\qquad \mathcal{A}(B) = 1, \mathcal{A}(F) = 1, \mathcal{A}(E) = 0$

erfüllt alle Diätregeln

# Letztes Mal

## Aussagenlogik

- Syntax: welche Formeln?
- Semantik: Modelle (Strukturen)

  Wann ist eine Formel wahr (in einer Struktur)?
- Deduktionsmechanismus: Ableitung neuer wahrer Formeln

# Semantik der Aussagenlogik

Aussagenvariablen für sich haben keine Bedeutung.

Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) zur Verfügung stehen.

1 Symbol für den Wahrheitswert “wahr”

0 Symbol für den Wahrheitswert “falsch”

Eine Valuation (Wertebelegung, Interpretation, Struktur, Modell) ist eine Abbildung

$$\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$$

# Semantik der Aussagenlogik

$\Pi$ eine aussagenlogische Signatur

Aussagenvariablen für sich haben keine Bedeutung.

Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) explizit oder implizit aus dem Kontext zur Verfügung stehen.

Eine Valuation (Wertebelegung) ist eine Abbildung

$$\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$$

Wir werden Wertebelegungen auch Aussagenlogische Strukturen, Aussagenlogische Modelle oder Interpretationen nennen.

# Semantik der Aussagenlogik

$\Pi$ eine aussagenlogische Signatur

Aussagenvariablen für sich haben keine Bedeutung.

Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) explizit oder implizit aus dem Kontext zur Verfügung stehen.

Eine Wertebelegung ist eine Abbildung

$$\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$$

**Beispiel:**

| A | B | C |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |

(Bei drei Symbolen gibt es 8 mögliche Modelle)

# Semantik der Aussagenlogik

## Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_\Pi \rightarrow \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

# Semantik der Aussagenlogik

## Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : \mathit{For}_\Pi \rightarrow \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(\bot) = 0$$

$$\mathcal{A}^*(\top) = 1$$

# Semantik der Aussagenlogik

## Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : \mathit{For}_\Pi \to \{0,1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(\bot) = 0$$

$$\mathcal{A}^*(\top) = 1$$

$$\mathcal{A}^*(P) = \mathcal{A}(P)$$

# Semantik der Aussagenlogik

## Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : \mathit{For}_\Pi \rightarrow \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(\neg F) = \begin{cases} 0 & \mathit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F) = 1 \\ 1 & \mathit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F) = 0 \end{cases}$$

# Semantik der Aussagenlogik

## Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_\Pi \to \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(F_1 \wedge F_2) = \begin{cases} 0 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = 0 \text{ oder } \mathcal{A}^*(F_2) = 0 \\ 1 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = \mathcal{A}^*(F_2) = 1 \end{cases}$$

# Semantik der Aussagenlogik

## Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_\Pi \to \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(F_1 \land F_2) = \begin{cases} 0 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = 0 \text{ oder } \mathcal{A}^*(F_2) = 0 \\ 1 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = \mathcal{A}^*(F_2) = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{A}^*(F_1 \lor F_2) = \begin{cases} 0 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = \mathcal{A}^*(F_2) = 0 \\ 1 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = 1 \text{ oder } \mathcal{A}^*(F_2) = 1 \end{cases}$$

# Semantik der Aussagenlogik

## Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_\Pi \rightarrow \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(F_1 \rightarrow F_2) = \begin{cases} 1 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = 0 \text{ oder } \mathcal{A}^*(F_2) = 1 \\ 0 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = 1 \text{ und } \mathcal{A}^*(F_2) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{A}^*(F_1 \leftrightarrow F_2) = \begin{cases} 1 & \textit{falls} \quad \mathcal{A}^*(F_1) = \mathcal{A}^*(F_2) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

# Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

# Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| $\wedge$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

| $\vee$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

# Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| $\wedge$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

| $\vee$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| $\rightarrow$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

| $\leftrightarrow$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

# Semantik der Aussagenlogik

## Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ eine $\Pi$-Valuation.

$\mathcal{A}^* : For_\Pi \to \{0,1\}$ wird induktiv über Aufbau von $F$ wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^*(\bot) &= 0 \\
\mathcal{A}^*(\top) &= 1 \\
\mathcal{A}^*(P) &= \mathcal{A}(P) \\
\mathcal{A}^*(\neg F) &= 1 - \mathcal{A}^*(F) \\
\mathcal{A}^*(F \rho G) &= \mathrm{B}_\rho(\mathcal{A}^*(F), \mathcal{A}^*(G))
\end{aligned}
$$

$\mathrm{B}_\rho(x, y)$ berechnet entschpr. der Wahrheitstafel für $\rho$

$z.B. : \mathrm{B}_\vee(0,1) = (0 \vee 1) = 1; \mathrm{B}_\to(1,0) = (1 \to 0) = 0$

Wir schreiben normalerweise $\mathcal{A}$ statt $\mathcal{A}^*$.

# Beispiel

Sei $\mathcal{A} : \{P, Q, R\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 1, \mathcal{A}(Q) = 0, \mathcal{A}(R) = 1$.

$\mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \to R)$

# Beispiel

Sei $\mathcal{A} : \{P, Q, R\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 1, \mathcal{A}(Q) = 0, \mathcal{A}(R) = 1$.

$$\mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \to R) \quad = \quad \mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \to \mathcal{A}^*(R)$$

# Beispiel

Sei $\mathcal{A} : \{P, Q, R\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 1, \mathcal{A}(Q) = 0, \mathcal{A}(R) = 1$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \to R) &= \mathcal{A}^*(P \wedge (Q \vee \neg P) \to \mathcal{A}^*(R) \\ &= (\mathcal{A}^*(P) \wedge \mathcal{A}^*(Q \vee \neg P)) \to \mathcal{A}^*(R) \end{aligned}$$

# Beispiel

Sei $\mathcal{A} : \{P, Q, R\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 1, \mathcal{A}(Q) = 0, \mathcal{A}(R) = 1$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \to R) \quad &= \quad \mathcal{A}^*(P \wedge (Q \vee \neg P) \to \mathcal{A}^*(R) \\
&= \quad (\mathcal{A}^*(P) \wedge \mathcal{A}^*(Q \vee \neg P)) \to \mathcal{A}^*(R) \\
&= \quad (\mathcal{A}(P) \wedge (\mathcal{A}(Q) \vee \neg \mathcal{A}(P))) \to \mathcal{A}(R) \\
&= \quad (1 \wedge (0 \vee \neg 1)) \to 1 \\
&= \quad 1
\end{aligned}
$$

# Wahrheitstabellen: Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \vee C)$ | $\neg C$ | $(B \vee \neg C)$ | $(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | | | | |
| 0 | 0 | 1 | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | |
| 0 | 1 | 1 | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 1 | 1 | 0 | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | |

# Wahrheitstabellen: Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \vee C)$ | $\neg C$ | $(B \vee \neg C)$ | $(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | |

# Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \vee C)$ | $\neg C$ | $(B \vee \neg C)$ | $(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

# Modell einer Formel(menge)

**Definition:** Interpretation $\mathcal{A}$ ist Modell einer Formel $F \in \mathsf{For}_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1.$$

# Modell einer Formel(menge)

**Definition:** Interpretation $\mathcal{A}$ ist Modell einer Formel $F \in \mathrm{For}_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1.$$

**Definition:** Interpretation $\mathcal{A}$ ist Modell einer Formelmenge $M \subseteq \mathrm{For}_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1 \text{ für alle } F \in M$$

# Modell einer Formel(menge)

**Definition:** Interpretation $\mathcal{A}$ ist Modell einer Formel $F \in For_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1.$$

**Definition:** Interpretation $\mathcal{A}$ ist Modell einer Formelmenge $M \subseteq For_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1 \text{ für alle } F \in M$$

**Notation:**

$\mathcal{A} \models F$

$\mathcal{A} \models M$

# Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \vee C)$ | $\neg C$ | $(B \vee \neg C)$ | $(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Sei $\mathcal{A} : \{P, Q, R\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 0, \mathcal{A}(Q) = 1, \mathcal{A}(R) = 1$.

$\mathcal{A} \models (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

$\mathcal{A} \models \{(A \vee C), (B \vee \neg C)\}$

# Gültigkeit und Erfüllbarkeit

**Definition:** $F$ gilt in $\mathcal{A}$ (oder $\mathcal{A}$ ist Modell von $F$) gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$.

