Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 5

25.06.2013

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

- Prädikatenlogische Signatur
- Term, Atom, Formel
- Prädikatenlogisches Modell
- Auswertung von Formeln in Modellen
- Erfüllbarkeit, Gültigkeit; Folgerung, Äquivalenz
- Eigenschaften von Quantoren (Vertauschbarkeit untereinander und mit $\wedge, \vee$)
- Entscheidbarkeit der Erfüllbarkeit von Formeln

Wichtige Äquivalenzen (Zusammenfassung)

- $\forall x \forall y F \equiv \forall y \forall x F$
- $\exists x \exists y F \equiv \exists y \exists x F$

- $\forall x (F \wedge G) \equiv (\forall x F) \wedge (\forall x G)$
- $\exists x (F \vee G) \equiv (\exists x F) \vee (\exists x G)$

- $\forall x F \equiv \neg \exists x \neg F$ $\qquad$ $\neg \forall x F \equiv \exists x \neg F$
- $\exists x F \equiv \neg \forall x \neg F$ $\qquad$ $\neg \exists x F \equiv \forall x \neg F$

Falls x in der Formel H nicht vorkommt, dann:

- $(\forall x F(x)) \vee H \equiv \forall x (F(x) \vee H)$
- $(\forall x F(x)) \wedge H \equiv \forall x (F(x) \wedge H)$
- $(\exists x F(x)) \vee H \equiv \exists x (F(x) \vee H)$
- $(\exists x F(x)) \wedge H \equiv \exists x (F(x) \wedge H)$

Zusammenfassung

Aber Vorsicht

$\forall x \exists y F \not\equiv \exists y \forall x F$

- $\exists y \forall x F \models \forall x \exists y F$
- $\forall x \exists y F \not\models \exists y \forall x F$

$\forall x (F \vee G) \not\equiv (\forall x F) \vee (\forall x G)$

- $(\forall x F) \vee (\forall x G) \models \forall x (F \vee G)$
- $\forall x (F \vee G) \not\models \forall x F \vee \forall x G$

$\exists x (F \wedge G) \not\equiv (\exists x F) \wedge (\exists x G)$

- $\exists x (F \wedge G) \models (\exists x F) \wedge (\exists x G)$
- $(\exists x F) \wedge (\exists x G) \not\models \exists x (F \wedge G)$

Andere wichtige Äquivalenzen

$(F \wedge F) \equiv F$	$(F \vee F) \equiv F$	(Idempotenz)
$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$	$(F \vee G) \equiv (G \vee F)$	(Kommutativität)
$(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H)$ $(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H)$		(Assoziativität)
$(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$ $(F \vee (F \wedge G)) \equiv F$		(Absorption)
$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$ $(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$		(Distributivität)
$(\neg\neg F) \equiv F$		(Doppelte Negation)
$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$ $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$		(De Morgan's Regeln)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F)$		(Kontraposition)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$		(Elimination Implikation)
$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$		(Elimination Äquivalenz)

Unser Ziel

Kalküle zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

Normalformen, Skolemisierung, Herbrandmodelle

Vorteile von Normalformen

- Reduktion der logischen Konzepte
- einfache Datenstrukturen für Beweisverfahren

Negationsnormalform

Definition. Eine Formel $F \in \mathrm{For}_\Sigma$ ist in Negationsnormalform (NNF), falls:

- $\rightarrow, \leftrightarrow$ kommen in F nicht vor
- jedes Negationszeichen in F steht direkt vor einem Atom (insbes. auch kein $\neg\neg$)

Negationsnormalform

Definition. Eine Formel $F \in \text{For}_\Sigma$ ist in Negationsnormalform (NNF), falls:

- $\rightarrow, \leftrightarrow$ kommen in F nicht vor
- jedes Negationszeichen in F steht direkt vor einem Atom (insbes. auch kein $\neg\neg$)

Beispiele:

NNF:

$$P, \quad \neg P, \quad (\neg P \vee Q) \wedge (R \vee (Q \wedge \neg P))$$

$$p(x, y) \vee \neg q(y)$$

nicht NNF:

$$\neg\neg P, \quad \neg(P \vee Q)$$

$$p(x, y) \rightarrow q(x)$$

Bereinigte Formeln

Definition. Eine Formel $F \in For_\Sigma$ ist bereinigt, falls:

- Keine Variable in F sowohl gebunden als auch frei vorkommt
- Keine Variable mehr als einmal in F quantifiziert ist

Bereinigte Formeln

Definition. Eine Formel $F \in For_\Sigma$ ist bereinigt, falls:

- Keine Variable in F sowohl gebunden als auch frei vorkommt
- Keine Variable mehr als einmal in F quantifiziert ist

Beispiele:

Bereinigt

$P \vee Q$

$\forall x \exists y (p(x) \vee q(x, y) \vee \exists z\, r(x, z))$

Bereinigte Formeln

Definition. Eine Formel $F \in For_\Sigma$ ist bereinigt, falls:

- Keine Variable in F sowohl gebunden als auch frei vorkommt
- Keine Variable mehr als einmal in F quantifiziert ist

Beispiele:

Bereinigt

$P \vee Q$

$\forall x \exists y (p(x) \vee q(x, y) \vee \exists z\, r(x, z))$

Nicht bereinigt

$p(x) \vee \forall x\, q(x)$

$(\forall x\, p(x)) \vee (\forall x\, q(x))$

Pränexe Normalform

Definition: Pränexe Formeln sind von der Form

$$Q_1x_1 \ldots Q_nx_n \; F,$$

wobei F quantorenfrei, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$. Hierbei heißt $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n$ der Quantorenpräfix und F die Matrix der Formel.

Pränexe Normalform

Definition: Pränexe Formeln sind von der Form

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \; F,$$

wobei F quantorenfrei, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$. Hierbei heißt $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n$ der Quantorenpräfix und F die Matrix der Formel.

Beispiele

In Pränexnormalform

$p(x) \lor q(x)$

$\forall x \exists y \, (p(x) \lor q(y))$

Nicht in Pränexnormalform

$(\forall x \, p(x)) \lor (\exists y \, q(y))$

Pränexe Normalform

Welche Formeln sind in Pränexnormalform?

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

$$\forall x \forall y \neg (P(x) \to Q(y))$$

$$\forall x \exists y R(x, y)$$

$$R(x, y)$$

$$\neg \forall x R(x, y)$$

Pränexe Normalform

Theorem. Zu jeder Formel $F \in \mathrm{For}_\Sigma$ gibt es eine äquivalente Formel in Pränexnormalform

Konstruktiver Beweis

(1) Formel in NNF transformieren

1. Elimination von $\leftrightarrow$
2. Elimination von $\rightarrow$
3. "Nach innen schieben" von $\neg$
   - aussagenlogische Umformungen (de Morgans Regeln; $\neg\neg A \equiv A$)
   - $\neg \forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x)$
   - $\neg \exists x F(x) \equiv \forall x \neg F(x)$

(2) Formel bereinigen

(3) Alle Quantoren nach vorne (Reihenfolge unverändert lassen)

Beispiel 1

$F = \forall x((\exists y R(x,y) \wedge \forall y \neg S(x,y)) \to \neg(\exists y R(x,y) \wedge P))$

Beispiel 1

$F = \forall x((\exists y R(x,y) \land \forall y \neg S(x,y)) \to \neg(\exists y R(x,y) \land P))$

(1) NNF

1.1. Elimination von $\to$

$$\forall x(\neg(\exists y R(x,y) \land \forall y \neg S(x,y)) \lor \neg(\exists y R(x,y) \land P))$$

Beispiel 1

$F = \forall x((\exists y R(x,y) \wedge \forall y \neg S(x,y)) \rightarrow \neg(\exists y R(x,y) \wedge P))$

(1) NNF

1.1. Elimination von $\rightarrow$

$$\forall x(\neg(\exists y R(x,y) \wedge \forall y \neg S(x,y)) \vee \neg(\exists y R(x,y) \wedge P))$$

1.2. "Nach innen schieben" von $\neg$

$$\forall x(\forall y \neg R(x,y) \vee \exists y S(x,y)) \vee \forall y \neg R(x,y) \vee \neg P))$$

Beispiel 1

$F = \forall x((\exists y R(x,y) \wedge \forall y \neg S(x,y)) \rightarrow \neg(\exists y R(x,y) \wedge P))$

