Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 2

11.06.2013

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

heute ausnahmsweise...

Matthias Horbach

Universität Koblenz-Landau

e-mail: horbach@uni-koblenz.de

Feedback bitte!

Prädikatenlogik

Syntax

1. **Logische Symbole:**
   1.1: Wie in der Aussagenlogik: $\top, \bot; \neg; \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
   1.2: Quantoren: $\forall$, $\exists$.

2. **Nichtlogische Symbole:** Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$,
   2.1: Ω Menge von Funktionssymbolen. Notation: f/n: f hat Stelligkeit $n \geq 0$,
   2.2: Π Menge von Prädikatensymbolen. Notation: p/m: p hat Stelligkeit $m \geq 0$.
   (Das Gleichheitsprädikat $\approx$ kann (muss aber nicht) enthalten sein.)

   Funktionsssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstanten.

   Prädikatensymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Aussagenvariablen.

3. **Variablen:** X vorgegebene Menge von abzählbar unendlich vielen Symbolen, die wir für (die Bezeichnung von) Variablen verwenden.

Terme

Mit $T_\Sigma(X)$ bezeichnen wir die Menge der Σ-Terme.

Menge $T_\Sigma(X)$ der Σ-Terme:

Die kleinste Menge mit: $X \subseteq T_\Sigma(X)$

Wenn
- $f \in \Omega$,
- n ist die Stelligkeit von f
- $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)$

dann $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_\Sigma(X)$

Atome

Atome (Atomare Formeln) über Σ genügen dieser Syntax:

$$\begin{array}{rcll} A, B & ::= & p(s_1, \ldots, s_m) & , \; p/m \in \Pi \\ \Big[& | & (s \approx t) & \text{(Gleichung)} \quad \Big] \end{array}$$

Ist $m = 0$, so handelt es sich bei p um eine Aussagenvariable.

Formeln

Menge For_Σ der Formeln über Σ:

Die kleinste Menge, die

- Alle atomaren Formeln enthält,
- $\top \in \mathrm{For}_\Sigma$, $\bot \in \mathrm{For}_\Sigma$,
- Wenn $F, G \in \mathrm{For}_\Sigma$, dann auch
  $\neg F, F \wedge G, F \vee G, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G \in \mathrm{For}_\Sigma$,
- Wenn $F \in \mathrm{For}_\Sigma$ und $x \in X$, dann
  $\forall x F \in \mathrm{For}_\Sigma, \exists x F \in \mathrm{For}_\Sigma$

Formalisierung in Prädikatenlogik

Universelle Quantifizierung:

Faustregel: $\rightarrow$ ist der logische (Top-level-)Operator mit $\forall$

Häufiger Fehler: Verwendung von $\wedge$ mit $\forall$

Formalisierung in Prädikatenlogik

Universelle Quantifizierung:

Faustregel: $\rightarrow$ ist der logische (Top-level-)Operator mit $\forall$

Häufiger Fehler: Verwendung von $\wedge$ mit $\forall$

Beispiel

“Alle, die in Koblenz studieren, sind schlau.”

Richtig: $\forall x(\mathit{studiertIn}(x, \mathit{koblenz}) \rightarrow \mathit{schlau}(x))$

Falsch: $\forall x(\mathit{studiertIn}(x, \mathit{koblenz}) \wedge \mathit{schlau}(x))$

“Alle studieren in Koblenz und sind schlau.”

Formalisierung in Prädikatenlogik

Existenzielle Quantifizierung

Faustregel: $\wedge$ ist der logische (Top-level-)Operator mit $\exists$

Häufiger Fehler: Verwendung von $\rightarrow$ mit $\exists$

Formalisierung in Prädikatenlogik

Existenzielle Quantifizierung

Faustregel: $\wedge$ ist der logische (Top-level-)Operator mit $\exists$

Häufiger Fehler: Verwendung von $\rightarrow$ mit $\exists$

Beispiel

“Es gibt jemand, der in Landau studiert und schlau ist.”

