Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 5

14.05.2012

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

- Normalformen
  - Atome, Literale, Klauseln
  - Konjunktive und Disjunktive Normalform
  - Ablesen von DNF und KNF aus Wahrheitstafeln
  - Umformen in KNF/DNF
  - Mengenschreibweise
  - Subsumption

- SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)
  - SAT
    - Erfüllbarkeitsproblem für DNF Formeln
    - k-SAT; 3-SAT vs. SAT
    - 2-SAT: heute
    - Horn-Formeln
      - Erfüllbarkeitstest für Hornformeln

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem

Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Lemma. Sei F Hornformel die keine Fakten enthält. Dann ist F erfüllbar.

Beweis: Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 0$ für alle $P \in \Pi$. Dann $\mathcal{A}(F) = 1$.

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem
Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Beweis: **(Idee)**

Ziel: $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$.

Falls keine Fakten in F: F erfüllbar.

Sonst: Für alle Fakten $\to P$ in F: $\mathcal{A}(P) := 1$;

Wiederhole das Verfahren für F', entstanden aus F durch Ersetzung von P mit $\top$.

Idee: "Markiere" die Atome, die den Wert 1 bekommen

Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln

Eingabe: $F = D_1 \wedge \cdots \wedge D_n$ eine Hornformel

(die Klausel D_i enthält höchstens ein positives Literal)

Ein Atom in F zu markieren, bedeutet, es an allen Stellen seines Auftretens in F zu markieren

Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln

0: IF keine Fakten (Klausel "$\to A$") vorhanden

   THEN Ausgabe: erfüllbar

   ELSE markiere alle Fakten in F (Atome A mit $\to A$ in F)

1: IF keine Klausel $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$ in F, so dass

   alle Atome in $A_1, \ldots, A_n$ markiert aber B nicht

   THEN Ausgabe: erfüllbar

   ELSE wähle die erste solche Klausel

   IF B leer

   THEN Ausgabe: unerfüllbar

   ELSE markiere überall B in F

   GOTO 1

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem
Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Beweis: (Idee)

Ziel: $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$.

Falls keine Fakten in F: F erfüllbar.

Sonst: Für alle Fakten $\to P$ in F: $\mathcal{A}(P) := 1$;

Wiederhole das Verfahren für F', entstanden aus F durch Ersetzung von P mit $\top$.

Komplexität: $|F| \times |F|$

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

    Resolution

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

   Resolution

2. Formelmengen

   Semantische Tableaux

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

   Resolution

2. Formelmengen

   Semantische Tableaux

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow S$	$\neg Q \vee S$
$W \rightarrow T$	$\neg W \vee T$
$S \rightarrow U$	$\neg S \vee U$
$U, T, Z \rightarrow P$	$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$
$\underline{Q}, S, U \rightarrow W$	$\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$ $\qquad Q \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	*Klauseln*
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow S$	S
$W \rightarrow T$	$\neg W \vee T$
$S \rightarrow U$	$\neg S \vee U$
$U, T, Z \rightarrow P$	$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$
$\underline{Q}, S, U \rightarrow W$	$\neg S \vee \neg U \vee W$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$ $Q \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	S
$W \rightarrow T$	$\neg W \vee T$
$\underline{S} \rightarrow U$	$\neg S \vee U$
$U, T, Z \rightarrow P$	$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$
$\underline{Q}, \underline{S}, U \rightarrow W$	$\neg S \vee \neg U \vee W$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \rightarrow S$	$S \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	S
$W \rightarrow T$	$\neg W \vee T$
$\underline{S} \rightarrow U$	U
$U, T, Z \rightarrow P$	$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$
$\underline{Q}, \underline{S}, U \rightarrow W$	$\neg U \vee W$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \rightarrow S$	$S \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	S
$W \rightarrow T$	$\neg W \vee T$
$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$	U
$\underline{U}, T, Z \rightarrow P$	$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow W$	$\neg U \vee W$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \rightarrow S$	$S \mapsto \top$
$\{Q, S, U\}$	wegen $S \rightarrow U$	$U \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \to$	$\neg P$
$\to \underline{Q}$	Q
$P \to R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \to \underline{S}$	S
$W \to T$	$\neg W \vee T$
$\underline{S} \to \underline{U}$	U
$\underline{U}, T, Z \to P$	$\neg T \vee \neg Z \vee P$
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \to W$	W

