

Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 6

28.05.2012

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Organisatorisches

Hauptklausur:

- Montag, 22.07.2013, 14:30-16:30, Raum D 028
- Anmeldung: Details via E-Mail

Bis jetzt

- Normalformen: CNF/DNF
- Subsumption
- SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)
 - SAT; k -SAT; 3-SAT vs. SAT
 - 2-SAT: heute
 - Horn-Formeln (Erfüllbarkeitstest)
- Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Resolutionskalkül

Definition: **Resolutionsregel** (einzige Regel des Kalküls)

$$\frac{C_1 \cup \{P\} \quad \{\neg P\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$$

wobei

- P eine aussagenlogische Variable
- C_1, C_2 Klauseln (können leer sein)

Definition:

$C_1 \cup C_2$ heißt **Resolvente** von $C_1 \cup \{P\}, C_2 \cup \{\neg P\}$

Resolution

Ziele:

- Formalisieren, was $M \vdash_{\text{Res}} C$ bedeutet

- Zeigen, dass $M \vdash_{\text{Res}} \perp$ gdw. M unerfüllbar.

Korrektheit: Falls $M \vdash_{\text{Res}} \perp$, so M unerfüllbar.

Vollständigkeit: Falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\text{Res}} \perp$

- Zeigen, dass das Verfahren terminiert.

Resolution

Ziele:

- Formalisieren, was $M \vdash_{\text{Res}} C$ bedeutet

- Zeigen, dass $M \vdash_{\text{Res}} \perp$ gdw. M unerfüllbar.

Korrektheit: Falls $M \vdash_{\text{Res}} \perp$, so M unerfüllbar.

Vollständigkeit: Falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\text{Res}} \perp$

- Zeigen, dass das Verfahren terminiert.

Resolution

Sei F eine Klauselmengende und

$$\text{Res}(F) = F \cup \{R \mid R \text{ ist eine Resolvente zweier Klauseln aus } F\}$$

$$\text{Res}^0(F) = F$$

$$\text{Res}^{n+1}(F) = \text{Res}(\text{Res}^n(F))$$

$$\text{Res}^*(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Res}^n(F)$$

(bezeichnet die Vereinigung der Resolventen aus aller möglichen Resolutionsschritten auf F)

Notation: Falls $C \in \text{Res}^*(F)$, so schreiben wir $F \vdash_{\text{Res}} C$.

Definition: Beweis für C (aus F): C_1, \dots, C_n , wobei:

$C_n = C$ und für alle $1 \leq i \leq n$: ($C_i \in F$ oder C_i Resolvente für $\frac{C_{j_1} C_{j_2}}{C_i}$ mit $j_1, j_2 < i$).

Resolution

Ziele:

- Formalisieren, was $M \vdash_{\text{Res}} C$ bedeutet

- Zeigen, dass $M \vdash_{\text{Res}} \perp$ gdw. M unerfüllbar.

Korrektheit: Falls $M \vdash_{\text{Res}} \perp$, so M unerfüllbar.

Vollständigkeit: Falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\text{Res}} \perp$

- Zeigen, dass das Verfahren terminiert.

Resolution: Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem (Korrektheit)

Für eine Menge M von Klauseln gilt: Falls $M \vdash_{\text{Res}} \perp$, so M unerfüllbar.

letzte Vorlesung

Resolution: Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem (Korrektheit)

Für eine Menge M von Klauseln gilt: Falls $M \vdash_{\text{Res}} \perp$, so M unerfüllbar.

letzte Vorlesung

Theorem (Vollständigkeit)

Für eine Menge M von Klauseln gilt: Falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\text{Res}} \perp$.

heute

Resolution: Vollständigkeit

Theorem.

Für jede endliche Menge M von Klauseln gilt:
falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\text{Res}} \perp$.

Beweis: Induktion:

$p(n)$: Sei M Menge von Klauseln mit n Aussagenvariablen.
Falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\text{Res}} \perp$

Resolution: Vollständigkeit

Theorem.

Für jede endliche Menge M von Klauseln gilt:
falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\text{Res}} \perp$.

Beweis: Induktion:

$p(n)$: Sei M Menge von Klauseln mit n Aussagenvariablen.

Falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\text{Res}} \perp$

Induktionsbasis: $n = 0$.

Dann $M = \{\perp\}$, d.h. $M \vdash_{\text{Res}} \perp$

Resolution: Vollständigkeit

Theorem.

