Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 3

17.06.2013

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Prädikatenlogik

Syntax

1. **Logische Symbole:**
   1.1: Wie in der Aussagenlogik: $\top, \bot; \neg; \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
   1.2: Quantoren: $\forall$, $\exists$.

2. **Nichtlogische Symbole:** Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$,
   2.1: Ω Menge von Funktionssymbolen. Notation: f/n: f hat Stelligkeit $n \geq 0$,
   2.2: Π Menge von Prädikatensymbolen. Notation: p/m: p hat Stelligkeit $m \geq 0$.
   (Das Gleichheitsprädikat $\approx$ kann (muss aber nicht) enthalten sein.)

   Funktionsssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstante

   Prädikatensymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Aussagenvariablen

3. **Variablen:** X vorgegebene Menge von abzählbar unendlich vielen Symbolen ist, die wir für (die Bezeichnung von) Variablen verwenden.

- Terme
- Formeln
- Substitutionen

Semantik

Strukturen

Eine Σ-Struktur (bzw. Σ-Interpretation bzw. Σ-Modell) ist ein Tripel

$$\mathcal{A} = (U,\ (f_{\mathcal{A}} : U^n \to U)_{f/n \in \Omega},\ (p_{\mathcal{A}} \subseteq U^m)_{p/m \in \Pi})$$

wobei $U \neq \emptyset$ eine Menge, genannt Universum von $\mathcal{A}$.

Oft identifizieren wir U mit $\mathcal{A}$, wenn die Interpretation der Funktions- und Prädikatensymbole eindeutig aus dem Kontext hervorgeht.

Mit Σ-Str bezeichnen wir die Menge aller Σ-Strukturen.

Valuationen:

Unter einer (Variablen-) Belegung oder einer Valuation (über einer Σ-Struktur $\mathcal{A}$) versteht man eine Abbildung

$$\beta : X \to U$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Induktive Definition:

$$\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x), \qquad x \in X$$

$$\mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \ldots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), \qquad f/n \in \Omega$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Induktive Definition:

$$\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x), \qquad x \in X$$

$$\mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \ldots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), \qquad f/n \in \Omega$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β, $\mathcal{A}(\beta)(t)$:

- Falls $t = x \in X$: $\mathcal{A}(\beta)(t) = \beta(x)$
- Falls $t = c$ eine Konstante: $\mathcal{A}(\beta)(t) = c_{\mathcal{A}}$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Induktive Definition:

$$\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x), \qquad x \in X$$

$$\mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \ldots, s_n)) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), \qquad f/n \in \Omega$$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β, $\mathcal{A}(\beta)(t)$:

- Falls $t = x \in X$: $\mathcal{A}(\beta)(t) = \beta(x)$
- Falls $t = c$ eine Konstante: $\mathcal{A}(\beta)(t) = c_{\mathcal{A}}$
- Falls $t = f(t_1, \ldots, t_n)$:
  $\mathcal{A}(\beta)(t) = f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(t_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(t_n))$

Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Beispiel:

$\Sigma = (\{+/2, 0/0\}, \{\leq, \approx\})$

$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \{0_\mathcal{N}, +_\mathcal{N} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}, \{\leq_\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \approx_\mathcal{N}\})$

$0_\mathcal{N} = 0 \in \mathbb{N}$,
$+_\mathcal{N}(n_1, n_1) = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$

$\beta : \{x, y, z\} \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 5, \beta(y) = 10, \beta(z) = 3$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{N}(\beta)((x + (y + z)) + (z + 0)) = \\
&\quad = (\beta(x) +_\mathcal{N} (\beta(y) +_\mathcal{N} \beta(z))) +_\mathcal{N} (\beta(z) +_\mathcal{N} 0_\mathcal{N}) = \\
&\quad = (5 + (10 + 3)) + (3 + 0) = 21
\end{aligned}
$$

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

Die Menge der Wahrheitswerte sei $\{0, 1\}$.

