

Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 3

06.05.2012

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

- **Syntax** (Formeln)
- **Semantik**

Wertebelegungen/Valuationen/Modelle

Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen

$\mathcal{A} \models F$ g.d.w. $\mathcal{A}(F) = 1$.

Gültigkeit und Erfüllbarkeit

F allgemeingültig/Tautologie:

– $\mathcal{A}(F) = 1$ für alle Wertebelegungen \mathcal{A}

F erfüllbar

– es gibt Wertebelegung \mathcal{A} mit $\mathcal{A}(F) = 1$

F unerfüllbar/Kontradiktion

– $\mathcal{A}(F) = 0$ für alle Wertebelegungen \mathcal{A}

Folgerung, Äquivalenz

$F \models G, F \equiv G$

Bis jetzt

- **Kalküle:**

Erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Wichtige Äquivalenzen

Ein zweiter Kalkül: Logische Umformung

- **Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung**

$$F \models G \quad \text{gdw.} \quad \models F \rightarrow G$$

$$N \cup \{F\} \models G \quad \text{gdw.} \quad N \models F \rightarrow G$$

$$F \equiv G \quad \text{gdw.} \quad \models F \leftrightarrow G$$

$$G \text{ allgemeingültig} \quad \text{gdw.} \quad \neg G \text{ unerfüllbar}$$

$$F \models G \quad \text{gdw.} \quad F \wedge \neg G \text{ unerfüllbar}$$

$$N \models G \quad \text{gdw.} \quad N \cup \neg G \text{ unerfüllbar}$$

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit
(für Formeln und/oder Formelmengen)

Dazu brauchen wir “Normalformen”

Normalformen

Definition:

- **Atom:** aussagenlogische Variable
- **Literal:** Atom, oder
Negation eines Atoms

Beispiel. Sei $\Pi = \{P, Q, R\}$.

Atome: P, Q, R

Literale: $P, \neg P, Q, \neg Q, R, \neg R$

Normalformen

Definition:

- **Atom:** aussagenlogische Variable
- **Literal:** Atom, oder
Negation eines Atoms

Definition:

Klausel: Eine Disjunktion von Literalen

- mehrstellige Disjunktionen $(P \vee \neg Q \vee R)$, $(P \vee P \vee \neg Q)$
- einstellige Disjunktionen P
- die nullstellige Disjunktion (leere Klausel) \perp

Normalformen

Definition:

Konjunktive Normalform (KNF): Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, d.h., eine Konjunktion von Klauseln

Normalformen

Definition:

Konjunktive Normalform (KNF): Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, d.h., eine Konjunktion von Klauseln

mehrstellig, einstellig oder nullstellig

Normalformen

Definition:

Konjunktive Normalform (KNF): Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, d.h., eine Konjunktion von Klauseln

mehrstellig, einstellig oder nullstellig

Beispiele:

$$(P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg R \vee \neg S)$$

$$P \vee Q$$

$$P \wedge (Q \vee R)$$

$$P \wedge Q$$

$$P \wedge P$$

$$\top$$

Normalformen

Definition:

Disjunktive Normalform (DNF): Eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen.

mehrstellig, einstellig oder nullstellig

Beispiele:

$$(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R \wedge \neg S)$$

$$P \wedge Q$$

$$P \vee (Q \wedge R)$$

$$P \vee Q$$

$$P \vee P$$

$$\perp$$

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
 - eine äquivalente Formel in KNF
 - eine äquivalente Formel in DNF

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
 - eine äquivalente Formel in KNF
 - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
 - eine äquivalente Formel in KNF
 - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig
- Solche Formeln können aus einer Wahrheitstafel abgelesen werden
- Solche Formeln können durch Umformungen hergestellt werden

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
 - eine äquivalente Formel in KNF
 - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig
- Solche Formeln können aus einer Wahrheitstafel abgelesen werden
- Solche Formeln können durch Umformungen hergestellt werden

Beispiel

$$F : (P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee R)$$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$((\neg P \wedge Q) \vee R)$	F
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1

Beispiel: DNF

$$F : (P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee R)$$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$((\neg P \wedge Q) \vee R)$	F
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1

Beispiel: DNF

$$F : (P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee R)$$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$((\neg P \wedge Q) \vee R)$	F
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1

$$\text{DNF: } (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

Beispiel: KNF

$$F : (P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee R)$$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$((\neg P \wedge Q) \vee R)$	F	$\neg F$
0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0

