Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 2

30.04.2012

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

- Syntax (Formeln)
- Semantik

  Wertebelegungen (Valuationen, Modelle)

  Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

  Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen

  Modell einer Formel(menge)

  Gültigkeit und Erfüllbarkeit

  Tautologien und Kontradiktionen

  Folgerung und Äquivalenz

Wahrheitstabellen

A	B	C	$(A \vee C)$	$\neg C$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Modell einer Formel(menge)

Definition: Interpretation $\mathcal{A}$ ist Modell einer Formel $F \in For_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1.$$

Definition: Interpretation $\mathcal{A}$ ist Modell einer Formelmenge $M \subseteq For_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1 \text{ für alle } F \in M$$

Notation:

$\mathcal{A} \models F$

$\mathcal{A} \models M$

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

A	B	C	$(A \vee C)$	$\neg C$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Sei $\mathcal{A} : \{A, B, C\} \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(A) = 0, \mathcal{A}(B) = 1, \mathcal{A}(C) = 1$.

$\mathcal{A} \models (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

$\mathcal{A} \models \{(A \vee C), (B \vee \neg C)\}$

Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Definitionen:

- F gilt in $\mathcal{A}$ (oder $\mathcal{A}$ ist Modell von F) gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$.
  Notation: $\mathcal{A} \models F$
- F ist (allgemein-) gültig (Tautologie) gdw.: $\mathcal{A} \models F$, für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$
  Notation: $\models F$
- F heißt erfüllbar gdw. es $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ gibt, so dass $\mathcal{A} \models F$.
- Sonst heißt F unerfüllbar (oder eine Kontradiktion).

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$

A	B	C	$(A \vee C)$	$\neg C$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

F ist nicht allgemeingültig:

$\mathcal{A}_1(F) = 0$ für $\mathcal{A}_1 : \{A, B, C\} \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = \mathcal{A}(C) = 0$.

F ist erfüllbar (also ist F nicht unerfüllbar):

$\mathcal{A}_2(F) = 1$ für $\mathcal{A} : \{A, B, C\} \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(A) = 0, \mathcal{A}(B) = 1, \mathcal{A}(C) = 1$.

Tautologien und Kontradiktionen

Tautologien, allgemeingültige Formeln:

Formeln, die stets wahr sind.

Kontradiktionen, unerfüllbare Formeln:

Formel, die stets falsch sind.

- Die Negation einer Tautologie ist eine Kontradiktion
- Die Negation einer Kontradiktion ist eine Tautologie

Tautologien und Kontradiktionen

Tautologien, allgemeingültige Formeln:

Formeln, die stets wahr sind.

Kontradiktionen, unerfüllbare Formeln:

Formel, die stets falsch sind.

- Die Negation einer Tautologie ist eine Kontradiktion
- Die Negation einer Kontradiktion ist eine Tautologie

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Beweis 1: Aus der Wahrheitstafel.

Beweis 2: F allgemeingültig gdw. $\mathcal{A}(F){=}1$ für alle $\mathcal{A}{:}\Pi{\to}\{0,1\}$

gdw. $\mathcal{A}(\neg F){=}0$ für alle $\mathcal{A}{:}\Pi{\to}\{0,1\}$ gdw. $\neg F$ unerfüllbar

Erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Erfüllbarkeitstest:

Jede Formel F enthält endlich viele Aussagenvariablen.
$\mathcal{A}(F)$ ist nur von den Werten dieser Aussagenvariablen abhängig.

F enthält n Aussagenvariablen:

$\Rightarrow$ 2^n Wertbelegungen notwendig um zu überprüfen,
ob F erfüllbar ist oder nicht.

$\Rightarrow$ Wahrheitstafel

$\Rightarrow$ Das Erfüllbarkeitsproblem ist entscheidbar
(Cook's Theorem: NP-vollständig)

Es existieren viel bessere Methoden als Wahrheitstafeltests um die Erfüllbarkeit einer Formel zu überprüfen.

Folgerung

Definition: F impliziert G (oder G folgt aus F),
gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ gilt: Wenn $\mathcal{A} \models F$, dann $\mathcal{A} \models G$.