$\mathcal{A}(\beta) : \mathrm{For}_\Sigma \to \{0, 1\}$ wird induktiv über Aufbau von F wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}(\beta)(\bot) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(\top) = 1$$

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(p(s_1, \ldots, s_n)) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad (\mathcal{A}(\beta)(s_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)) \in p_{\mathcal{A}}$$

$$\mathcal{A}(\beta)(s \approx t) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(s) = \mathcal{A}(\beta)(t)$$

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\neg F) = 1 \quad \text{g.d.w.} \quad \mathcal{A}(\beta)(F) = 0$$

$$\mathcal{A}(\beta)(F \rho G) = B_\rho(\mathcal{A}(\beta)(F), \mathcal{A}(\beta)(G))$$

mit B_ρ die ρ zugeordnete Boolesche Funktion

Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \qquad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\qquad \Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ with equality $\approx$.

$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_\mathcal{A}, *_\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},$
$\qquad n_1 +_\mathcal{A} n_2 = n_1 + n_2$
$\qquad n_1 *_\mathcal{A} n_2 = n_1 \cdot n_2$

$\quad \mathrm{s}_\mathcal{A} : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$
$\qquad \mathrm{s}(n) = n + 1$
$\quad 0_\mathcal{A} = 0 \in \mathbb{N}\}$

$\{\leq, <_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ )$
$\quad (n_1, n_2) \in \leq_\mathcal{A}$ iff $n_1 \leq n_2$ in $\mathbb{N}$
$\quad (n_1, n_2) \in <_\mathcal{A}$ iff $n_1 < n_2$ in $\mathbb{N}$

$\text{gerade}_\mathcal{A}, \text{ungerade}_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}\}$
$\quad \text{gerade}_\mathcal{A} = \{0, 2, 4, \ldots, 2k \ldots\}$
$\quad \text{ungerade}_\mathcal{A} = \{1, 3, 5, \ldots, 2k + 1 \ldots\},$

$\beta : X \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$

(1) $\mathcal{A}(\beta)(\text{gerade}(x)) = 0$ Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(x) = \beta(x) = 1 \notin \text{gerade}_\mathcal{A}$

(2) $\mathcal{A}(\beta))(s(s(x) + s(0))\approx y) = 1$ Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(s(s(x) + s(0))) = s_\mathcal{A}(s_\mathcal{A}(\beta(x)) +_\mathcal{A} s_\mathcal{A}(0_\mathcal{A})$
$= ((1+1)+(0+1))+1=4$
$\mathcal{A}(\beta)(y) = 4$
und $4 = 4$

(3) $\mathcal{A}(\beta))(x \approx y) = 0$ Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(x) = 1; \quad \mathcal{A}(\beta)(y) = 4, \quad 1 \neq 4$

Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \qquad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ with equality $\approx$.

$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_\mathcal{A}, *_\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$

$n_1 +_\mathcal{A} n_2 = n_1 + n_2$

$n_1 *_\mathcal{A} n_2 = n_1 \cdot n_2$

$\text{s}_\mathcal{A} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$

$\text{s}(n) = n + 1$

$0_\mathcal{A} = 0 \in \mathbb{N}\}$

$\{\leq, <_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ \ )$

$(n_1, n_2) \in \leq_\mathcal{A}$ iff $n_1 \leq n_2$ in $\mathbb{N}$

$(n_1, n_2) \in <_\mathcal{A}$ iff $n_1 < n_2$ in $\mathbb{N}$

$\text{gerade}_\mathcal{A}, \text{ungerade}_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}\}$

$\text{gerade}_\mathcal{A} = \{0, 2, 4, \ldots, 2k \ldots\}$

$\text{ungerade}_\mathcal{A} = \{1, 3, 5, \ldots, 2k + 1 \ldots\},$

$\beta : X \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$

(4) $\mathcal{A}(\beta)(\neg\text{gerade}(x)) = \neg_b \mathcal{A}(\beta)(\text{gerade}(x)) = \neg_b 0 = 1$

(5) $\mathcal{A}(\beta)(x \leq s(0) \vee \text{gerade}(x)) = \mathcal{A}(\beta)(x \leq s(0)) \vee_b \mathcal{A}(\beta)(\text{gerade}(x)) = 1 \vee_b 0 = 1$

Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(x \leq s(0)) = 1 : \mathcal{A}(\beta)(x) = 1, \mathcal{A}(s(0)) = s_\mathcal{A}(0_\mathcal{A}) = 0+1=1$, und $(1, 1) \in \leq_\mathcal{A}$

(6) $\mathcal{A}(\beta)(y \leq s(0) \rightarrow \text{ungerade}(y)) = \mathcal{A}(\beta)(y \leq s(0)) \rightarrow_b \mathcal{A}(\beta)(\text{ungerade}(y)) = 0 \rightarrow_b 0 = 1$

Erklärung: $\mathcal{A}(\beta)(y \leq s(0)) = 0$, da $\beta(y) = 4$, $\beta(s(0)) = 1$ und $(4, 1) \not\in \leq_\mathcal{A}$;
$\mathcal{A}(\beta)(\text{ungerade}(y)) = 0$ da $\beta(y) = 4 \not\in \text{ungerade}_\mathcal{A}$.

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\forall x F) = \min_{a \in U}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F)\} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für alle } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(\beta)(\exists x F) = \max_{a \in U}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F)\} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für mindestens} \\ & \qquad \text{ein } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $x \in X$ und $a \in U$ bezeichne $\beta[x \mapsto a] : X \to U$ die Belegung, mit

$$\beta[x \mapsto a](y) := \begin{cases} a & \text{falls } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β

$$\mathcal{A}(\beta)(\forall x F) = \min_{a \in U}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F)\} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für alle } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(\beta)(\exists x F) = \max_{a \in U}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F)\} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für mindestens} \\ & \hfill \text{ein } a \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $x \in X$ und $a \in U$ bezeichne $\beta[x \mapsto a] : X \to U$ die Belegung, mit

$$\beta[x \mapsto a](y) := \begin{cases} a & \text{falls } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Intuition: $\forall$: verallgemeinerte Konjunktion ($\wedge_b$ ist minimum auf $\{0,1\}$)

$\exists$: verallgemeinerte Disjunktion ($\vee_b$ ist maximum auf $\{0,1\}$)

Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \quad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ with equality $\approx$.

$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_\mathcal{A}, *_\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},$

$n_1 +_\mathcal{A} n_2 = n_1 + n_2$

$n_1 *_\mathcal{A} n_2 = n_1 \cdot n_2$

$s_\mathcal{A} : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$

$s(n) = n + 1$

$0_\mathcal{A} = 0 \in \mathbb{N}\}$

$\{\leq, <_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ )$

$(n_1, n_2) \in \leq_\mathcal{A}$ iff $n_1 \leq n_2$ in $\mathbb{N}$

$(n_1, n_2) \in <_\mathcal{A}$ iff $n_1 < n_2$ in $\mathbb{N}$

$\text{gerade}_\mathcal{A}, \text{ungerade}_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}\}$

$\text{gerade}_\mathcal{A} = \{0, 2, 4, \dots, 2k \dots\}$

$\text{ungerade}_\mathcal{A} = \{1, 3, 5, \dots, 2k + 1 \dots\}$,

$\beta : X \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$

(7) $\mathcal{A}(\beta)(\forall x \text{gerade}(x)) = \min\limits_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 0$

Erklärung:

Falls $a = 2k$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \in \text{gerade}_\mathcal{A}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 1$.

Falls $a = 2k + 1$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \notin \text{gerade}_\mathcal{A}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 0$.

Es gibt $a \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 0$.

$\min\limits_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = \min\{1, 0\} = 0$

Beispiel

$\Sigma = (\Omega, \Pi), X \qquad \Omega = \{0/0, s/1, +/2, */2\}$

$\Pi = \{\leq /2, < /2, \text{gerade}/1, \text{ungerade}/1\}$ with equality $\approx$.

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{+_\mathcal{A}, *_\mathcal{A} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \qquad \{\leq, <_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \;\;)$$

$$n_1 +_\mathcal{A} n_2 = n_1 + n_2 \qquad (n_1, n_2) \in \leq_\mathcal{A} \text{ iff } n_1 \leq n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$n_1 *_\mathcal{A} n_2 = n_1 \cdot n_2 \qquad (n_1, n_2) \in <_\mathcal{A} \text{ iff } n_1 < n_2 \text{ in } \mathbb{N}$$

$$\mathrm{s}_\mathcal{A} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \qquad \text{gerade}_\mathcal{A}, \text{ungerade}_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}\}$$

$$\mathrm{s}(n) = n + 1 \qquad \text{gerade}_\mathcal{A} = \{0, 2, 4, \dots, 2k \dots\}$$

$$0_\mathcal{A} = 0 \in \mathbb{N}\} \qquad \text{ungerade}_\mathcal{A} = \{1, 3, 5, \dots, 2k + 1 \dots\},$$

$\beta : X \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$

(8) $\mathcal{A}(\beta)(\exists x \text{gerade}(x)) = \max\limits_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 1$

Erklärung:

Falls $a = 2k$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \in \text{gerade}_\mathcal{A}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 1$.

Falls $a = 2k + 1$ so $\beta[x \mapsto a](x) = a \notin \text{gerade}_\mathcal{A}$. Dann $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 0$.

Es gibt $a \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = 1$.

$$\max_{a \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a](\text{gerade}(x)) = \max\{1, 0\} = 1$$

Beispiel 2

$$U_{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$
$$0_{\mathbb{N}} = 0 \in U_{\mathbb{N}}$$
$$s_{\mathbb{N}} : U_{\mathbb{N}} \to U_{\mathbb{N}},\ s_{\mathbb{N}}(n) = n + 1$$
$$+_{\mathbb{N}} : U_{\mathbb{N}}^2 \to U_{\mathbb{N}},\ \ +_{\mathbb{N}} (n, m) = n + m$$
$$*_{\mathbb{N}} : U_{\mathbb{N}}^2 \to U_{\mathbb{N}},\ \ *_{\mathbb{N}} (n, m) = n * m$$
$$\leq_{\mathbb{N}} = \text{“kleiner-gleich”} \subseteq U_{\mathbb{N}}^2$$
$$<_{\mathbb{N}} = \text{“kleiner”} \subseteq U_{\mathbb{N}}^2$$

Mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 3$ ergibt sich beispielsweise:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N}(\beta)(s(x) + s(0)) &= 3 \\
\mathbb{N}(\beta)(x + y \approx s(y)) &= 1 \\
\mathbb{N}(\beta)(\forall x, y(x + y \approx y + x)) &= 1 \\
\mathbb{N}(\beta)(\forall z\ z \leq y) &= 0 \\
\mathbb{N}(\beta)(\forall x \exists y\ x < y) &= 1
\end{aligned}
$$

Beispiel 2

(1) $\mathbb{N}(\beta)(s(x) + s(0)) = s_\mathbb{N}(\beta(x)) +_\mathbb{N} s_\mathbb{N}(0_\mathbb{N}) = (1 + 1) + (0 + 1) = 3$

(2) $\mathbb{N}(\beta)(x + y \approx s(y)) = 1$

Erklärung:

$$\mathbb{N}(\beta)(x + y) = \beta(x) +_\mathbb{N} \beta(y) = 1 + 3 = 4$$
$$\mathbb{N}(\beta)(s(y)) = s_\mathbb{N}(\beta(y)) = 3 + 1 = 4.$$

(3)
$$\begin{aligned}
\mathbb{N}(\beta)(\forall x, y(x + y \approx y + x)) &= \min_{a\in\mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a])(\forall y(x + y \approx y + x)) \\
&= \min_{a\in\mathbb{N}} \min_{b\in\mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x + y \approx y + x) \\
&= \min_{a,b\in\mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x + y \approx y + x) \\
&= 1
\end{aligned}$$

da für alle $a, b \in \mathbb{N}$:

$\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x + y) = a + b = b + a = \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(y + x)$

Beispiel 2

(4) $\mathbb{N}(\beta)(\forall z\; z \leq y) = \min\limits_{a\in\mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(z \leq y) = 0$

Erklärung:

Falls $a = 4$, so $\mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(z \leq y) = 0$, da:

$\mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(z) = a = 4$
$\mathbb{N}(\beta[z \mapsto a])(y) = \beta(y) = 3$
und $(4, 3) \not\in \leq_{\mathbb{N}}$.

(5) $\mathbb{N}(\beta)(\forall x \exists y\; x < y) = \min\limits_{a\in\mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a])(\exists y\; x < y)$

$= \min\limits_{a\in\mathbb{N}} \max\limits_{b\in\mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x < y) = 1$

Erklärung:

Für jede Zahl $a \in \mathbb{N}$: $\max\limits_{b\in\mathbb{N}} \mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x < y) = 1$,

da es gibt $b = a + 1 \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x < y) = 1$
weil $\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(x) = a$
$\mathbb{N}(\beta[x \mapsto a, y \mapsto b])(y) = b = a + 1$ und $(a, a + 1) \in <_{\mathbb{N}}$.

Modelle, Gültigkeit, Erfüllbarkeit

Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Definition. F gilt in $\mathcal{A}$ unter β:

$$\mathcal{A}, \beta \models F \text{ g.d.w. } \mathcal{A}(\beta)(F) = 1$$

Definition. F gilt in $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ ist Modell von F):

$$\mathcal{A} \models F \text{ g.d.w. } \mathcal{A}, \beta \models F, \text{ für alle } \beta : X \to U_{\mathcal{A}}$$

Definition. F ist (allgemein-) gültig:

$$\models F \text{ g.d.w. } \mathcal{A} \models F, \text{ für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str}$$

Definition. F heißt erfüllbar gdw. es $\mathcal{A}$ und β gibt, so daß $\mathcal{A}, \beta \models F$.
Sonst heißt F unerfüllbar.

Beispiele

Sei $\mathcal{A}$ die Σ-Struktur auf Seite 11, und $\beta : X \to \mathbb{N}$ mit $\beta(x) = 1, \beta(y) = 4$.

(1) $\mathcal{A}, \beta \models \text{ungerade}(x)$

(2) $\mathcal{A}, \beta \models \text{gerade}(y)$.

(3) $\mathcal{A} \not\models \text{ungerade}(x)$,
da für $\beta' : X \to \mathbb{N}$ mit $\beta'(x) = 0$, $\mathcal{A}(\beta')(\text{ungerade}(x)) = 0$.

Beispiele

(4) $\mathcal{A} \models \mathsf{gerade}(x) \vee \mathsf{ungerade}(x)$

Erklärung: Für jede Valuation $\beta' : X \to \mathbb{N}$:

falls $\beta'(x) = 2k$, $\mathcal{A}(\beta')(\mathsf{gerade}(x)) = 1$
falls $\beta'(x) = 2k + 1$, $\mathcal{A}(\beta')(\mathsf{ungerade}(x)) = 1$

d.h. $\mathcal{A}(\beta')(\mathsf{gerade}(x) \vee \mathsf{ungerade}(x)) = 1$.

(5) $\not\models \mathsf{gerade}(x) \vee \mathsf{ungerade}(x)$

Erklärung: Sei $\mathcal{A}'$ Σ-Struktur mit $\mathsf{gerade}_{\mathcal{A}'} = \mathsf{ungerade}_{\mathcal{A}'} = \emptyset$.

Dann: $\mathcal{A}' \not\models \mathsf{gerade}(x) \vee \mathsf{ungerade}(x)$.

(6) $\models \mathsf{gerade}(x) \vee \neg\mathsf{gerade}(x)$

Erklärung: Set $\mathcal{A}'$ eine Σ-Struktur und β' eine Valuation.
falls $\beta'(x) \in \mathsf{gerade}_{\mathcal{A}'}$ so $\mathcal{A}'(\beta')(\mathsf{gerade}(x)) = 1$
falls $\beta'(x) \notin \mathsf{gerade}_{\mathcal{A}'}$ so $\mathcal{A}'(\beta')(\neg\mathsf{gerade}(x)) = 1$
d.h. $\mathcal{A}'(\beta')(\mathsf{gerade}(x) \vee \neg\mathsf{gerade}(x)) = 1$

Folgerung und Äquivalenz

Definition. F impliziert G (oder G folgt aus F), i.Z. $F \models G$
gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$ gilt:
Falls $\mathcal{A}, \beta \models F$, so $\mathcal{A}, \beta \models G$.

Definition. F und G sind äquivalent
gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$ gilt:
$\mathcal{A}, \beta \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{A}, \beta \models G$.

Erweiterung auf Formelmengen N in natürlicher Weise:

Definition. $N \models G$ gdw.
für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$:
falls $\mathcal{A}, \beta \models F$, für alle $F \in N$, so $\mathcal{A}, \beta \models G$.

Folgerung/Äquivalenz und Gültigkeit

Satz. $F \models G$ gdw. $(F \rightarrow G)$ ist gültig

Satz. F und G sind äquivalent gdw. $(F \leftrightarrow G)$ ist gültig.

Folgerung/Äquivalenz und Gültigkeit

Satz. $F \models G$ gdw. $(F \to G)$ ist gültig

Beweis

$$
\begin{aligned}
F \models G \quad & \text{gdw.} \quad \text{für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str und } \beta : X \to U_{\mathcal{A}}\text{: Falls } \mathcal{A}, \beta \models F, \text{ so } \mathcal{A}, \beta \models G. \\
& \text{gdw.} \quad \text{für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str und } \beta : X \to U_{\mathcal{A}}\text{: } \mathcal{A}(\beta)(F) \to_b \mathcal{A}(\beta)(G) = 1 \\
& \text{gdw.} \quad \text{für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str und } \beta : X \to U_{\mathcal{A}}\text{: } \mathcal{A}(\beta)(F \to G) = 1
\end{aligned}
$$

Satz. F und G sind äquivalent gdw. $(F \leftrightarrow G)$ ist gültig.

Folgerung/Äquivalenz und Gültigkeit

Satz. $F \models G$ gdw. $(F \rightarrow G)$ ist gültig

Beweis

$$
\begin{array}{lll}
F \models G & \text{gdw.} & \text{für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str und } \beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}\text{: Falls } \mathcal{A}, \beta \models F, \text{ so } \mathcal{A}, \beta \models G. \\
 & \text{gdw.} & \text{für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str und } \beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}\text{: } \mathcal{A}(\beta)(F) \rightarrow_b \mathcal{A}(\beta)(G) = 1 \\
 & \text{gdw.} & \text{für alle } \mathcal{A} \in \Sigma\text{-Str und } \beta : X \rightarrow U_{\mathcal{A}}\text{: } \mathcal{A}(\beta)(F \rightarrow G) = 1
\end{array}
$$

Satz. F und G sind äquivalent gdw. $(F \leftrightarrow G)$ ist gültig.

Beweis

$$
\begin{array}{lll}
F \text{ und } G \text{ sind äquivalent} & \text{gdw.} & F \models G \text{ und } F \models G \\
 & \text{gdw.} & \models F \rightarrow G \text{ und } \models G \rightarrow F \\
 & \text{gdw.} & \models F \leftrightarrow G
\end{array}
$$

Gültigkeit und Unerfüllbarkeit

Nachweis von Gültigkeit (und damit Folgerung oder Äquivalenz) durch Unerfüllbarkeitstest:

F gültig genau dann, wenn $\neg F$ unerfüllbar

$N \models F$ genau dann, wenn $N \cup \neg F$ unerfüllbar