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \to Q$ $\quad Q \mapsto \top$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \to S$ $\quad S \mapsto \top$

$\{Q, S, U\}$ wegen $S \to U$ $\quad U \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	S
$\underline{W} \rightarrow T$	T
$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$	U
$\underline{U}, T, Z \rightarrow P$	$\neg T \vee \neg Z \vee P$
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$	W

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \rightarrow S$	$S \mapsto \top$
$\{Q, S, U\}$	wegen $S \rightarrow U$	$U \mapsto \top$
$\{Q, S, U, W\}$	wegen $Q, S, U \rightarrow W$	$W \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	S
$\underline{W} \rightarrow \underline{T}$	T
$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$	U
$\underline{U}, \underline{T}, Z \rightarrow P$	$\neg Z \vee P$
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$	W

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \rightarrow S$	$S \mapsto \top$
$\{Q, S, U\}$	wegen $S \rightarrow U$	$U \mapsto \top$
$\{Q, S, U, W\}$	wegen $Q, S, U \rightarrow W$	$W \mapsto \top$
$\{Q, S, U, W, T\}$	wegen $W \rightarrow T$	$T \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \land (Q) \land (\neg P \lor R) \land (\neg Q \lor S) \land (T \lor \neg W) \land (\neg S \lor U) \land$$
$$(\neg U \lor \neg T \lor P \lor \neg Z) \land (\neg Q \lor \neg S \lor \neg U \lor W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \lor R$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	S
$\underline{W} \rightarrow \underline{T}$	T
$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$	U
$\underline{U}, \underline{T}, Z \rightarrow P$	$\neg Z \lor P$
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$	W

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \rightarrow S$	$S \mapsto \top$
$\{Q, S, U\}$	wegen $S \rightarrow U$	$U \mapsto \top$
$\{Q, S, U, W\}$	wegen $Q, S, U \rightarrow W$	$W \mapsto \top$
$\{Q, S, U, W, T\}$	wegen $W \rightarrow T$	$T \mapsto \top$

Modell:

$$\mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(W) = \mathcal{A}(T) = 1$$
$$\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(Z) = 0$$

Markierte Atome: wahr; nicht markierte Atome: falsch.

Bemerkung

Horn Klauseln:

$$\frac{P \qquad P, P_1 \ldots P_n \to Q}{P_1 \ldots P_n \to Q}$$

Klauselschreibweise:

$$\frac{P \qquad \neg P \vee \neg P_1 \ldots \neg P_n \vee Q}{\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n \vee Q}$$

Mengenschreibweise:

$$\frac{\{P\} \qquad \{\neg P, \neg P_1, \neg P_n, Q\}}{\{\neg P_1, \ldots, \neg P_n, Q\}}$$

Verallgemeinerung?

Syllogismus (in der ersten Vorlesung erwähnt):

$$\frac{P \qquad P \rightarrow C}{C}$$

Mengenschreibweise: 1-Resolution (unit resolution)

$$\frac{\{P\} \qquad \{\neg P\} \cup C}{C} \qquad\qquad \frac{\{\neg P\} \qquad \{P\} \cup C}{C}$$

Verallgemeinerung?

Nicht geeignet für Erfüllbarkeitsüberprüfung beliebiger Klauselmengen:

Die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

ist nicht erfüllbar, aber mit 1-Resolution ist aus M nichts ableitbar, also auch nicht $\perp$.

Verallgemeinerung?

Nicht geeignet für Erfüllbarkeitsüberprüfung beliebiger Klauselmengen:

Die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

ist nicht erfüllbar, aber mit 1-Resolution ist aus M nichts ableitbar, also auch nicht $\perp$.

Ziel: Kalkül mit der Eigenschaft dass:
(1) falls M unerfüllbar $\perp$ ist aus M ableitbar
(2) falls $\perp$ aus M ableitbar, M unerfüllbar.

$\mapsto$ Das Resolutionkalkül

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform
- Eine einzige Regel

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform
- Eine einzige Regel
- Operiert auf Klauseln (in Mengenschreibweise)

Resolutionskalkül

Definition: Resolutionsregel (einzige Regel des Kalküls)

$$\frac{C_1 \cup \{P\} \qquad \{\neg P\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$$

wobei

- P eine aussagenlogische Variable
- C_1, C_2 Klauseln (können leer sein)

Definition:

$C_1 \cup C_2$ heißt Resolvente von $C_1 \cup \{P\}, C_2 \cup \{\neg P\}$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\} \quad \{\neg P_1\}}{\perp}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\} \quad \{\neg P_1\}}{\perp}$$

Insgesamt: $M \vdash_{\mathsf{Res}} \perp$

also: M unerfüllbar

Resolution: Weiteres Beispiel

Zu zeigen:

$$(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$$

ist allgemeingültig

Resolution: Weiteres Beispiel

Zu zeigen:

$$(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$$

ist allgemeingültig

Dazu zeigen wir, dass

$$\neg[(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))]$$

unerfüllbar ist.

Resolution: Weiteres Beispiel

Zu zeigen:

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

ist allgemeingültig

Dazu zeigen wir, dass

$$\neg[(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))]$$

unerfüllbar ist.

Klauselnormalform:

$$\{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M:

(1)	$\{\neg P, Q\}$	gegeben
(2)	$\{\neg Q, R\}$	gegeben
(3)	$\{P\}$	gegeben
(4)	$\{\neg R\}$	gegeben

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M:

(1)	$\{\neg P, Q\}$	gegeben
(2)	$\{\neg Q, R\}$	gegeben
(3)	$\{P\}$	gegeben
(4)	$\{\neg R\}$	gegeben
(5)	$\{Q\}$	aus (1) und (3)

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M:

(1)	$\{\neg P, Q\}$	gegeben
(2)	$\{\neg Q, R\}$	gegeben
(3)	$\{P\}$	gegeben
(4)	$\{\neg R\}$	gegeben
(5)	$\{Q\}$	aus (1) und (3)
(6)	$\{R\}$	aus (2) und (5)

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M:

(1)	$\{\neg P, Q\}$	gegeben
(2)	$\{\neg Q, R\}$	gegeben
(3)	$\{P\}$	gegeben
(4)	$\{\neg R\}$	gegeben
(5)	$\{Q\}$	aus (1) und (3)
(6)	$\{R\}$	aus (2) und (5)
(7)	$\perp$	aus (4) und (6)

Resolution: Bemerkungen

Vorsicht bei Klauseln mit mehreren Resolutionsmöglichkeiten

- Zwei Klauseln können mehr als eine Resolvente haben
  z.B.: $\{A, B\}$ und $\{\neg A, \neg B\}$
- $\{A, B, C\}$ und $\{\neg A, \neg B, D\}$ haben NICHT $\{C, D\}$ als Resolvente

Resolution: Bemerkungen

Vorsicht bei Klauseln mit mehreren Resolutionsmöglichkeiten

- Zwei Klauseln können mehr als eine Resolvente haben
  z.B.: $\{A, B\}$ und $\{\neg A, \neg B\}$
- $\{A, B, C\}$ und $\{\neg A, \neg B, D\}$ haben NICHT $\{C, D\}$ als Resolvente

Heuristik: Immer möglichst kleine Klauseln ableiten

Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge

$$E = \{P_1 \lor \neg P_2, \neg P_1 \lor P_2, \neg P_1 \lor \neg P_2, P_1 \lor P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Es gibt folgende Resolutionsmöglichkeiten (ohne Mengenschreibweise)

$$\frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_2 \vee \neg P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_1 \vee P_1}$$

$$\frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_2 \vee P_2} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2}$$

Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Es gibt folgende Resolutionsmöglichkeiten (ohne Mengenschreibweise)

$$\frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_2 \vee \neg P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_1 \vee P_1}$$

$$\frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_2 \vee P_2} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2}$$