Notation: $F \models G$

Erweiterung auf Formelmengen N in natürlicher Weise, z.B.:

$N \models G$ gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ gilt:
falls $\mathcal{A} \models F$, für alle $F \in N$,
so $\mathcal{A} \models G$.

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

Überprüfe, ob $F \models G$: Ja, $F \models G$

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1

Beispiel

$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \qquad G = (A \vee B)$

Überprüfe, ob $F \models G$: Ja, $F \models G$

.... aber es ist nicht wahr dass $G \models F$ (Notation: $G \not\models F$)

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1

Äquivalenz

Definition: F und G sind äquivalent

gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ gilt: $\mathcal{A} \models F$ gdw. $A \models G$.

Notation: $F \equiv G$.

Zwei Formeln sind logisch äquivalent, wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind

Äquivalenz

Definition: F und G sind äquivalent

gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ gilt: $\mathcal{A} \models F$ gdw. $A \models G$.

Notation: $F \equiv G$.

Zwei Formeln sind logisch äquivalent, wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind

Beispiel:

$$(P \rightarrow Q) \equiv (\neg Q \rightarrow \neg P) \qquad \text{(Kontraposition)}$$

Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln F, G, H gültig:

$$\begin{aligned}
(F \wedge F) &\equiv F \\
(F \vee F) &\equiv F && \text{(Idempotenz)} \\[1ex]
(F \wedge G) &\equiv (G \wedge F) \\
(F \vee G) &\equiv (G \vee F) && \text{(Kommutativität)} \\[1ex]
(F \wedge (G \wedge H)) &\equiv ((F \wedge G) \wedge H) \\
(F \vee (G \vee H)) &\equiv ((F \vee G) \vee H) && \text{(Assoziativität)} \\[1ex]
(F \wedge (F \vee G)) &\equiv F \\
(F \vee (F \wedge G)) &\equiv F && \text{(Absorption)} \\[1ex]
(F \wedge (G \vee H)) &\equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H)) \\
(F \vee (G \wedge H)) &\equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H)) && \text{(Distributivität)}
\end{aligned}$$

Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln F, G, H gültig:

$$(\neg\neg F) \equiv F \qquad \text{(Doppelte Negation)}$$

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$$

$$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G) \qquad \text{(De Morgan's Regeln)}$$

$$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F) \qquad \text{(Kontraposition)}$$

$$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G) \qquad \text{(Elimination Implikation)}$$

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \qquad \text{(Elimination Äquivalenz)}$$

Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln F, G, H gültig:

$(F \wedge G) \equiv F$, falls G Tautologie

$(F \vee G) \equiv \top$, falls G Tautologie (Tautologieregeln)

$(F \wedge G) \equiv \bot$, falls G unerfüllbar

$(F \vee G) \equiv F$, falls G unerfüllbar (Tautologieregeln)

Wichtige Äquivalenzen mit $\top / \bot$

$(A \wedge \neg A) \equiv \bot$

$(A \vee \neg A) \equiv \top$ (Tertium non datur)

$(A \wedge \top) \equiv A$

$(A \wedge \bot) \equiv \bot$

Wichtige Äquivalenzen (Zusammengefasst)

$(F \wedge F) \equiv F$	$(F \vee F) \equiv F$	(Idempotenz)
$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$	$(F \vee G) \equiv (G \vee F)$	(Kommutativität)
$(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H)$ $(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H)$		(Assoziativität)
$(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$ $(F \vee (F \wedge G)) \equiv F$		(Absorption)
$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$ $(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$		(Distributivität)
$(\neg\neg F) \equiv F$		(Doppelte Negation)
$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$ $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$		(De Morgan's Regeln)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F)$		(Kontraposition)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$ $F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$		(Elimination Implikation) (Elimination Äquivalenz)

Terminologie

Eine Formel F, die als Teil einer Formel G auftritt,
heißt Teilformel von G.

- F ist eine Teilformel von F
- $$\left.\begin{array}{l} F = \neg G \text{ und} \\ H \text{ Teilformel von } G \end{array}\right\} \rightarrow \quad H \text{ Teilformel von } F$$
- $$\left.\begin{array}{l} F = F_1 \ \rho \ F_2 \\ (\text{wo } \rho \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}) \\ H \text{ Teilformel von } F_1 \text{ oder } F_2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad H \text{ Teilformel von } F$$

Substitutionstheorem

Theorem.
Seien F und G äquivalente Formeln. Sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Teilformel F.