DNF für $\neg F$: $(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$

KNF für F : $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

Normalformen

DNF für F :

$$\bigvee_{\substack{\mathcal{A}: \{P_1, \dots, P_n\} \rightarrow \{0,1\} \\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \dots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})$$

wobei:

$$P^0 = \neg P$$

$$P^1 = P$$

Normalformen

DNF für F :

$$\bigvee_{\substack{\mathcal{A}: \{P_1, \dots, P_n\} \rightarrow \{0,1\} \\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \dots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})$$

wobei:

$$P^0 = \neg P$$

$$P^1 = P$$

Theorem

Für alle Interpretationen $\mathcal{A}' : \{P_1, \dots, P_n\} \rightarrow \{0, 1\}$:

$$\mathcal{A}'(F) = 1 \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{A}'\left(\bigvee_{\substack{\mathcal{A}: \{P_1, \dots, P_n\} \rightarrow \{0,1\} \\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \dots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})\right) = 1.$$

Normalformen

DNF für F :

$$\bigvee_{\substack{\mathcal{A}: \{P_1, \dots, P_n\} \rightarrow \{0,1\} \\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \dots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})$$

wobei:

$$P^0 = \neg P$$

$$P^1 = P$$

KNF für F : $\neg F'$,

wobei F' die DNF von $\neg F$ ist.

Normalformen

DNF für F :

$$\bigvee_{\substack{\mathcal{A}: \{P_1, \dots, P_n\} \rightarrow \{0,1\} \\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \dots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})$$

wobei:

$$P^0 = \neg P$$

$$P^1 = P$$

KNF für F : $\neg F'$,

wobei F' die DNF von $\neg F$ ist.

KNF für F :

$$\bigwedge_{\substack{\mathcal{A}: \{P_1, \dots, P_n\} \rightarrow \{0,1\} \\ \mathcal{A}(F)=0}} (P_1^{1-\mathcal{A}(P_1)} \vee \dots \vee P_n^{1-\mathcal{A}(P_n)})$$

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
 - eine äquivalente Formel in KNF
 - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig
- Solche Formeln können aus einer Wahrheitstafel abgelesen werden
- Solche Formeln können durch Umformungen hergestellt werden

Umformung in KNF

Vier Schritte:

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von \leftrightarrow

Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von \leftrightarrow

Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von \rightarrow

Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von \leftrightarrow

Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von \rightarrow

Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. "Nach innen schieben" von \neg

Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$

\mapsto **Negationsnormalform (NNF)**

Eine logische Formel ist in Negationsnormalform (NNF), falls die Negationsoperatoren in ihr nur direkt über atomaren Aussagen vorkommen.

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von \leftrightarrow

Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von \rightarrow

Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. “Nach innen schieben” von \neg

Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$

(NNF)

4. “Nach innen schieben” von \vee

Verwende Distributivität von \vee über \wedge

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von \leftrightarrow

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von \leftrightarrow

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

2. Elimination von \rightarrow

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg(Q \vee R) \vee P)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von \leftrightarrow

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

2. Elimination von \rightarrow

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg(Q \vee R) \vee P)$$

3. "Nach innen schieben" von \neg

(NNF)

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von \leftrightarrow

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

2. Elimination von \rightarrow

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg(Q \vee R) \vee P)$$

3. "Nach innen schieben" von \neg

(NNF)

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)$$

4. "Nach innen schieben" von \vee

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge (\neg R \vee P)$$

Umformung in DNF

Vier Schritte:

1. Elimination von \leftrightarrow

Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von \rightarrow

Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. “Nach innen schieben” von \neg

Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$

(NNF)

4. “Nach innen schieben” von \wedge

Verwende Distributivität von \wedge über \vee

Umformung in DNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. **Negationsnormalform (NNF)** (s. Seite 32):

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)$$

2. “Nach innen schieben” von \wedge

$$\begin{aligned} & (\neg P \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)) \vee (Q \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)) \vee (R \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)) \\ \equiv & (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge P) \vee \\ & (R \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge P) \\ \equiv & (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee \underbrace{(\neg P \wedge P)}_{\equiv \perp} \vee \underbrace{((Q \wedge \neg Q) \wedge \neg R)}_{\equiv \perp} \vee (Q \wedge P) \vee \\ & \underbrace{((R \wedge \neg R) \wedge \neg Q)}_{\equiv \perp} \vee (R \wedge P) \\ \equiv & (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge P) \vee (R \wedge P) \end{aligned}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

Zu A_n äquivalente KNF

$$\bigwedge_{f:\{1,\dots,n\}\rightarrow\{1,2\}} (P_{1,f(1)} \vee \cdots \vee P_{n,f(n)})$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

$$n = 1 : A_1 = P_{11} \wedge P_{12} \qquad \text{Länge: } 2 = 2^1$$

$$\begin{aligned} n = 2 : A_2 &= (P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22}) \\ &\equiv ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{21}) \wedge ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{22}) \\ &\equiv (P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}) \quad \text{Länge: } 2 \cdot 2 = 2^2 \end{aligned}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

$$n = 1 : A_1 = P_{11} \wedge P_{12}$$

Länge: $2 = 2^1$

$$n = 2 : A_2 = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22})$$

$$\equiv ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{21}) \wedge ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{22})$$

$$\equiv (P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})$$

Länge: $2 \cdot 2 = 2^2$

$$n = 3 : A_3 = \underbrace{(P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22})}_{A_2} \vee (P_{31} \wedge P_{32})$$

$$\equiv \underbrace{((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}))}_{KNF(A_2)} \vee (P_{31} \wedge P_{32})$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

$$n = 1 : A_1 = P_{11} \wedge P_{12}$$

Länge: $2 = 2^1$

$$n = 2 : A_2 = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22})$$

$$\equiv ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{21}) \wedge ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{22})$$

$$\equiv (P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})$$

Länge: $2 \cdot 2 = 2^2$

$$n = 3 : A_3 = \underbrace{(P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22})}_{A_2} \vee (P_{31} \wedge P_{32})$$

$$\equiv \underbrace{((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}))}_{KNF(A_2)} \vee (P_{31} \wedge P_{32})$$

$$\equiv (((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})) \vee P_{31}) \wedge$$

$$(((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})) \vee P_{32})$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

$$n = 1 : A_1 = P_{11} \wedge P_{12}$$

Länge: 2^1

$$n = 2 : A_2 = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22})$$

$$\equiv ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{21}) \wedge ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{22})$$

$$\equiv (P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})$$

Länge: 2^2

$$n = 3 : A_3 = \underbrace{(P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22})}_{A_2} \vee (P_{31} \wedge P_{32})$$

$$\equiv \underbrace{((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}))}_{KNF(A_2)} \vee (P_{31} \wedge P_{32})$$

$$\equiv (((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})) \vee P_{31}) \wedge$$

$$(((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})) \vee P_{32})$$

$$\equiv (((P_{11} \vee P_{21} \vee P_{31}) \wedge (P_{12} \vee P_{21} \vee P_{31}) \wedge (P_{11} \vee P_{22} \vee P_{31}) \wedge (P_{12} \vee P_{22} \vee P_{31})) \wedge$$

$$(((P_{11} \vee P_{21} \vee P_{32}) \wedge (P_{12} \vee P_{21} \vee P_{32}) \wedge (P_{11} \vee P_{22} \vee P_{32}) \wedge (P_{12} \vee P_{22} \vee P_{32})) \text{ Länge: } 2^3$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

Zu A_n äquivalente KNF

$$\bigwedge_{f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2\}} (P_{1, f(1)} \vee \cdots \vee P_{n, f(n)})$$

Größe der KNF:

- Klausel in KNF von A_n : 2^n

Beweis: Induktion

Sei $f(n)$ die Anzahl der Klausel in KNF für A_n .

$$f(1) = 2$$

$$f(n + 1) = 2f(n)$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben: $A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$

- Klausel in KNF von A_n : 2^n

Beweis durch Induktion

Induktionsbasis: $n = 1$: A_1 in KNF, 2^1 Klausel.

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben: $A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$

- Klausel in KNF von A_n : 2^n

Beweis durch Induktion

Induktionsvoraussetzung: KNF von A_n hat 2^n Klausel

$KNF(A_n) = C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n}$, $C_i = (L_1^i \vee \cdots \vee L_{n_i}^i)$ Klausel

Induktionsschritt: Zu zeigen: KNF von A_{n+1} hat 2^{n+1} Klausel

$$\begin{aligned}
 A_{n+1} &= (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2}) \vee (P_{(n+1),1} \wedge P_{(n+1),2}) \\
 &\equiv \underbrace{((P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2}))}_{A_n} \vee (P_{(n+1),1} \wedge P_{(n+1),2}) \\
 &\equiv \underbrace{(C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n})}_{KNF(A_n)} \vee (P_{(n+1),1} \wedge P_{(n+1),2}) \\
 &\equiv ((C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n}) \vee P_{(n+1),1}) \wedge ((C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n}) \vee P_{(n+1),2}) \\
 &\equiv (C_1 \vee P_{(n+1),1}) \wedge \cdots \wedge (C_{2^n} \vee P_{(n+1),1}) \wedge (C_1 \vee P_{(n+1),2}) \wedge \cdots \wedge (C_{2^n} \vee P_{(n+1),2})
 \end{aligned}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben: $A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \dots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$

- Klausel in KNF von A_n : 2^n

Beweis durch Induktion

Induktionsvoraussetzung: KNF von A_n hat 2^n Klausel

$KNF(A_n) = C_1 \wedge \dots \wedge C_{2^n}$, $C_i = (L_1^i \vee \dots \vee L_{n_i}^i)$ Klausel

Induktionsschritt: Zu zeigen: KNF von A_{n+1} hat 2^{n+1} Klausel

$$\begin{aligned}
 A_{n+1} &= (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \dots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2}) \vee (P_{(n+1),1} \wedge P_{(n+1),2}) \\
 &\equiv \underbrace{((P_{11} \wedge P_{12}) \vee \dots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2}))}_{A_n} \vee (P_{(n+1),1} \wedge P_{(n+1),2}) \\
 &\equiv \underbrace{(C_1 \wedge \dots \wedge C_{2^n})}_{KNF(A_n)} \vee (P_{(n+1),1} \wedge P_{(n+1),2}) \\
 &\equiv ((C_1 \wedge \dots \wedge C_{2^n}) \vee P_{(n+1),1}) \wedge ((C_1 \wedge \dots \wedge C_{2^n}) \vee P_{(n+1),2}) \\
 &\equiv \underbrace{(C_1 \vee P_{(n+1),1}) \wedge \dots \wedge (C_{2^n} \vee P_{(n+1),1})}_{2^n} \wedge \underbrace{(C_1 \vee P_{(n+1),2}) \wedge \dots \wedge (C_{2^n} \vee P_{(n+1),2})}_{2^n}
 \end{aligned}$$

KNF: Mengenschreibweise

Notation:

Klausel als Menge von Literalen

Formel in KNF als Menge von Klauseln

KNF: Mengenschreibweise

Notation:

Klausel als Menge von Literalen

Formel in KNF als Menge von Klauseln

Beispiel:

$$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\{ \{P, Q, R\}, \{P, Q, \neg R\}, \{\neg P, Q, R\}, \{\neg P, \neg Q, R\} \}$$

KNF: Mengenschreibweise

Bedeutung der leeren Menge

- Leere Klausel
 - = leere Menge von Literalen
 - = leere Disjunktion
 - = \perp

KNF: Mengenschreibweise

Bedeutung der leeren Menge

- Leere Klausel
 - = leere Menge von Literalen
 - = leere Disjunktion
 - = \perp
- Leere Menge von Klausels
 - = leere Konjunktion
 - = \top

Vereinfachung der KNF: Subsumption

Theorem (Subsumption Regel)

Enthält eine KNF-Formel (= Klauselmenge) Klauseln K, K' mit

$$K \subset K'$$

dann entsteht eine äquivalente Formel, wenn K' weggelassen wird.

Vereinfachung der KNF: Subsumption

Theorem (Subsumption Regel)

Enthält eine KNF-Formel (= Klauselmenge) Klauseln K, K' mit

$$K \subset K'$$

dann entsteht eine äquivalente Formel, wenn K' weggelassen wird.

Beweis:

$$K = \{L_1, \dots, L_p\} \subseteq \{L_1, \dots, L_p, L_{p+1}, \dots, L_m\} = K'$$

F enthält $K \wedge K'$

$$K \wedge K' = (L_1 \vee \dots \vee L_p) \wedge ((L_1 \vee \dots \vee L_p) \vee L_{p+1} \vee \dots \vee L_m)$$

$$\equiv (L_1 \vee \dots \vee L_p) = K$$

(Absorption)

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Definition: SAT-Problem

Gegeben: Eine aussagenlogische Formel F

Frage: Ist F erfüllbar?

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Definition: SAT-Problem

Gegeben: Eine aussagenlogische Formel F

Frage: Ist F erfüllbar?

NB: F allgemeingültig gdw. $\neg F$ nicht erfüllbar

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Erfüllbarkeitsproblem für DNF Formeln

Sei $F = \bigvee_{i=1}^n (\bigwedge_{j=1}^m L_{ij})$ in DNF

F unerfüllbar gdw. $(\bigwedge_{j=1}^m L_{ij})$ unerfüllbar für alle $i = 1, \dots, n$

 gdw. $(\bigwedge_{j=1}^m L_{ij})$ enthält zwei komplementäre Literale für alle i

Zusammenfassung

- **Normalformen**

 - Atome, Literale, Klauseln

 - Konjunktive und Disjunktive Normalform

 - Ablezen von DNF und KNF aus Wahrheitstafeln

 - Umformen in KNF/DNF

 - Mengenschreibweise

 - Subsumption

- **SAT-Problem** (Erfüllbarkeitsproblem)

 - Definition

 - Erfüllbarkeitsproblem für DNF Formeln