Auf diese Weise ist $\perp$ nicht herleitbar

Ohne Mengenschreibweise

Resolutionsregel:

$$\frac{C_1 \vee P \qquad \neg P \vee C_2}{C_1 \vee C_2}$$

Faktorisieren:

$$\frac{C \vee L \vee L}{C \vee L}$$

Resolution mit Faktorisierung

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Es gibt folgende Resolutionsmöglichkeiten (mit Faktorisieren)

$$\frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_2 \vee \neg P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_1 \vee P_1}$$

$$\frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_2 \vee P_2} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2}$$

$$\frac{P_1 \vee P_1}{P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_1}{\neg P_1} \quad \frac{P_2 \vee P_2}{P_2} \quad \frac{\neg P_2 \vee \neg P_2}{\neg P_2}$$

$$\frac{P_1 \quad \neg P_1}{\perp}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\} \quad \{\neg P_1\}}{\perp}$$

Insgesamt: $M \vdash_{\mathrm{Res}} \perp$

also: M unerfüllbar

Resolution

Ziele:

- Formalisieren, was $M \vdash_{\mathsf{Res}} \perp$ bedeutet
- Zeigen, dass $M \vdash_{\mathsf{Res}} \perp$ gdw. M unerfüllbar.

Resolution

Sei F eine Klauselmenge und

$$\text{Res}(F) = F \cup \{R \mid R \text{ ist eine Resolvente zweier Klauseln aus } F\}$$

Resolution

Sei F eine Klauselmenge und

$$\mathrm{Res}(F) = F \cup \{R \mid R \text{ ist eine Resolvente zweier Klauseln aus } F\}$$

$\mathrm{Res}^0(F) = F$

$\mathrm{Res}^{n+1}(F) = \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^n(F))$

$\mathrm{Res}^\star(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Res}^n(F)$

(bezeichnet die Vereinigung der Resolventen aus aller möglichen Resolutionsschritte auf F)

Resolution

Sei F eine Klauselmenge und

$$\mathrm{Res}(F) = F \cup \{R \mid R \text{ ist eine Resolvente zweier Klauseln aus } F\}$$

$\mathrm{Res}^0(F) = F$

$\mathrm{Res}^{n+1}(F) = \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^n(F))$

$\mathrm{Res}^\star(F) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Res}^n(F)$

(bezeichnet die Vereinigung der Resolventen aus aller möglichen Resolutionsschritte auf F)

Notation: Falls $C \in \mathrm{Res}^\star(F)$, so schreiben wir $F \vdash_{\mathrm{Res}} C$.

Resolution

Sei F eine Klauselmenge und

$$\text{Res}(F) = F \cup \{R \mid R \text{ ist eine Resolvente zweier Klauseln aus } F\}$$

$\text{Res}^0(F) = F$

$\text{Res}^{n+1}(F) = \text{Res}(\text{Res}^n(F))$

$\text{Res}^\star(F) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \text{Res}^n(F)$

(bezeichnet die Vereinigung der Resolventen aus aller möglichen Resolutionsschritte auf F)

Notation: Falls $C \in \text{Res}^\star(F)$, so schreiben wir $F \vdash_{\text{Res}} C$.

Definition: Beweis für C (aus F): $C_1, \ldots C_n$, wobei:
$C_n = C$ und für alle $1 \leq i \leq n$: ($C_i \in F$ oder C_i Resolvente für $\frac{C_{j_1} \quad C_{j_2}}{C_i}$ mit $j_1, j_2 < i$).

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

(1)	$\{\neg P, Q\}$	gegeben
(2)	$\{\neg Q, R\}$	gegeben
(3)	$\{P\}$	gegeben
(4)	$\{\neg R\}$	gegeben
(5)	$\{Q\}$	aus (1) und (3)
(6)	$\{R\}$	aus (2) und (5)

Beweis für $\{R\}$ aus M

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

(1)	$\{\neg P, Q\}$	gegeben
(2)	$\{\neg Q, R\}$	gegeben
(3)	$\{P\}$	gegeben
(4)	$\{\neg R\}$	gegeben
(5)	$\{Q\}$	aus (1) und (3)
(6)	$\{R\}$	aus (2) und (5)
(7)	$\perp$	aus (4) und (6)

Beweis für $\perp$ aus M (Widerspruch)

Resolution: Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem (Korrektheit)
Für eine Menge M von Klauseln gilt: Falls $M \vdash_{\mathsf{Res}} \bot$, so M unerfüllbar.

Theorem (Vollständigkeit)
Für eine Menge M von Klauseln gilt: Falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\mathsf{Res}} \bot$.

Resolution: Korrektheit

Theorem (Korrektheit)
Für eine Menge M von Klauseln gilt: Falls $M \vdash_{\text{Res}} \perp$, so M unerfüllbar.

Beweis: Wir werden zeigen, dass falls $C \in \text{Res}^*(M)$, so $M \equiv M \cup \{C\}$.

(Theorem auf Seite 61). (NB: $M \cup \{C\}$ Notation für $M \wedge C$.)

Dann, falls $M \vdash_{\text{Res}} \perp$, so $\perp \in \text{Res}^*(M)$, d.h. $M \equiv M \cup \{\perp\}$.
Aber $M \cup \{\perp\}$ ist unerfüllbar, deshalb ist auch M unerfüllbar.

Erklärung 1: Falls $M = \{C_1, \dots, C_n\}$ so $M \cup \{\perp\}$ ist eine Notation für $C_1 \wedge \dots \wedge C_n \wedge \perp$. Aber $C_1 \wedge \dots \wedge C_n \wedge \perp \equiv \perp$, so ist $C_1 \wedge \dots \wedge C_n \wedge \perp$ unerfüllbar (also auch $M \cup \{\perp\}$). Da $M \equiv M \cup \{\perp\}$, ist auch M unerfüllbar.

Erklärung 2: Es gibt keine Wertebelegung $\mathcal{A}$ die alle Klauseln in $M \cup \{\perp\}$ wahr macht (d.h. so dass: $\mathcal{A}(D) = 1$ für alle Klauseln D in M und $\mathcal{A}(\perp) = 1$).

Resolution: Korrektheit

Lemma: $C_1 \vee P, C_2 \vee \neg P \models C_1 \vee C_2$

Beweis:

Sei $\mathcal{A}$ Interpretation mit $\mathcal{A}(C_1 \vee P) = 1$ und $\mathcal{A}(C_2 \vee \neg P) = 1$.

Zu zeigen: $\mathcal{A}(C_1 \vee C_2) = 1$.

Fall 1: $\mathcal{A}(C_1) = 1$. Dann $\mathcal{A}(C_1 \vee C_2) = 1$.

Fall 2: $\mathcal{A}(C_1) = 0$. Dann $\mathcal{A}(P) = 1$.
Da $\mathcal{A}(C_2 \vee \neg P) = 1$, so $\mathcal{A}(C_2) = 1$, d.h. $\mathcal{A}(C_1 \vee C_2) = 1$.

Resolution: Korrektheit

Theorem: Falls $C \in \text{Res}^\star(F)$, so $F \equiv F \cup \{C\}$.

Beweis: Annahme: $C \in \text{Res}^n(F)$.

Zu zeigen: $F \equiv F \wedge C$, i.e.:

Für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0,1\}$ gilt: $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. $(\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(C) = 1)$.

Resolution: Korrektheit

Theorem: Falls $C \in \text{Res}^\star(F)$, so $F \equiv F \cup \{C\}$.

Beweis: Annahme: $C \in \text{Res}^n(F)$.

Zu zeigen: $F \equiv F \wedge C$, i.e.:

Für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ gilt: $\mathcal{A}(F) = 1$ gdw. $(\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(C) = 1)$.

- Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$.
  Induktion: Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: Falls $D \in \text{Res}^m(F)$, so $\mathcal{A}(D) = 1$.
  (folgt aus: $C_1 \vee P, C_2 \vee \neg P \models C_1 \vee C_2$)

  Dann $\mathcal{A}(C) = 1$, so $(\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(C) = 1)$, d.h. $\mathcal{A}(F \wedge C) = 1$.

- Sei $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(F \wedge C) = 1$.
  Dann $\mathcal{A}(F) = 1$ und $\mathcal{A}(C) = 1$, so $\mathcal{A}(F) = 1$.

Resolution: Vollständigkeit

Theorem.
Für jede endliche Menge M von Klauseln gilt:
falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\mathsf{Res}} \perp$.

Beweis: Induktion:

$p(n)$: Sei M Menge von Klauseln mit n Aussagenvariablen.
Falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\mathsf{Res}} \perp$