Dann ist H äquivalent zu H', wobei H' aus H hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H durch G ersetzt wird.

Beispiel:

$A \vee B \equiv B \vee A$

impliziert

$(C \wedge (A \vee B)) \equiv (C \wedge (B \vee A))$

Substitutionstheorem

Theorem.
Seien F und G äquivalente Formeln. Sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Teilformel F.

Dann ist H äquivalent zu H', wobei H' aus H hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H durch G ersetzt wird.

Beweis: Strukturelle Induktion.

Substitutionstheorem

Theorem.
Seien F und G äquivalente Formeln. Sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Teilformel F.

Dann ist H äquivalent zu H', wobei H' aus H hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H durch G ersetzt wird. $p(H)$

Beweis: Strukturelle Induktion.

Induktionsbasis: Beweisen, dass $p(H)$ für alle Formeln H in $\{\perp, \top\} \cup \Pi$ gilt.

Beweis: Falls $H \in \{\perp, \top\} \cup \Pi$ und F Teilformel von H, so muss $F = H$ sein. Dann ist die Formel H', die aus H hervorgeht, indem F (= die ganze Formel H) durch G ersetzt wird, gleich G.

Aber dann: $H = F \equiv G = H'$.

Substitutionstheorem

Beweis: (Fortsetzung)
Sei H eine Formel, $H \not\in \{\bot, \top\} \cup \Pi$. Sei F eine Teilformel von H.

Fall 1: $F = H$. Dann $H' = G$ (wie vorher), so $H = F \equiv G = H'$.

Fall 2: $F \neq H$.

Induktionsvoraussetzung: Annahme: $p(H')$ gilt für alle dir. Teilformeln H' von H.

Induktionsschritt: Beweis, dass $p(H)$ gilt (durch Fallunterscheidung):

Fall 2.1: $H = \neg H_1$**.** Da $F \neq H$, ist F eine Teilformel von H_1.

Induktionvoraussetzung: $p(H_1)$ gilt, d.h. $H_1 \equiv H_1'$, wobei H_1' aus H_1 hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H_1 durch G ersetzt wird.

Da $H = \neg H_1$, ist $H' = \neg H_1'$.

Dann für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$: $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(\neg H_1) = \neg \mathcal{A}(H_1) \stackrel{I.V.}{=} \neg \mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(\neg H_1') = \mathcal{A}(H')$.

Somit ist bewiesen, dass $H \equiv H'$.

Substitutionstheorem

Beweis: (Fortsetzung)
Induktionsschritt: Beweis, dass $p(H)$ gilt (durch Fallunterscheidung):

Fall 2.2: $H = H_1$ op H_2**.** Da $F \neq H$, ist F Teilformel von H_1 oder von H_2.

Fall 2.2.1 F ist eine Teilformel von H_1.
Induktionvoraussetzung: $p(H_1)$ gilt, d.h. $H_1 \equiv H_1'$, wobei H_1' aus H_1 hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H_1 durch G ersetzt wird.

Da $H = H_1$ op H_2, und F in H_1 vorkommt, so $H' = H_1'$ op H_2.
Dann für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$: $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H_1 \text{ op } H_2) = \mathcal{A}(H_1) \text{ op } \mathcal{A}(H_2) \overset{I.V.}{=} \mathcal{A}(H_1') \text{ op } \mathcal{A}(H_2) = \mathcal{A}(H_1' \text{ op } H_2) = \mathcal{A}(H')$.

Somit ist bewiesen, dass $H \equiv H'$.

Fall 2.2.2 F ist eine Teilformel von H_2. Analog.

Ein zweiter Kalkül: Logische Umformung

Definition: Äquivalenzumformung

- (Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel
- Anwendung des Substitutionstheorems

Ein zweiter Kalkül: Logische Umformung

Definition: Äquivalenzumformung

- (Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel
- Anwendung des Substitutionstheorems

Theorem

Äquivalenzumformung bildet mit den aufgelisteten wichtigen Äquivalenzen einen vollständigen Kalkül:

Wenn F und G logisch äquivalent sind, kann F in G umgeformt werden.