Richtig: $\exists x(\mathit{studiertIn}(x, \mathit{landau}) \wedge \mathit{schlau}(x))$

Falsch: $\exists x(\mathit{studiertIn}(x, \mathit{landau}) \rightarrow \mathit{schlau}(x))$

“Es gibt jemanden, der, falls er/sie in Landau studiert, schlau ist.”
Trivial wahr, wenn es irgendjemanden gibt, der nicht in Landau studiert.

Gebundene und freie Variablen

In QxF, $Q \in \{\exists, \forall\}$, heißt F der Bindungsbereich des Quantors Qx. Ein Auftreten einer Variablen x heißt gebunden, wenn es zum Bindungsbereich eines Quantors Qx gehört. Alle anderen Auftreten von Variablen heißen frei.

Formeln ohne freie Variablen heißen Satzformeln oder Sätze.
Variablenfreie Formeln heißen Grundformeln.

Beispiel

$$\forall\, y \quad \overbrace{(\forall\, \overbrace{x \quad p(x)}^{\textit{Bind.}} \quad \rightarrow \quad q(x, y))}^{\textit{Bindungsbereich}}$$

Beispiel

$$p(z) \to \forall x \, (q(x, z) \land \exists z \, r(y, z))$$

- x gebunden
- y frei
- z frei und gebunden

Substitution eines Termes für eine Variable

Mit $F[s/x]$ bezeichnen wir das Resultat der Substitution aller freien Auftreten von x in F durch den Term s. $F[s/x]$ sei durch strukturelle Induktion über den Aufbau von F wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
x[s/x] &= s \\
x'[s/x] &= x' \ ; \quad \text{falls } x' \neq x \\
f(s_1, \ldots, s_n)[s/x] &= f(s_1[s/x], \ldots, s_n[s/x]) \\
\bot[s/x] &= \bot \\
\top[s/x] &= \top \\
p(s_1, \ldots, s_n)[s/x] &= p(s_1[s/x], \ldots, s_n[s/x]) \\
(u \approx v)[s/x] &= (u[s/x] \approx v[s/x]) \\
\neg F[s/x] &= \neg(F[s/x]) \\
(F \rho G)[s/x] &= (F[s/x] \rho G[s/x]) \ ; \quad \text{für alle binären Junktoren } \rho \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \\
(QyF)[s/x] &= Qz((F[z/y])[s/x]) \ ; \quad z \text{ neue Variable}
\end{aligned}
$$

Beispiel

Terme:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$x, y, z, u \in X$

$$g(f(x), g(f(x), z)) \quad [g(y, u)/x]$$
$$= g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), z))$$

Beispiel

Atome:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx/2\}$

$x, y, z, u \in X$

$$p(g(f(x), g(f(x), z)),\ y)\ \ [g(y, u)/x]$$

$$= p(g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), z)),\ y)$$

Beispiel

Formeln ohne Quantoren:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$x, y, z, u \in X$

$$p(g(f(x), g(f(x), z)),\ y) \quad \wedge \quad (g(x, y) \approx f(g(z, z))) \quad [g(y, u)/x]$$

$$= p(g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), z)), y) \quad \wedge \quad (g(g(y, u), y) \approx f(g(z, z)))$$

Formeln mit Quantoren: Problematik

$$(QyF)[s/x] = Qz((F[z/y])[s/x]) \; ; \quad z \text{ neue Variable}$$

Der Grund für die Umbenennung der gebundenen Variablen y in eine neue „unbenutzte“ Variable z ist die Vermeidung des Einfangens freier Variablen in s.

Sollte y in s auftreten, wären sonst diese Auftreten nach erfolgter Substitution gebunden.