Notation: $\mathcal{A} \models F$

**Definition:** $F$ ist (allgemein-) gültig (oder eine Tautologie) gdw.: $\mathcal{A} \models F$, für alle $A : \Pi \to \{0, 1\}$

Notation: $\models F$

**Definition:** $F$ heißt erfüllbar gdw. es $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ gibt, so dass $\mathcal{A} \models F$.

Sonst heißt $F$ unerfüllbar (oder eine Kontradiktion).

# Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \vee C)$ | $\neg C$ | $(B \vee \neg C)$ | $(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

$F$ ist nicht allgemeingültig:

$\mathcal{A}_1(F) = 0$ für $\mathcal{A}_1 : \{P, Q, R\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(R) = 0$.

$F$ ist erfüllbar (also ist $F$ nicht unerfüllbar):

$\mathcal{A}_2(F) = 1$ für $\mathcal{A} : \{P, Q, R\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 0, \mathcal{A}(Q) = 1, \mathcal{A}(R) = 1$.

# Tautologien und Kontradiktionen

**Tautologien:** Formel, die stets wahr sind.

Beispiele: $p \vee (\neg p)$ (Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten)
(Tertium non datur)

$p \leftrightarrow \neg\neg p$ (Prinzip der doppelten Negation)

**Kontradiktionen:** Formel, die stets falsch sind.

Beispiel: $p \wedge \neg p$

- Die Negation einer Tautologie ist eine Kontradiktion
- Die Negation einer Kontradiktion ist eine Tautologie

# Beispiele

**Die folgenden Formeln sind Tautologien:**

(1) $(p \to \neg p) \to (\neg p)$

(2) $(p \wedge (p \to q)) \to q$

(3) $(p \wedge q) \to p$

$(p \wedge q) \to q$

(4) $p \to (p \vee q)$

$q \to (p \vee q)$

(5) $(p \to q) \to [(q \to r) \to (p \to r)]$

(6) $(((p \to q) \wedge (q \to r)) \wedge p) \to r$

# Folgerung und Äquivalenz

**Definition:** $F$ impliziert $G$ (oder $G$ folgt aus $F$),

gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gilt: Wenn $\mathcal{A} \models F$, dann $\mathcal{A} \models G$.

Notation: $F \models G$

**Definition:** $F$ und $G$ sind äquivalent

gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gilt: $\mathcal{A} \models F$ gdw. $A \models G$.

Notation: $F \equiv G$.

Erweiterung auf Formelmengen $N$ in natürlicher Weise, z.B.:

$N \models G$ gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gilt:

falls $\mathcal{A} \models F$, für alle $F \in N$,

so $\mathcal{A} \models G$.

# Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

**Überprüfe, ob $F \models G$**

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \vee C)$ | $(B \vee \neg C)$ | $(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$ | $(A \vee B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | | | | |
| 0 | 0 | 1 | | | | |
| 0 | 1 | 0 | | | | |
| 0 | 1 | 1 | | | | |
| 1 | 0 | 0 | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 1 | 1 | 0 | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | |

# Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

**Überprüfe, ob $F \models G$**

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \vee C)$ | $(B \vee \neg C)$ | $(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$ | $(A \vee B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

# Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

**Überprüfe, ob $F \models G$**

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \vee C)$ | $(B \vee \neg C)$ | $(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$ | $(A \vee B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Beispiel

$F = (A \lor C) \land (B \lor \neg C) \qquad G = (A \lor B)$

**Überprüfe, ob $F \models G$:** Ja, $F \models G$

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \lor C)$ | $(B \lor \neg C)$ | $(A \lor C) \land (B \lor \neg C)$ | $(A \lor B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Beispiel

$F = (A \lor C) \land (B \lor \neg C) \qquad G = (A \lor B)$

**Überprüfe, ob $F \models G$:** Ja, $F \models G$

.... aber es ist nicht wahr dass $G \models F$ (Notation: $G \not\models F$)

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A \lor C)$ | $(B \lor \neg C)$ | $(A \lor C) \land (B \lor \neg C)$ | $(A \lor B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Zusammenfassung

- Syntax (Formeln)
- Semantik

  Wertebelegungen (Valuationen, Modelle)

  Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

  Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen

  Modell einer Formel(menge)

  Gültigkeit und Erfüllbarkeit

  Tautologien und Kontradiktionen

  Folgerung und Äquivalenz