Beispiel

$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

Beispiel

$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

$\equiv (\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R))$ (Elimination Implikation)

Beispiel

$(P \rightarrow Q) \land \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$

$\equiv (\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \rightarrow (\neg P \lor R))$ (Elimination Implikation)

$\equiv (\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R))$ (Elimination Implikation)

Beispiel

$(P \rightarrow Q) \land \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$

$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \rightarrow (\neg P \lor R))$ (Elimination Implikation)

$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R))$ (Elimination Implikation)

$\equiv(\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R))$ (De Morgan's Regel,$\lor$)

Beispiel

$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R))$	(De Morgan's Regel, $\lor$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land \quad ((\neg Q \lor R) \land (\neg\neg P \land \neg R))$	(Doppelte Negation, De Morgan, $\lor$)

Beispiel

$(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$

$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg(\neg Q \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee R))$	(De Morgan's Regel,$\vee$)
$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge \quad ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg R))$	(Doppelte Negation, De Morgan, $\vee$)
$\equiv(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (P \wedge \neg R))$	(Doppelte Negation)

Beispiel

$(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$

$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg(\neg Q \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee R))$	(De Morgan's Regel, $\vee$)
$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \quad ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg R))$	(Doppelte Negation, De Morgan, $\vee$)
$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (P \wedge \neg R))$	(Doppelte Negation)
$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge P \wedge \neg R))$	(Distributivität)

Beispiel

$$(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

$$\begin{aligned}
&\equiv(\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee R)) && \text{(Elimination Implikation)}\\
&\equiv(\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R)) && \text{(Elimination Implikation)}\\
&\equiv(\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg(\neg Q \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee R)) && \text{(De Morgan's Regel,}\vee\text{)}\\
&\equiv(\neg P \vee Q) \wedge \quad ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg R)) && \text{(Doppelte Negation, De Morgan, }\vee\text{)}\\
&\equiv(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (P \wedge \neg R)) && \text{(Doppelte Negation)}\\
&\equiv(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge P \wedge \neg R)) && \text{(Distributivität)}\\
&\equiv(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg R \wedge P)) && \text{(Kommutativität)}
\end{aligned}$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
&(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R)) && \\
\equiv\,&(\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R)) && \text{(Elimination Implikation)} \\
\equiv\,&(\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R)) && \text{(Elimination Implikation)} \\
\equiv\,&(\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R)) && \text{(De Morgan's Regel,}\lor\text{)} \\
\equiv\,&(\neg P \lor Q) \land \quad ((\neg Q \lor R) \land (\neg\neg P \land \neg R)) && \text{(Doppelte Negation, De Morgan, }\lor\text{)} \\
\equiv\,&(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \lor R) \land (P \land \neg R)) && \text{(Doppelte Negation)} \\
\equiv\,&(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land P \land \neg R)) && \text{(Distributivität)} \\
\equiv\,&(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land \neg R \land P)) && \text{(Kommutativität)} \\
\equiv\,&(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor \bot) && \text{(Äquivalenzen mit }\bot\text{)} \\
\equiv\,&(\neg P \lor Q) \land (\neg Q \land P \land \neg R) && \text{(Äquivalenzen mit }\bot\text{)}
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
&(P \rightarrow Q) \wedge \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)) && \\
\equiv\,&(\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \rightarrow (\neg P \vee R)) && \text{(Elimination Implikation)}\\
\equiv\,&(\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R)) && \text{(Elimination Implikation)}\\
\equiv\,&(\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg(\neg Q \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee R)) && \text{(De Morgan's Regel,}\vee\text{)}\\
\equiv\,&(\neg P \vee Q) \wedge \quad ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg R)) && \text{(Doppelte Negation, De Morgan, }\vee\text{)}\\
\equiv\,&(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (P \wedge \neg R)) && \text{(Doppelte Negation)}\\
\equiv\,&(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge P \wedge \neg R)) && \text{(Distributivität)}\\
\equiv\,&(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg R \wedge P)) && \text{(Kommutativität)}\\
\equiv\,&(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee \bot) && \text{(Äquivalenzen mit }\bot\text{)}\\
\equiv\,&(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \wedge P \wedge \neg R) && \text{(Äquivalenzen mit }\bot\text{)}\\
\equiv\,&(\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R) && \text{(Distributivität)}\\
\equiv\,&(\neg P \wedge P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R) && \text{(Kommutativität)}
\end{aligned}
$$