Beispiel

Formeln mit Quantoren:

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx/2\}$

$$(\forall x(p(x, g(f(x), y))) \;\wedge\; \exists z(x \approx g(y, z)) \;) \quad [g(y, z)/x]$$

$$= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x] \;\wedge\; \exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x]$$

$$= \forall v(p(x, g(f(x), y))\,[v/x])[g(y, z)/x] \;\wedge\; \exists u(((x \approx g(y, z))[u/z])[g(y, z)/x])$$

$$= \forall v(p(v, g(f(v), y)))[g(y, z)/x] \;\wedge\; \exists u((x \approx g(y, u))[g(y, z)/x])$$

$$= \forall v(p(v, g(f(v), y))) \;\wedge\; \exists u(g(y, z) \approx g(y, u))$$

Substitution allgemein

Definition. Substitutionen sind Abbildungen

$$\sigma : X \to T_\Sigma(X),$$

so dass der Bereich von σ, d.h. die Menge

$$dom(\sigma) = \{x \in X \mid \sigma(x) \neq x\},$$

endlich ist. Die Menge der eingeführten Variablen, d.h. der Variablen die in einem der Terme $\sigma(x)$, für $x \in dom(\sigma)$, auftreten, wird mit $codom(\sigma)$ bezeichnet.

Substitutionen schreiben wir auch als $[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n]$, x_i pw. verschieden, und meinen dann die Abbildung

$$[s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n](y) = \begin{cases} s_i, & \text{falls } y = x_i \\ y, & \text{sonst} \end{cases}$$

Ab jetzt schreiben wir für die Applikation $\sigma(x)$ von Substitutionen $x\sigma$.

Anwendung einer Substitution

„Homomorphe“ Fortsetzung von σ auf Terme und Formeln:

$$
\begin{aligned}
f(s_1, \ldots, s_n)\sigma &= f(s_1\sigma, \ldots, s_n\sigma) \\
\bot\sigma &= \bot \\
\top\sigma &= \top \\
p(s_1, \ldots, s_n)\sigma &= p(s_1\sigma, \ldots, s_n\sigma) \\
(u \approx v)\sigma &= (u\sigma \approx v\sigma) \\
\neg F\sigma &= \neg(F\sigma) \\
(F\rho G)\sigma &= (F\sigma\rho G\sigma)\ ; \quad \text{für alle binären Junktoren } \rho \\
(QxF)\sigma &= Qz((F[z/x])\sigma); \text{ wobei } z \text{ „neue“ Variable}
\end{aligned}
$$

Abänderung einer Substitution σ an x zu t:

$$
\sigma[x \to t](y) = \begin{cases} t, & \text{falls } y = x \\ \sigma(y), & \text{sonst} \end{cases}
$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Terme

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$g(f(x), g(f(x), z)) \quad [g(y,u)/x, f(x)/y, a/z]$$
$$= g(f(g(y,u)), g(f(g(y,u)), a))$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Atome

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$p(g(f(x), g(f(x), z)),\ \ y) \ \ [g(y, u)/x, f(x)/y, a/z]$$
$$= p(g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), a)), f(x))$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln ohne Quantoren

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$p(g(f(x), g(f(x), z)), \ y) \ \wedge \ (g(x, y) \approx f(g(z, z))) \ \ [g(y, u)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= p(g(f(g(y, u)), g(f(g(y, u)), a)), f(x)) \ \wedge \ (g(g(y, u), f(x)) \approx f(g(a, a)))$$

Beispiel

Anwendung einer Substitution auf Formeln mit Quantoren

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$, mit $\Omega = \{f/1, g/2, a/0\}$, $\Pi = \{p/2, \approx /2\}$

$$(\forall x(p(x, g(f(x), y))) \wedge \exists z(x \approx g(y, z)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= \forall x(p(x, g(f(x), y)))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z] \;\wedge$$
$$\exists z(x \approx g(y, z))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]$$

$$= \forall v((p(x, g(f(x), y))[v/x])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z]) \;\wedge$$
$$\exists u(((x \approx g(y, z))[u/z])[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z])$$

$$= \forall v(p(v, g(f(v), f(x)))) \;\wedge\; \exists u((x \approx g(y, u))[g(y, z)/x, f(x)/y, a/z])$$

$$= \forall v(p(v, g(f(v), f(x)))) \;\wedge\; \exists u(g(y, z) \approx g(f(x), u))$$

Semantik

Semantik geben bedeutet für logische Systeme, einen Begriff von Wahrheit für Formeln zu definieren. Das hier für die Prädikatenlogik zu definierende Konzept geht auf Tarski zurück.