Für jede endliche Menge M von Klauseln gilt:
falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\text{Res}} \perp$.

Beweis: Induktion:

$p(n)$: Sei M Menge von Klauseln mit n Aussagenvariablen.
Falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\text{Res}} \perp$

Induktionsbasis: $n = 0$. Dann $M = \{\perp\}$, d.h. $M \vdash_{\text{Res}} \perp$

Induktionsvoraussetzung: $p(n)$ gilt.

Induktionsschritt: Beweise, dass $p(n + 1)$ gilt.

Sei M Menge von Klauseln mit Aussagenvariablen $\{P_1, \dots, P_n, P_{n+1}\}$.

M_0 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch \perp

M_1 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch \top

Resolution: Vollständigkeit

M_0 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch \perp :

- P_{n+1} wird aus allen Klauseln gelöscht,
- Klauseln, die $\neg P_{n+1}$ enthalten werden ebenfalls gelöscht

M_1 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch \top :

- $\neg P_{n+1}$ wird aus allen Klauseln gelöscht,
- Klauseln, die P_{n+1} enthalten werden ebenfalls gelöscht

Fakten:

- M_0, M_1 enthalten nur Aussagenvariablen $\{P_1, \dots, P_n\}$
- M_0, M_1 unerfüllbar

Resolution: Vollständigkeit

M_0 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch \perp :

- P_{n+1} wird aus allen Klauseln gelöscht,
- Klauseln, die $\neg P_{n+1}$ enthalten werden ebenfalls gelöscht

M_1 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch \top :

- $\neg P_{n+1}$ wird aus allen Klauseln gelöscht,
- Klauseln, die P_{n+1} enthalten werden ebenfalls gelöscht

Fakten:

- M_0, M_1 enthalten nur Aussagenvariablen $\{P_1, \dots, P_n\}$
- M_0, M_1 unerfüllbar

Induktionsvoraussetzung:

$M_0 \vdash_{\text{Res}} \perp$, i.e. es gibt C_1, C_2, \dots, C_m Beweis (aus M_0) für \perp

$M_1 \vdash_{\text{Res}} \perp$, i.e. es gibt D_1, D_2, \dots, D_k Beweis (aus M_1) für \perp

Resolution: Vollständigkeit

M_0 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch \perp :

- P_{n+1} wird aus allen Klauseln gelöscht,
- Klauseln, die $\neg P_{n+1}$ enthalten werden ebenfalls gelöscht

M_1 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch \top :

- $\neg P_{n+1}$ wird aus allen Klauseln gelöscht,
- Klauseln, die P_{n+1} enthalten werden ebenfalls gelöscht

Fakten:

- M_0, M_1 enthalten nur Aussagenvariablen $\{P_1, \dots, P_n\}$
- M_0, M_1 unerfüllbar

Induktionsvoraussetzung:

$M_0 \vdash_{\text{Res}} \perp$, i.e. es gibt C_1, C_2, \dots, C_m Beweis (aus M_0) für \perp

P_{n+1} zurück: C'_1, C'_2, \dots, C'_m Beweis (aus M) für \perp oder P_{n+1}

$M_1 \vdash_{\text{Res}} \perp$, i.e. es gibt D_1, D_2, \dots, D_k Beweis (aus M_1) für \perp

$\neg P_{n+1}$ zurück: D'_1, D'_2, \dots, D'_k Beweis (aus M) für \perp oder $\neg P_{n+1}$

Resolution: Vollständigkeit

M_0 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch \perp :

- P_{n+1} wird aus allen Klauseln gelöscht,
- Klauseln, die $\neg P_{n+1}$ enthalten werden ebenfalls gelöscht

M_1 sei aus M entstanden durch Ersetzung von P_{n+1} durch \top :

- $\neg P_{n+1}$ wird aus allen Klauseln gelöscht,
- Klauseln, die P_{n+1} enthalten werden ebenfalls gelöscht

Fakten:

- M_0, M_1 enthalten nur Aussagenvariablen $\{P_1, \dots, P_n\}$
- M_0, M_1 unerfüllbar

Induktionsvoraussetzung:

$M_0 \vdash_{\text{Res}} \perp$, i.e. es gibt C_1, C_2, \dots, C_m Beweis (aus M_0) für \perp

P_{n+1} zurück: C'_1, C'_2, \dots, C'_m Beweis (aus M) für \perp oder P_{n+1}

$M_1 \vdash_{\text{Res}} \perp$, i.e. es gibt D_1, D_2, \dots, D_k Beweis (aus M_1) für \perp

$\neg P_{n+1}$ zurück: D'_1, D'_2, \dots, D'_k Beweis (aus M) für \perp oder $\neg P_{n+1}$

} $\Rightarrow M \vdash_{\text{Res}} \perp$

Resolution: Vollständigkeit

Theorem.