Beispiel

$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R))$	(De Morgan's Regel, $\lor$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land \quad ((\neg Q \lor R) \land (\neg\neg P \land \neg R))$	(Doppelte Negation, De Morgan, $\lor$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \lor R) \land (P \land \neg R))$	(Doppelte Negation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land P \land \neg R))$	(Distributivität)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land \neg R \land P))$	(Kommutativität)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor \bot)$	(Äquivalenzen mit $\bot$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land (\neg Q \land P \land \neg R)$	(Äquivalenzen mit $\bot$)
$\equiv(\neg P \land \neg Q \land P \land \neg R) \lor (Q \land \neg Q \land P \land \neg R)$	(Distributivität)
$\equiv(\neg P \land P \land \neg Q \land \neg R) \lor (Q \land \neg Q \land P \land \neg R)$	(Kommutativität)
$\equiv((\neg P \land P) \land \neg Q \land \neg R) \lor ((Q \land \neg Q) \land P \land \neg R)$	(Assoziativität)

Beispiel

$(P \to Q) \wedge \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

$\equiv$	$(\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \to (\neg P \vee R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv$	$(\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg(\neg Q \vee R) \vee (\neg P \vee R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv$	$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg\neg(\neg Q \vee R) \wedge \neg(\neg P \vee R))$	(De Morgan's Regel, $\vee$)
$\equiv$	$(\neg P \vee Q) \wedge \quad ((\neg Q \vee R) \wedge (\neg\neg P \wedge \neg R))$	(Doppelte Negation, De Morgan, $\vee$)
$\equiv$	$(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \vee R) \wedge (P \wedge \neg R))$	(Doppelte Negation)
$\equiv$	$(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge P \wedge \neg R))$	(Distributivität)
$\equiv$	$(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg R \wedge P))$	(Kommutativität)
$\equiv$	$(\neg P \vee Q) \wedge ((\neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee \bot)$	(Äquivalenzen mit $\bot$)
$\equiv$	$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \wedge P \wedge \neg R)$	(Äquivalenzen mit $\bot$)
$\equiv$	$(\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R)$	(Distributivität)
$\equiv$	$(\neg P \wedge P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg Q \wedge P \wedge \neg R)$	(Kommutativität)
$\equiv$	$((\neg P \wedge P) \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee ((Q \wedge \neg Q) \wedge P \wedge \neg R)$	(Assoziativität)
$\equiv$	$\bot \vee \bot \equiv \bot$	(Äquivalenzen mit $\bot$)

Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln

Theorem. $F \models G$ gdw. $\models F \to G$.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
F \models G \quad & \text{g.d.w.} \quad \text{für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}, \text{ falls } \mathcal{A}(F) = 1 \text{ so } \mathcal{A}(G) = 1 \\
& \text{g.d.w.} \quad \text{für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}, \ (\mathcal{A}(F) \to \mathcal{A}(G)) = 1 \\
& \text{g.d.w.} \quad \text{für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}, \ \mathcal{A}(F \to G) = 1 \\
& \text{g.d.w.} \quad \models F \to G
\end{aligned}
$$

Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \rightarrow G$.

Beweis: "$\Rightarrow$"

Annahme: $N \cup \{F\} \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}$:$\Pi \rightarrow \{0, 1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}$] so $\mathcal{A}(G)=1$.

Wir beweisen, dass $N \models F \rightarrow G$, d.h. für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$
falls [$\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N$] so $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N$.

Fall 1: $\mathcal{A}(F) = 0$. Dann $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Fall 2: $\mathcal{A}(F) = 1$, d.h. [$\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}$]. Dann
$\mathcal{A}(G) = 1$ und somit $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \rightarrow G$.