In der klassischen Logik (zurückgehend auf Aristoteles) gibt es „nur“ die zwei Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“, die wir mit 1 und 0 bezeichnen.

Strukturen

Definition.

Eine Σ-Struktur (bzw. Σ-Interpretation bzw. Σ-Modell) ist ein Tripel

$$\mathcal{A} = (U,\ (f_{\mathcal{A}} : U^n \to U)_{f/n \in \Omega},\ (p_{\mathcal{A}} \subseteq U^m)_{p/m \in \Pi})$$

wobei $U \neq \emptyset$ eine Menge, genannt Universum von $\mathcal{A}$.

Oft identifizieren wir U mit $\mathcal{A}$, wenn die Interpretation der Funktions- und Prädikatensymbole eindeutig aus dem Kontext hervorgeht.

Mit Σ-Str bezeichnen wir die Menge aller Σ-Strukturen.

Valuationen

Variablen für sich haben keine Bedeutung. Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) explizit oder implizit aus dem Kontext zur Verfügung stehen.

Definition.

Unter einer (Variablen-) Belegung oder einer Valuation (über einer Σ-Struktur $\mathcal{A}$) versteht man eine Abbildung

$$\beta : X \to U$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Induktive Definition:

$$\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x), \qquad x \in X$$

$$\mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \ldots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), \qquad f/n \in \Omega$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Induktive Definition:

$$\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x), \qquad x \in X$$

$$\mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \ldots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), \qquad f/n \in \Omega$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β, $\mathcal{A}(\beta)(t)$:

- Falls $t = x \in X$: $\mathcal{A}(\beta)(t) = \beta(x)$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Induktive Definition:

$$\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x), \qquad x \in X$$

$$\mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \dots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \dots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), \qquad f/n \in \Omega$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β, $\mathcal{A}(\beta)(t)$:

- Falls $t = x \in X$: $\mathcal{A}(\beta)(t) = \beta(x)$
- Falls $t = c$ eine Konstante: $\mathcal{A}(\beta)(t) = c_{\mathcal{A}}$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Induktive Definition:

$$\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x), \qquad x \in X$$

$$\mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \ldots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), \qquad f/n \in \Omega$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β, $\mathcal{A}(\beta)(t)$:

- Falls $t = x \in X$: $\mathcal{A}(\beta)(t) = \beta(x)$
- Falls $t = c$ eine Konstante: $\mathcal{A}(\beta)(t) = c_{\mathcal{A}}$
- Falls $t = f(t_1, \ldots, t_n)$:
  $\mathcal{A}(\beta)(t) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(t_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(t_n))$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Beispiel:

$\Sigma = (\{+/2, 0/0\}, \{\leq, \approx\})$

$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \{0_\mathcal{N}, +_\mathcal{N} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}, \{\leq_\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \approx_\mathcal{N}\})$

$0_\mathcal{N} = 0 \in \mathbb{N},$

$+_\mathcal{N} (n_1, n_1) = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$

$\beta : \{x, y, z\} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 5, \beta(y) = 10, \beta(z) = 3$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{N}(\beta)((x + (y + z)) + (z + 0)) = \\
&\quad = (\beta(x) +_\mathcal{N} (\beta(y) +_\mathcal{N} \beta(z))) +_\mathcal{N} (\beta(z) +_\mathcal{N} 0_\mathcal{N}) = \\
&\quad = (5 + (10 + 3)) + (3 + 0) = 21
\end{aligned}
$$