Für jede **endliche** Menge M von Klauseln gilt:
falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\text{Res}} \perp$.

Es gilt auch:

Theorem.

Für jede Menge M von Klauseln gilt:
falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\text{Res}} \perp$.

Terminierung

Theorem.

Aussagenlogische Resolution (für Klauselmengen in Mengennotation) terminiert, für jede endliche Menge von Klauseln.

Terminierung

Theorem.

Aussagenlogische Resolution (für Klauselmengen in Mengennotation) terminiert, für jede endliche Menge von Klauseln.

Beweis: Es gibt nicht mehr als 2^{2n} Klauseln (in Mengennotation) mit n Aussagenvariablen.

↳ nicht mehr als $(2^{2n})^2$ mögliche Anwendungen der Resolutionsregel.

2-SAT

Theorem

Erfüllbarkeit für Formeln in 2-KNF (2SAT) ist polynomiell entscheidbar

Beweis (Krom, 1967)

Fall 1: Für jede Aussagenvariable P , entweder enthalten alle Klauseln P oder $\neg P$: erfüllbar.

Fall 2: Es gibt Klauseln $C_1 = L_1 \vee P$, $C_2 = L_2 \vee \neg P$

Resolutionschritt; Resolvente $L_1 \vee L_2$ (Mengennotation)

Fakt: Resolventen sind immer auch in 2-KNF.

Wenn F n Aussagenvariablen enthält, gibt es $2n$ mögliche Literale, und $\leq 4n^2$ nicht-leere verschiedene 2-KNF Klauseln.

F ist erfüllbar gdw. $\perp \notin \text{Res}^*(F)$

Wenn wir $\text{Res}^*(F)$ berechnen: nicht mehr als $(4n^2)^2$ Resolutionsschritte notwendig.

\mapsto Erfüllbarkeit von F ist polynomiell entscheidbar.

1-Resolution

Die **1-Resolution** (unit resolution) benutzt dieselbe Notation wie im Resolutionskalkül. Die 1-Resolutionsregel ist ein Spezialfall der allgemeinen Resolutionsregel:

$$\frac{\{P\} \quad \{\neg P\} \cup C}{C} \qquad \frac{\{\neg P\} \quad \{P\} \cup C}{C}$$

Der 1-Resolutionskalkül ist nicht vollständig.

Die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

ist nicht erfüllbar, aber mit 1-Resolution ist aus M nichts ableitbar, also auch nicht \perp .

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit
(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

Resolution

bis jetzt

2. Formelmengen

Semantische Tableaux

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit
(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

Resolution

2. Formelmengen

Semantische Tableaux

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Beweis durch Fallunterscheidung
- Top-down-Analyse der gegebenen Formeln

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Nachteile

- Mehr als eine Regel

Formeltypen

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg F$
- $F \wedge G$
- $\neg(F \vee G)$
- $\neg(F \rightarrow G)$

Formeltypen

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg F$
- $F \wedge G$
- $\neg(F \vee G)$
- $\neg(F \rightarrow G)$

Disjunktive Formeln: Typ β

- $\neg(F \wedge G)$
- $F \vee G$
- $F \rightarrow G$

Formeltypen

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg F$
- $F \wedge G$
- $\neg(F \vee G)$
- $\neg(F \rightarrow G)$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$F \wedge G$	F	G
$\neg(F \vee G)$	$\neg F$	$\neg G$
$\neg(F \rightarrow G)$	F	$\neg G$
$\neg\neg F$	F	

Formeltypen

Disjunktive Formeln: Typ β

- $\neg(F \wedge G)$
- $F \vee G$
- $F \rightarrow G$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

β	β_1	β_2
$\neg(F \wedge G)$	$\neg F$	$\neg G$
$F \vee G$	F	G
$F \rightarrow G$	$\neg F$	G