Beweis: "$\Leftarrow$"

Annahme: $N \models F \rightarrow G$ d.h. für alle $\mathcal{A}$:$\Pi \rightarrow \{0, 1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N$] so $\mathcal{A}(F \rightarrow G)=1$.

Wir beweisen, dass $N \cup \{F\} \models G$, d.h. für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$
falls [$\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}$] so $\mathcal{A}(G) = 1$.

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}$.

Dann (i) $\mathcal{A}(F) = 1$ und
(ii) [$\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N$], also $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Es folgt, dass $1 = \mathcal{A}(F \rightarrow G) = (\mathcal{A}(F) \rightarrow \mathcal{A}(G)) = (1 \rightarrow \mathcal{A}(G)) = \mathcal{A}(G)$,
so $\mathcal{A}(G) = 1$.

Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln.

Theorem. $F \equiv G$ gdw. $\models F \leftrightarrow G$.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
F \equiv F \quad & \text{g.d.w. für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\},\ \mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G) \\
& \text{g.d.w. für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\},\ (\mathcal{A}(F) \leftrightarrow \mathcal{A}(G)) = 1 \\
& \text{g.d.w. für alle } \mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\},\ \mathcal{A}(F \leftrightarrow G) = 1 \\
& \text{g.d.w. } \models F \leftrightarrow G
\end{aligned}
$$

Allgemeingültigkeit/Folgerung: Zusammenfassung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $F \models G$ gdw. $\models F \rightarrow G$.

Theorem. $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \rightarrow G$.

Theorem. $F \equiv G$ gdw. $\models F \leftrightarrow G$.

Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln.

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Beweis auf Seite 9.

Theorem. $F \models G$ gdw. $F \wedge \neg G$ ist unerfüllbar.

Beweis:

$F \models G$ gdw. $\models F \rightarrow G$ d.h. $F \rightarrow G$ allgemeingültig

gdw. $\neg(F \rightarrow G)$ unerfüllbar.

gdw. $F \wedge \neg G$ unerfüllbar.

... da $\neg(F \rightarrow G) \equiv \neg(\neg F \vee G) \equiv \neg\neg F \wedge \neg G \equiv F \wedge \neg G$.

Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \neg G$ ist unerfüllbar.

Beweis: "$\Rightarrow$"

Annahme: $N \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}{:}\Pi{\rightarrow}\{0,1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N$] so $\mathcal{A}(G){=}1$.

Zu zeigen: $N \cup \neg G$ unerfüllbar.

Beweis durch Widerspruch: Wir nehmen an, $N \cup \neg G$ erfüllbar,
d.h. es gibt $\mathcal{A}{:}\Pi{\rightarrow}\{0,1\}$, mit

[$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N \cup \{\neg G\}$].

Dann [$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N$] und $\mathcal{A}(\neg G) = 1$ (d.h. $\mathcal{A}(G) = 0$). Widerspruch.

Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \neg G$ ist unerfüllbar.

Beweis: "$\Leftarrow$"

Annahme: $N \cup \neg G$ unerfüllbar.

Zu zeigen: $N \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}{:}\Pi \rightarrow \{0, 1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N$] so $\mathcal{A}(G)=1$.

Beweis: Sei $\mathcal{A}{:}\Pi \rightarrow \{0, 1\}$, mit [$\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N$].

Falls $\mathcal{A}(G) = 0$, wäre $\mathcal{A}$ ein Modell für $N \cup \{\neg G\}$. Das ist aber unmöglich, da wir angenommen haben, dass $N \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar ist.

Es folgt, dass $\mathcal{A}(G) = 1$.

Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung: Zusammenfassung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Theorem. $F \models G$ gdw. $F \wedge \neg G$ ist unerfüllbar.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \neg G$ ist unerfüllbar.

Nota bene: falls N unerfüllbar, so $N \models G$ für jede Formel G
... auch für $\perp$.

Notation: $N \models \perp$ für N unerfüllbar.

Zusammenfassung

- Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit
- Erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode
- Folgerung, Äquivalenz
- Wichtige Äquivalenzen
- Ein zweiter Kalkül: Logische Umformung
- Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung