Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 4

18.06.2013

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Prädikatenlogik

Syntax

1. **Logische Symbole:**
   1.1: Wie in der Aussagenlogik: $\top, \bot; \neg; \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
   1.2: Quantoren: $\forall$, $\exists$.

2. **Nichtlogische Symbole:** Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$,
   2.1: Ω Menge von Funktionssymbolen. Notation: f/n: f hat Stelligkeit $n \geq 0$,
   2.2: Π Menge von Prädikatensymbolen. Notation: p/m: p hat Stelligkeit $m \geq 0$.
   (Das Gleichheitsprädikat $\approx$ kann (muss aber nicht) enthalten sein.)

   Funktionsssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstante

   Prädikatensymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Aussagenvariablen

3. **Variablen:** X vorgegebene Menge von abzählbar unendlich vielen Symbolen ist, die wir für (die Bezeichnung von) Variablen verwenden.

- Terme
- Formeln
- Substitutionen

Prädikatenlogik

Semantik:

- Σ-Strukturen
- Valuationen
- Wert eines Terms in $\mathcal{A}$ bzgl. β
- Wahrheitswert einer Formel in $\mathcal{A}$ bzgl. β
- Modelle, Gültigkeit, Erfüllbarkeit

Gültigkeit/Erfüllbarkeit/Folgerung/Äquivalenz

Definition. F gilt in $\mathcal{A}$ unter β: $\mathcal{A}, \beta \models F$ g.d.w. $\mathcal{A}(\beta)(F) = 1$

Definition. F gilt in $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ ist Modell von F, $\mathcal{A} \models F$) g.d.w. $\mathcal{A}, \beta \models F$, für alle $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$

Definition. F ist (allgemein-) gültig: $\models F$ g.d.w. $\mathcal{A} \models F$, für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str

Definition. F heißt erfüllbar gdw. es $\mathcal{A}$ und β gibt, so daß $\mathcal{A}, \beta \models F$.
Sonst heißt F unerfüllbar.

Definition. F impliziert G (oder G folgt aus F), i.Z. $F \models G$ gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$ gilt: Falls $\mathcal{A}, \beta \models F$, so $\mathcal{A}, \beta \models G$.

Definition. F und G sind äquivalent gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$ gilt: $\mathcal{A}, \beta \models F$ genau dann, wenn $\mathcal{A}, \beta \models G$.

Definition. $N \models G$ gdw. für alle $\mathcal{A} \in \Sigma$-Str und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$: falls $\mathcal{A}, \beta \models F$, für alle $F \in N$, so $\mathcal{A}, \beta \models G$.

Folgerung/Äquivalenz und Gültigkeit/Unerfüllbarkeit

$F \models G$ gdw. $(F \to G)$ ist gültig

F und G sind äquivalent gdw. $(F \leftrightarrow G)$ ist gültig.

F gültig genau dann, wenn $\neg F$ unerfüllbar

$N \models F$ genau dann, wenn $N \cup \neg F$ unerfüllbar

Eigenschaften von Quantoren

Quantoren gleicher Art kommutieren

$\forall x \forall y$ ist das gleiche wie $\forall y \forall x$

$\exists x \exists y$ ist das gleiche wie $\exists y \exists x$

Eigenschaften von Quantoren

Quantoren gleicher Art kommutieren

$\forall x \forall y$ ist das gleiche wie $\forall y \forall x$

$\exists x \exists y$ ist das gleiche wie $\exists y \exists x$

Informell: Für jede Formel F gilt: $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$; $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$.

Theorem
Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F gilt:

(1) $\quad \forall x \forall y\, F \equiv \forall y \forall x\, F$

(2) $\quad \exists x \exists y\, F \equiv \exists y \exists x\, F$

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Beispiel:

$\forall x \exists y \quad Mutter(y, x)$	Jeder hat eine Mutter	(richtig)

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Beispiel:

$\forall x \exists y \quad Mutter(y, x)$	Jeder hat eine Mutter	(richtig)
$\exists y \forall x \quad Mutter(y, x)$	Es gibt eine Person, die die Mutter von jedem ist	(falsch)

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

Beispiel:

$\forall x \exists y \ \ Mutter(y, x)$ Jeder hat eine Mutter (richtig)

$\exists y \forall x \ \ Mutter(y, x)$ Es gibt eine Person, die die Mutter von jedem ist (falsch)

Bemerkung: $\forall x \exists y F \equiv \exists y \forall x F$ gilt nicht immer.
Es gibt eine Formel F so dass $\forall x \exists y F$ und $\exists y \forall x F$ nicht logisch äquivalent.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F gilt:

$$\exists x \forall y\, F \models \forall y \exists x\, F$$

Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und eine Formel F mit:

$$\forall x \exists y\, F \not\models \exists y \forall x\, F$$

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg \exists x \neg \ldots$

$\exists x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg \forall x \neg \ldots$

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg\exists x \neg \ldots$

$\exists x \ldots$ ist das gleiche wie $\neg\forall x \neg \ldots$

Beispiel:

$\forall x\, \text{mag}(x, \text{eiscreme})$ ist das gleiche wie $\neg\exists x\, \neg\text{mag}(x, \text{eiscreme})$

$\exists x\, \text{mag}(x, \text{broccoli})$ ist das gleiche wie $\neg\forall x\, \neg\text{mag}(x, \text{broccoli})$

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \dots$ ist das gleiche wie $\neg \exists x \neg \dots$

$\exists x \dots$ ist das gleiche wie $\neg \forall x \neg \dots$

Beispiel:

$\forall x\, \mathrm{mag}(x, \mathrm{eiscreme})$ ist das gleiche wie $\neg \exists x\, \neg \mathrm{mag}(x, \mathrm{eiscreme})$

$\exists x\, \mathrm{mag}(x, \mathrm{broccoli})$ ist das gleiche wie $\neg \forall x\, \neg \mathrm{mag}(x, \mathrm{broccoli})$

Informell: Für jede Formel F gilt: $\forall x F \equiv \neg \exists x \neg F$; $\exists x F \equiv \neg \forall x \neg F$.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F gilt:

(1) $\forall x\, F \equiv \neg \exists x\, \neg F$

(2) $\exists x\, F \equiv \neg \forall x\, \neg F$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert über $\wedge$

$\forall x(\ldots \wedge \ldots)$ ist das gleiche wie $(\forall x\ldots) \wedge (\forall x\ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert über $\wedge$

$\forall x(\ldots \wedge \ldots)$ ist das gleiche wie $(\forall x \ldots) \wedge (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\,(\mathit{studiert}(x) \wedge \mathit{arbeitet}(x))$ ist das gleiche wie

$(\forall x\; \mathit{studiert}(x)) \wedge (\forall x\; \mathit{arbeitet}(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert über $\wedge$

$\forall x(\ldots \wedge \ldots)$ ist das gleiche wie $(\forall x \ldots) \wedge (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\,(\mathit{studiert}(x) \wedge \mathit{arbeitet}(x))$ ist das gleiche wie

$(\forall x\, \mathit{studiert}(x)) \wedge (\forall x\, \mathit{arbeitet}(x))$

Informell: Für alle Formeln F, G gilt: $\forall x(F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge \forall x G$.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F, G gilt:

$$\forall x(F \wedge G) \equiv \forall x F \wedge \forall x G$$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert über $\vee$

$\exists x(\ldots \vee \ldots)$ ist das gleiche wie $(\exists x \ldots) \vee (\exists x \ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert über $\vee$

$\exists x(\ldots \vee \ldots)$ ist das gleiche wie $(\exists x \ldots) \vee (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\,(\mathit{gerade}(x) \vee \mathit{ungerade}(x))$ ist das gleiche wie

$(\exists x\, \mathit{gerade}(x)) \vee (\exists x\, \mathit{ungerade}(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert über $\vee$

$\exists x(\ldots \vee \ldots)$ ist das gleiche wie $(\exists x \ldots) \vee (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\,(\mathit{gerade}(x) \vee \mathit{ungerade}(x))$ ist das gleiche wie

$(\exists x\, \mathit{gerade}(x)) \vee (\exists x\, \mathit{ungerade}(x))$

Informell: Für alle Formeln F, G gilt: $\exists x(F \vee G) \equiv \exists xF \vee \exists xG$.

Theorem. Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für alle Σ-Formeln F, G gilt:

$$\exists x\,(F \vee G) \equiv (\exists x\, F) \vee (\exists x\, G)$$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$

$\forall x(\ldots \vee \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\forall x\ldots) \vee (\forall x\ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$

$\forall x(\ldots \vee \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\forall x \ldots) \vee (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\,(\mathit{gerade}(x) \vee \mathit{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie

$(\forall x\,\mathit{gerade}(x)) \vee (\forall x\,\mathit{ungerade}(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$

$\forall x(\ldots \vee \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\forall x \ldots) \vee (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\,(\mathit{gerade}(x) \vee \mathit{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie

$(\forall x\,\mathit{gerade}(x)) \vee (\forall x\,\mathit{ungerade}(x))$

Theorem. Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und Σ-Formeln F, G mit:

$$\forall x(F \vee G) \not\equiv \forall x F \vee \forall x G$$

(1) $\forall x F \vee \forall x G \models \forall x(F \vee G)$
(2) $\forall x(F \vee G) \not\models \forall x F \vee \forall x G$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert NICHT über $\wedge$

$\exists x(\ldots \wedge \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x \ldots) \wedge (\exists x \ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert NICHT über $\wedge$

$\exists x(\ldots \wedge \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x \ldots) \wedge (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\, (\mathit{gerade}(x) \wedge \mathit{ungerade}(x))$ ist NICHT das gleiche wie
$(\exists x\, \mathit{gerade}(x)) \wedge (\exists x\, \mathit{ungerade}(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert NICHT über $\wedge$

$\exists x(\ldots \wedge \ldots)$ ist NICHT das gleiche wie $(\exists x \ldots) \wedge (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\, (gerade(x) \wedge ungerade(x))$ ist NICHT das gleiche wie
$(\exists x\, gerade(x)) \wedge (\exists x\, ungerade(x))$

Theorem. Es gibt eine Signatur $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und Σ-Formeln F, G mit:

$$\exists x(F \wedge G) \not\equiv \exists x F \wedge \exists x G$$

(1) $\exists x(F \wedge G) \models \exists x F \wedge \exists x G$
(2) $\exists x F \wedge \exists x G \not\models \exists x(F \wedge G)$

Zusammenfassung

Wichtige Äquivalenzen

- $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$
- $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$
- $\forall x (F \wedge G) \equiv (\forall x F) \wedge (\forall x G)$
- $\exists x (F \vee G) \equiv (\exists x F) \vee (\exists x G)$
- $\forall x F \equiv \neg \exists x \neg F$ $\qquad \neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$
- $\exists x F \equiv \neg \forall x \neg F$ $\qquad \neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$

Zusammenfassung

Aber Vorsicht

$\forall x \exists y F \not\equiv \exists y \forall x F$

- $\exists y \forall x F \models \forall x \exists y F$
- $\forall x \exists y F \not\models \exists y \forall x F$

$\forall x(F \vee G) \not\equiv (\forall x F) \vee (\forall x G)$

- $(\forall x F) \vee (\forall x G) \models \forall x(F \vee G)$
- $\forall x(F \vee G) \not\models \forall x F \vee \forall x G$

$\exists x(F \wedge G) \not\equiv (\exists x F) \wedge (\exists x G)$

- $\exists x(F \wedge G) \models (\exists x F) \wedge (\exists x G)$
- $(\exists x F) \wedge (\exists x G) \not\models \exists x(F \wedge G)$

Strukturelle Induction

- für Terme
- für Formeln in Prädikatenlogik

Strukturelle Induktion: Terme

Menge $T_\Sigma(X)$ der Σ-Terme:

Die kleinste Menge mit:

- $X \subseteq T_\Sigma(X)$
- Wenn
  - $f \in \Omega$,
  - n ist die Stelligkeit von f
  - $t_1, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)$

  dann $f(t_1, \ldots, t_n) \in T_\Sigma(X)$

Strukturelle Induktion: Terme

$\Sigma = (\Omega, \Pi)$

Sei $p(t)$ eine Eigenschaft der Σ-Terme in Prädikatenlogik

Behauptung: Für alle Terme t, $p(t)$ gilt

Beweis durch Strukturelle Induktion:

Induktionsbasis: Zu zeigen:
$p(t)$ gilt für $t \in X$ und für alle Konstanten.

Sei t ein Term (nicht Variable oder Konstante).
Induktionsvoraussetzung:
$p(s)$ gilt für alle Teilterme s von t (mit $s \neq t$)

Induktionsschritt: Zu zeigen: $p(t)$ gilt:

Fallunterschied über alle $f \in \Omega$ mit $t = f(t_1, \dots, t_n)$.

Strukturelle Induktion: Formeln

Menge For_Σ der Formeln über Σ:

Die kleinste Menge, die

- Alle atomaren Formeln enthält,
- $\top \in \mathrm{For}_\Sigma$, $\bot \in \mathrm{For}_\Sigma$,
- Wenn $F, G \in \mathrm{For}_\Sigma$, dann auch
  $\neg F, F \wedge G, F \vee G, F \rightarrow G, F \leftrightarrow G \in \mathrm{For}_\Sigma$,
- Wenn $F \in \mathrm{For}_\Sigma$ und $x \in X$, dann
  $\forall x F \in \mathrm{For}_\Sigma, \exists x F \in \mathrm{For}_\Sigma$

Strukturelle Induktion: Formeln

Sei $p(F)$ eine Eigenschaft der Σ-Formeln in Prädikatenlogik

Behauptung: Für alle Formeln F, $p(F)$ gilt

Beweis durch Strukturelle Induktion:

Induktionsbasis: Zu zeigen:
$p(F)$ gilt für $F \in \{\top, \bot\}$ und für alle atomaren Formeln.

Sei F eine Formel (nicht atomar oder $\top$ oder $\bot$).
Induktionsvoraussetzung:
$p(G)$ gilt für alle Teilformeln G von F (mit $G \neq F$)

Induktionsschritt: Zu zeigen: $p(F)$ gilt:

Fall 1	$F = \neg G$	Fall 2	$F = G_1 \vee G_2$
Fall 3	$F = G_1 \wedge G_2$	Fall 4	$F = G_1 \rightarrow G_2$
Fall 5	$F = G_1 \leftrightarrow G_2$	Fall 6	$F = \forall x G$
		Fall 7	$F = \exists x G$

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \text{ g.d.w. } \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Beweis: Strukturelle Induktion

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Beweis: Strukturelle Induktion

Plan: Wir benutzen folgendes Lemma:

Lemma: Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Variable x und Terme t_i, t:
$\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$

Substitutionen und Valuationen

Lemma: Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Variable x und Terme t_i, t:
$\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta[x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$

Beweis Strukturelle Induktion

$$p(t_i) \qquad \mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta[x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$$

Zu zeigen: Für alle Terme t_i, $p(t_i)$ gilt.

1. **Induktionsbasis:** $p(t_i)$ gilt für $t_i \in X$ und für $t_i = c$ Konstante.

Fall 1: $t_i \in X$.

- Fall 1a: $t_i = x$. Dann: $t_i[t/x] = t$.
  $\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(t) = \mathcal{A}(\beta[x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)])(x) = \mathcal{A}(\beta[x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$.
- Fall 1a: $t_i = y$, mit $y \neq x$. Dann: $t_i[t/x] = y$
  $\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(y) = \mathcal{A}(\beta[x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)])(y) = \mathcal{A}(\beta[x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$.

Fall 2: $t_i = c$, $c/0 \in \Omega$ (Konstante). Dann: $t_i[t/x] = c$
$\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(c) = c_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}(\beta[x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)])(c) = \mathcal{A}(\beta[x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$.

Substitutionen und Valuationen

Lemma: Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Variable x und Terme t_i, t:
$\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$

Beweis (ctd.)

2. **Induktionsvoraussetzung:** Sei t_i Term (nicht Variable oder Konstante).

   Annahme: $p(s)$ gilt für alle Teilterme s von t_i (mit $s \neq t_i$)

3. **Induktionsschritt:** Zu zeigen: $p(t_i)$ gilt, wobei $t_i = f(s_1, \ldots, s_n)$.

$$
\begin{array}{lcll}
\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) & = & \mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \ldots, s_n)[t/x]) = & \\
& = & \mathcal{A}(\beta)(f(s_1[t/x], \ldots, s_n[t/x]) = & \text{(Anw. Subst.)} \\
& = & f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1[t/x]), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n[t/x])) & \\
& \stackrel{IV}{=} & f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(s_1), \ldots \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(s_n)) & \\
& = & \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(f(s_1, \ldots, s_n)) & \\
& = & \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i) &
\end{array}
$$

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta[x \to \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \text{ g.d.w. } \mathcal{A}, \beta[x \to \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Beweis: Strukturelle Induktion

1. Induktionsbasis: Zu zeigen: Die Eigenschaft gilt für $\top$, $\bot$ und alle atomaren Formeln.

Fall 1: $F = \top$ Dann $F[t/x] = \top$;

$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(\top) = 1 = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(\top) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(F)$

Fall 2: $F = \bot$ Dann $F[t/x] = \bot$;

$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(\bot) = 0 = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(\bot) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(F)$.

Fall 3: $F = p(t_1, \dots, t_n)$ mit $p/n \in \Omega$. Dann $F[t/x] = p(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$.

$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(p(t_1[t/x], .., t_n[t/x])) = 1$ iff $(\mathcal{A}(\beta)(t_1[t/x]), .., \mathcal{A}(\beta)(t_n[t/x])) \in p_{\mathcal{A}}$

$\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(p(t_1, .., t_n)) = 1$ iff $(\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_1), .., \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_n)) \in p_{\mathcal{A}}$

Lemma: $\mathcal{A}(\beta)(t_i[t/x]) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(t_i)$. Äquivalenz folgt daraus.

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \text{ g.d.w. } \mathcal{A}, \beta[x \to \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Beweis: ctd.

2. **Induktionsvoraussetzung:** Sei F eine Formel (nicht atomar oder $\top$ oder $\bot$).
   Annahme: $p(G)$ gilt für alle Teilformeln G von F (mit $G \neq F$)

3. **Induktionsschritt:** Zu zeigen: $p(F)$ gilt:

Fall 1: $F = \neg G$. Dann $F[t/x] = \neg(G[t/x])$.

$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(\neg(G[t/x]) = 1$ iff $\mathcal{A}(\beta)(G[t/x]) = 0$ iff (Ind.Voraus.)
$\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(G) = 0$ iff $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(\neg G) = 1$ iff $\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(F) = 1$

Fall 2-5: $F = G_1 \mathrm{op} G_2$, $\mathrm{op} \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Dann $F[t/x] = G_1[t/x] \mathrm{op} G_2[t/x]$.

$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(G_1[t/x] \mathrm{op} G_2[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(G_1[t/x]) \mathrm{op}_B \mathcal{A}(\beta)(G_2[t/x]) =$ (I.V.)
$\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(G_1) \mathrm{op}_B \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(G_2) = \mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(\underbrace{G_1 \mathrm{op} G_2}_{F})$.

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta[x \to \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Fall 6: $F = \forall y G$.

Fall 6.1: $y = x$. Dann $F[t/x] = \forall x G[t/x] = \forall x G$.

$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x])=\mathcal{A}(\beta)(\forall x G)=\min\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(G) \mid a \in U_\mathcal{A}\}$

$\mathcal{A}(\beta[x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)])(\forall x G)=\min\{\mathcal{A}(\beta[x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)][x\mapsto a])(G) \mid a \in U_\mathcal{A}\} = \min\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(G) \mid a \in U_\mathcal{A}\}$.

Fall 6.2: $y \neq x$, t enthält nicht y. Dann $F[t/x] = \forall y G[t/x] = \forall y(G[t/x])$.

$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x])=\mathcal{A}(\beta)(\forall y(G[t/x])=\min\{\mathcal{A}(\beta[y\mapsto a])(G[t/x])|a\in U_\mathcal{A}\}$ = (Ind.Vor.)

$\min\{\mathcal{A}(\beta[y\mapsto a, x\mapsto\mathcal{A}(\beta[y\mapsto a])(t))(G)|a\in U_\mathcal{A}\}=$
$\min\{\mathcal{A}(\beta[y\mapsto a, x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)])(G)|a\in U_\mathcal{A}\}$ (y kommt in t nicht vor)

$\mathcal{A}(\beta[x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)])(\forall y G) = = \min\{\mathcal{A}(\beta[x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)][y\mapsto a])(G)|a\in U_\mathcal{A}\}=$
$\min\{\mathcal{A}(\beta[y \mapsto a, x\mapsto\mathcal{A}(\beta)(t)])(G) = |a\in U_\mathcal{A}\}$.

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \text{ g.d.w. } \mathcal{A}, \beta[x \rightarrow \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Fall 6: $F = \forall y G$.

Fall 6.3: $y \neq x$, t enthält y. Dann $F[t/x] = \forall y' G[y'/y][t/x]$.

$$\mathcal{A}(\beta)(F[t/x]) = \mathcal{A}(\beta)(\forall y'(G[y'/y][t/x]) =$$

$$= \min\{\mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a])(G[y'/y][t/x]) \mid a \in U_\mathcal{A}\} = \qquad \text{(Ind.Vor.)}$$

$$= \min\{\mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a, x \mapsto \mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a])(t))(G[y'/y]) \mid a \in U_\mathcal{A}\} = \text{(Ind.Vor.)}$$

$$= \min\{\mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a, x \mapsto \mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a])(t), y \mapsto a])(G) \mid a \in U_\mathcal{A}\} =$$

$$[\text{Rem:} \mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a, x \mapsto \mathcal{A}(\beta[y' \mapsto a])(t)])(y') = a]$$

$$= \min\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t), y \mapsto a])(G) \mid a \in U_\mathcal{A}\} \ (y' \text{ kommt in } t \text{ u. } G \text{ nicht vor})$$

$$\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(\forall y G) = \min\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)][y \mapsto a])(G) \mid a \in U_\mathcal{A}\} =$$

$$= \min\{\mathcal{A}(\beta[y \mapsto a, x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)])(G) \mid a \in U_\mathcal{A}\}.$$

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta[x \to \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Fall 7: $F = \exists y G$.

Ähnlich zu Fall 6.

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Allgemeiner gilt für beliebige Substitutionen σ:

Theorem.

$$\mathcal{A}, \beta \models F\sigma \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta \circ \sigma \models F,$$

wobei $\beta \circ \sigma : X \to \mathcal{A}$ die Wertebelegung mit $\beta \circ \sigma(x) = \mathcal{A}(\beta)(x\sigma)$, für alle Variablen x.

Substitutionen und Valuationen

Theorem (Substitutionslemma)
Für alle Σ-Strukturen $\mathcal{A}$, Wertebelegungen β, Σ-Formeln F, Variablen x und Terme t gilt:

$$\mathcal{A}, \beta \models F[t/x] \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta[x \mapsto \mathcal{A}(\beta)(t)] \models F$$

Allgemeiner gilt für beliebige Substitutionen σ:

Theorem.

$$\mathcal{A}, \beta \models F\sigma \;\text{ g.d.w. }\; \mathcal{A}, \beta \circ \sigma \models F,$$

wobei $\beta \circ \sigma : X \to \mathcal{A}$ die Wertebelegung mit $\beta \circ \sigma(x) = \mathcal{A}(\beta)(x\sigma)$, für alle Variablen x.

Beweis: $\sigma = [t_1/x_1, \ldots t_n/x_n]$
Induktion nach Anzahl n von Variablen in $dom(\sigma) = \{x_1, \ldots, x_n\}$

Umbenennung von Variablen

Lemma

Für alle Σ-Formeln F, Variablen x gilt:

$$\forall x\, F \equiv \forall z\, F[z/x]$$

wobei z eine neue Variable ist.

Algorithmische Probleme

Gültigkeit(F):

$\models F$? (Σ fest)

Erfüllbarkeit(F):

F erfüllbar? (Σ fest)

Modelltest(F,A):

$A \models F$? (Σ fest)

Ausblick: Kalküle, Entscheidbarkeit

Kalküle

Es gibt korrekte und vollständige Kalküle für Prädikatenlogik (z.B. Resolution)

Ausblick: Kalküle, Entscheidbarkeit

Kalküle

Es gibt korrekte und vollständige Kalküle für Prädikatenlogik (z.B. Resolution)

Aber diese Kalküle können die Erfüllbarkeit von Formeln NICHT entscheiden

Ausblick: Kalküle, Entscheidbarkeit

Kalküle

Es gibt korrekte und vollständige Kalküle für Prädikatenlogik (z.B. Resolution)

Aber diese Kalküle können die Erfüllbarkeit von Formeln NICHT entscheiden

Aussagenlogik

Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit ENTSCHEIDBAR

Prädikatenlogik

- Es gibt Σ, so dass Gültigkeit(F) unentscheidbar.
- Menge der allgemeingültigen Formeln REKURSIV AUFZÄHLBAR
- Menge der unerfüllbaren Formeln REKURSIV AUFZÄHLBAR
- Menge der erfüllbaren Formeln NICHT REKURSIV AUFZÄHLBAR

Rekursiv Aufzählbar

Informelle Definition. Als rekursiv aufzählbare Menge

(auch semi-entscheidbare Menge, positiv semi-entscheidbare Menge, halb-entscheidbare Menge, berechenbar aufzählbare Menge, kurz r.e., c.e)

wird in der Berechenbarkeitstheorie eine aufzählbare Menge A (z.B. eine Teilmenge von $\mathbb{N}$) bezeichnet, wenn es einen Algorithmus gibt, der die Elemente von A aufzählt.

Äquivalent ist folgende Definition: es gibt einen Algorithmus, der 1 ausgibt wenn die Eingabe in A ist, und auf anderen Eingaben 0 ausgibt oder nicht hält.

Zusammenfassung: Syntax und Semantik

- Prädikatenlogische Signatur
- Term, Atom, Formel
- Prädikatenlogisches Modell
- Auswertung von Formeln in Modellen
- Erfüllbarkeit, Gültigkeit; Folgerung, Äquivalenz
- Eigenschaften von Quantoren (Vertauschbarkeit untereinander und mit $\wedge, \vee$)
- Entscheidbarkeit der Erfüllbarkeit von Formeln