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaunkalküls

α

α_1

α_2

Regeln des (aussagenlogischen) Tableauealküls

α			$p \wedge q$
<hr/>			
α_1	Konjunktiv		p
α_2			q

Regeln des (aussagenlogischen) Tableauealküls

α			$p \wedge q$
<hr/>			
α_1	Konjunktiv		p
α_2			q
			$p \vee q$
β			/ \
<hr/>	Disjunktiv		p q
β_1 β_2			

Regeln des (aussagenlogischen) Tableauealküls

α			$p \wedge q$
<hr/>			
α_1	Konjunktiv		p
α_2			q
			$p \vee q$
β			/ \
<hr/>	Disjunktiv		p q
β_1 β_2			
			ϕ
ϕ			$\neg\phi$
$\neg\phi$	Widerspruch		
<hr/>			\perp
\perp			

Instanzen der α und β -Regel

Instanzen der α -Regel

$$\frac{P \wedge Q}{P}$$
$$Q$$

$$\frac{\neg(P \vee Q)}{\neg P}$$
$$\neg Q$$

$$\frac{\neg(P \rightarrow Q)}{P}$$
$$\neg Q$$

$$\frac{\neg\neg P}{P}$$

Instanzen der α und β -Regel

Instanzen der α -Regel

$$\frac{P \wedge Q}{P}$$

$$Q$$

$$\frac{\neg(P \vee Q)}{\neg P}$$

$$\neg Q$$

$$\frac{\neg(P \rightarrow Q)}{P}$$

$$\neg Q$$

$$\frac{\neg\neg P}{P}$$

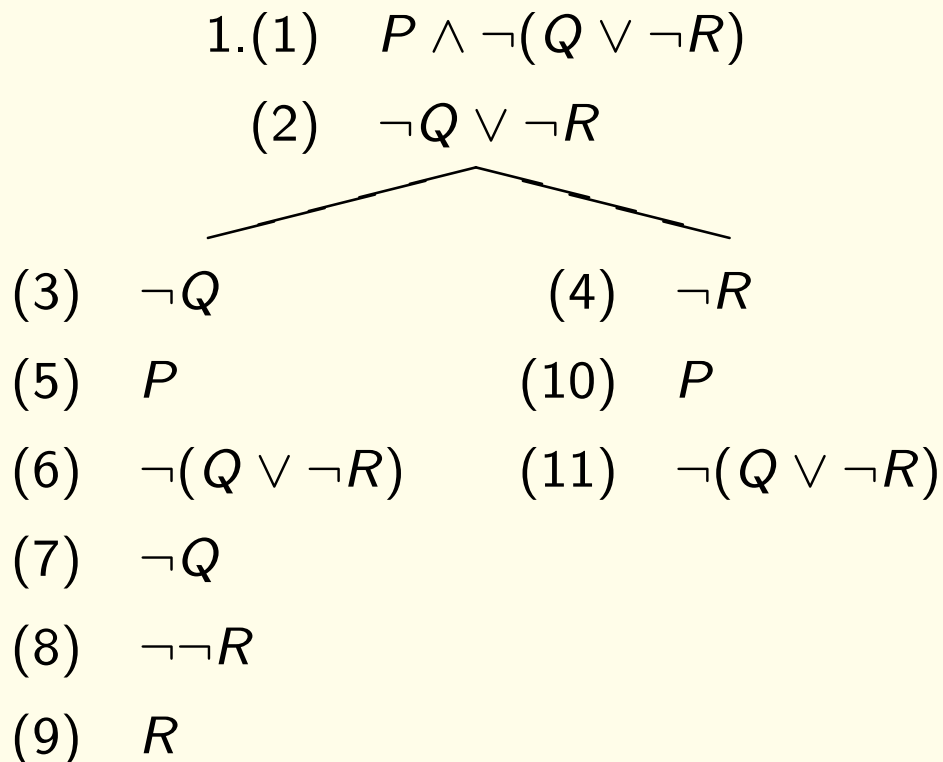
Instanzen der β -Regel

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q}$$

$$\frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q}$$

$$\frac{P \rightarrow Q}{\neg P \mid Q}$$

Ein Tableau für $\{P \wedge \neg(Q \vee \neg R), \neg Q \vee \neg R\}$



Dieses Tableau ist nicht
“maximal”, aber der erste
“Ast” ist.

Dieser Ast ist nicht
“geschlossen” (enthält
keinen Widerspruch),
also ist die Menge $\{1, 2\}$
erfüllbar.

(Diese Begriffe werden auf
den nächsten Seiten
erklärt.)

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:
Auswahl der nächsten Formel, auf die eine Regel angewendet wird

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:
Auswahl der nächsten Formel, auf die eine Regel angewendet wird

Heuristik

- Nicht-verzweigende Regeln zuerst: α vor β

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:
Auswahl der nächsten Formel, auf die eine Regel angewendet wird

Heuristik

- Nicht-verzweigende Regeln zuerst: α vor β

Nota bene:

Dieselbe Formel kann mehrfach (auf verschiedenen Ästen) verwendet werden

Formale Definition des Kalküls

Definition

Tableau: Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

Formale Definition des Kalküls

Definition

Tableau: Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

Definition

Tableauast: Maximaler Pfad in einem Tableau (von Wurzel zu Blatt)

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M , die kein Literal ist

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmeng

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M , die kein Literal ist

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β)

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M , die kein Literal ist

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β)

Dann ist T' ein Tableau für M .

Formale Definition des Kalküls

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Formale Definition des Kalküls

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Definition.

Ast B eines Tableaus für M ist **geschlossen**, wenn es eine Formel F existiert, so dass B die Formeln F und $\neg F$ enthält.

Formale Definition des Kalküls

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Definition.

Ast B eines Tableaus für M ist **geschlossen**, wenn es eine Formel F existiert, so dass B die Formeln F und $\neg F$ enthält.

Definition.

Ein Tableau ist **geschlossen**, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist.

Formale Definition des Kalküls

Nota bene:

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Definition.

Ast B eines Tableaus für M ist **geschlossen**, wenn es eine Formel F existiert, so dass B die Formeln F und $\neg F$ enthält.

Definition.

Ein Tableau ist **geschlossen**, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist.

Definition.

Ein Tableau für M , das geschlossen ist, ist ein Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M

Beispiel

Zu zeigen:

$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))$ allgemeingültig

Beispiel

Zu zeigen:

$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))$ allgemeingültig

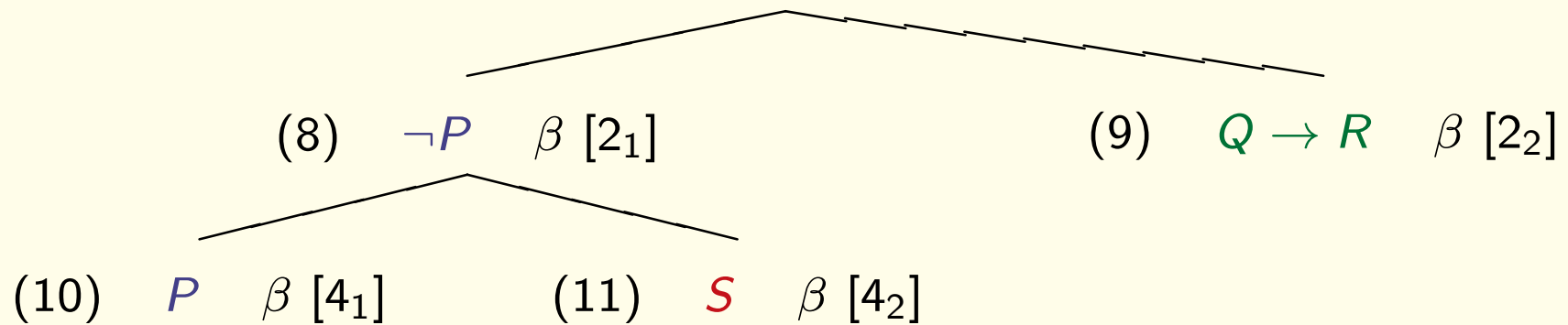
Wir zeigen, dass

$\neg[(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))]$

unerfüllbar ist.

Beispiel

- (1) $\neg[(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))]$
- (2) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ $\alpha [1_1]$
- (3) $\neg((P \vee S) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \vee S))$ $\alpha [1_2]$
- (4) $P \vee S$ $\alpha [3_1]$
- (5) $\neg((Q \rightarrow R) \vee S)$ $\alpha [3_2]$
- (6) $\neg(Q \rightarrow R)$ $\alpha [5_1]$
- (7) $\neg S$ $\alpha [5_2]$



geschlossenes Tableau.