(1) NNF

1.1. Elimination von $\rightarrow$

$$\forall x(\neg(\exists y R(x,y) \wedge \forall y \neg S(x,y)) \vee \neg(\exists y R(x,y) \wedge P))$$

1.2. “Nach innen schieben” von $\neg$

$$\forall x(\forall y \neg R(x,y) \vee \exists y S(x,y)) \vee \forall y \neg R(x,y) \vee \neg P))$$

(2) Formel bereinigen

$$\forall x(\forall y_1 \neg R(x,y_1) \vee \exists y_2 S(x,y_2)) \vee \forall y_3 \neg R(x,y_3) \vee \neg P))$$

Beispiel 1

$F = \forall x((\exists y R(x,y) \wedge \forall y \neg S(x,y)) \rightarrow \neg(\exists y R(x,y) \wedge P))$

(1) NNF

1.1. Elimination von $\rightarrow$

$$\forall x(\neg(\exists y R(x,y) \wedge \forall y \neg S(x,y)) \vee \neg(\exists y R(x,y) \wedge P))$$

1.2. “Nach innen schieben” von $\neg$

$$\forall x(\forall y \neg R(x,y) \vee \exists y S(x,y)) \vee \forall y \neg R(x,y) \vee \neg P))$$

(2) Formel bereinigen

$$\forall x(\forall y_1 \neg R(x,y_1) \vee \exists y_2 S(x,y_2)) \vee \forall y_3 \neg R(x,y_3) \vee \neg P))$$

(3) Alle Quantoren nach vorne (Reihenfolge unverändert lassen)

$$\forall x \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 (\neg R(x,y_1) \vee S(x,y_2) \vee \neg R(x,y_3) \vee \neg P$$

Beispiel 2

$$F := (\forall x((p(x) \vee q(x,y)) \wedge \exists z\, r(x,y,z))) \rightarrow ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y))$$

1. NNF

$$
\begin{array}{lll}
F \equiv & \neg(\forall x((p(x) \vee q(x,y)) \wedge \exists z\, r(x,y,z))) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) & \text{Elim } \rightarrow \\
\equiv & \exists x \neg((p(x) \vee q(x,y)) \wedge \exists z\, r(x,y,z))) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) & (\text{De Morgan, } \neg\forall \equiv \exists\neg) \\
\equiv & \exists x(\neg(p(x) \vee q(x,y)) \vee \neg\exists z\, r(x,y,z))) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) & (\text{De Morgan}) \\
\equiv & \exists x((\neg p(x) \wedge \neg q(x,y)) \vee \forall z\, \neg r(x,y,z)) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) & (\text{De Morgan, } \neg\exists \equiv \forall\neg) \\
=: & F_1 &
\end{array}
$$

Beispiel 2

$$F := (\forall x((p(x) \vee q(x,y)) \wedge \exists z\, r(x,y,z))) \rightarrow ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y))$$

1. NNF

$$\begin{array}{lll}
F \equiv & \neg(\forall x((p(x) \vee q(x,y)) \wedge \exists z\, r(x,y,z))) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) & \text{Elim} \rightarrow \\
\equiv & \exists x \neg((p(x) \vee q(x,y)) \wedge \exists z\, r(x,y,z))) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) & (\text{De Morgan}, \neg\forall \equiv \exists\neg) \\
\equiv & \exists x(\neg(p(x) \vee q(x,y)) \vee \neg\exists z\, r(x,y,z))) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) & (\text{De Morgan}) \\
\equiv & \exists x((\neg p(x) \wedge \neg q(x,y)) \vee \forall z\, \neg r(x,y,z)) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) & (\text{De Morgan}, \neg\exists \equiv \forall\neg) \\
=: & F_1 &
\end{array}$$

2. Bereinigung

$$F_1 \equiv \quad \exists x_1((\neg p(x_1) \wedge \neg q(x_1,y)) \vee \forall z_1\, \neg r(x_1,y,z_1)) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z_2\, r(z_2,x,y)) \quad =: \quad F_2$$

Beispiel 2

$$F := (\forall x((p(x) \vee q(x,y)) \wedge \exists z\, r(x,y,z))) \rightarrow ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y))$$

1. NNF

$$\begin{array}{lll}
F \equiv & \neg(\forall x((p(x) \vee q(x,y)) \wedge \exists z\, r(x,y,z))) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) & \text{Elim } \rightarrow \\
\equiv & \exists x \neg((p(x) \vee q(x,y)) \wedge \exists z\, r(x,y,z))) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) & (\text{De Morgan, } \neg\forall \equiv \exists\neg) \\
\equiv & \exists x(\neg(p(x) \vee q(x,y)) \vee \neg\exists z\, r(x,y,z))) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) & (\text{De Morgan}) \\
\equiv & \exists x((\neg p(x) \wedge \neg q(x,y)) \vee \forall z\, \neg r(x,y,z)) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z\, r(z,x,y)) & (\text{De Morgan, } \neg\exists \equiv \forall\neg) \\
=: & F_1 &
\end{array}$$

2. Bereinigung

$$F_1 \equiv \quad \exists x_1((\neg p(x_1) \wedge \neg q(x_1,y)) \vee \forall z_1\, \neg r(x_1,y,z_1)) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge \forall z_2\, r(z_2,x,y)) \quad =: \quad F_2$$

3. Alle Quantoren nach vorne $\mapsto$ Pränexnormalform

$$F_2 \equiv \underbrace{\exists x_1 \forall z_1 \forall z_2\, ((\neg p(x_1) \wedge \neg q(x_1,y)) \vee \neg r(x_1,y,z_1)) \vee ((p(z) \wedge q(x,z)) \wedge r(z_2,x,y))}_{\text{Pränexnormalform von } F}$$

Skolemnormalform

Definition. Eine Formel $F \in \mathsf{For}_\Sigma$ ist in Skolemnormalform (SNF), falls:

- F ist in Pränexnormalform
- F enthält nur universelle Quantoren

Skolemnormalform

Definition. Eine Formel $F \in \mathrm{For}_\Sigma$ ist in Skolemnormalform (SNF), falls:

- F ist in Pränexnormalform
- F enthält nur universelle Quantoren

Beispiele:

In Skolemnormalform

$$\forall x \forall y (p(x) \vee q(y))$$

Nicht in Skolemnormalform

$$\forall x\, p(x) \vee \forall y\, q(y)$$

$$\forall x \exists y\, (p(x) \vee q(y))$$

Skolemisierung

Skolemisierung: Transformation $\Rightarrow_S$:

$$\forall x_1, \ldots, x_n \exists y F \quad \Rightarrow_S \quad \forall x_1, \ldots, x_n F[f(x_1, \ldots, x_n)/y]$$

wobei f/n ein neues Funktionssymbol (Skolemfunktion).

Skolemisierung

Beispiel

Gegeben:

$\forall w(\exists x(p(w, x) \vee \forall y(q(w, x, y) \wedge \exists z\, r(y, z))))$

Skolemisierung

Beispiel

Gegeben:

$$\forall w(\exists x(p(w,x) \vee \forall y\,(q(w,x,y) \wedge \exists z\, r(y,z))))$$

Pränexnormalform:

$$\forall w \exists x \forall y \exists z((p(w,x) \vee (q(w,x,y) \wedge r(y,z))))$$

Skolemisierung

Beispiel

Gegeben:

$\forall w(\exists x(p(w,x) \vee \forall y\,(q(w,x,y) \wedge \exists z\, r(y,z))))$

Pränexnormalform:

$\forall w \exists x \forall y \exists z((p(w,x) \vee (q(w,x,y) \wedge r(y,z))))$

Skolemisierung: $x \mapsto sk_x(w)$, $z \mapsto sk_z(w,y)$

$\forall w \forall y((p(w, sk_x(w)) \vee (q(w, sk_x(w), y) \wedge r(y, sk_z(w,y)))))$

Skolemisierung

Zusammen:

$$F \overset{*}{\Rightarrow}_P \underbrace{G}_{\text{pränexe Form}} \overset{*}{\Rightarrow}_S \underbrace{H}_{\text{pränex, kein } \exists}$$

Theorem:
Seien F, G und H wie oben angenommen. Dann:

(1) F und G sind äquivalent.

(2) G erfüllbar gdw. H erfüllbar
(bzgl. Σ-Str) (bzgl. Σ'-Str)
wobei $\Sigma' = (\Omega \cup SKF, \Pi)$, wenn $\Sigma = (\Omega, \Pi)$.

Skolemisierung

Lemma. Sei $G = \forall x_1, \dots, x_n \exists y G_1$ und $H = \forall x_1, \dots, x_n G_1[f(x_1, \dots, x_n)/y]$, wobei f ein neues Funktionssymbol (Skolemfunktion) ist.

G erfüllbar (bezgl. Σ-Str.) genau dann, wenn H erfüllbar (bezgl. Σ'-Str.).

wobei: $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und $\Sigma' = (\Omega \cup \{f\}, \Pi)$.

Beweis: (1) G erfüllbar $\Rightarrow$ H erfüllbar

Sei $\mathcal{A}$ eine Σ-Struktur und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{A}(\beta)(G) = 1$.

$$\begin{aligned} 1 = \mathcal{A}(\beta)(G) &= \min_{a_1, \dots, a_n \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n])(\exists y G_1) \\ &= \min_{a_1, \dots, a_n \in U_{\mathcal{A}}} \max_{b \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto b])(G_1) \end{aligned}$$

d.h. für alle $a_1, \dots, a_n \in U_{\mathcal{A}}$ es gibt ein $b \in U_{\mathcal{A}}$ mit:
$\mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto b])(G_1) = 1$.

Wir definieren eine Σ'-struktur $\mathcal{A}'$, in der alle Funktionen und Prädikate in Σ wie in $\mathcal{A}$ definiert sind und in der wir für alle $a_1, \dots, a_n \in U_{\mathcal{A}}$, $f(a_1, \dots, a_n) := b$ definieren.

Dann $\mathcal{A}'(\beta[x_1 \mapsto a_1, \dots, x_n \mapsto a_n])(G_1[f(x_1, \dots, x_n)/y]) = 1$.

Skolemisierung

Lemma. Sei $G = \forall x_1, \ldots, x_n \exists y\, G_1$ und $H = \forall x_1, \ldots, x_n G_1[f(x_1, \ldots, x_n)/y]$, wobei f ein neues Funktionssymbol (Skolemfunktion) ist.

G erfüllbar (bezgl. Σ-Str.) genau dann, wenn H erfüllbar (bezgl. Σ'-Str.).

wobei: $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ und $\Sigma' = (\Omega \cup \{f\}, \Pi)$.

Beweis: (2) H erfüllbar $\Rightarrow$ G erfüllbar

Sei $\mathcal{A}'$ eine Σ'-Struktur und $\beta : X \to U_{\mathcal{A}'}$ mit $\mathcal{A}'(\beta)(H) = 1$.

$$\begin{aligned} 1 = \mathcal{A}'(\beta)(H) &= \min_{a_1,\ldots,a_n \in U_{\mathcal{A}'}} \mathcal{A}'(\beta[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n])(G_1[f(x_1, \ldots, x_n)/y]) \\ &= \min_{a_1,\ldots,a_n \in U_{\mathcal{A}'}} (\beta[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto f_{\mathcal{A}'}(a_1, \ldots, a_n)])(G_1) \end{aligned}$$

d.h. für alle $a_1, \ldots, a_n \in U_{\mathcal{A}'}$ es gibt ein $b = f_{\mathcal{A}'}(a_1, \ldots, a_n) \in U_{\mathcal{A}'}$ mit:
$\mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto b])(G_1) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt: } \mathcal{A}(\beta)(G) &= \min_{a_1,\ldots,a_n \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n])(\exists y G_1) \\ &= \min_{a_1,\ldots,a_n \in U_{\mathcal{A}}} \max_{b \in U_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}(\beta[x_1 \mapsto a_1, \ldots, x_n \mapsto a_n, y \mapsto b])(G_1) = 1 \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{A}$ ist $\mathcal{A}'$ ohne die Funktion f.

Skolemisierung

Theorem:

Seien F, G und H wie oben angenommen. Dann:

(1) F und G sind äquivalent.

(2) G erfüllbar gdw. H erfüllbar

(bzgl. Σ-Str) (bzgl. Σ'-Str)

wobei $\Sigma' = (\Omega \cup SKF, \Pi)$, wenn $\Sigma = (\Omega, \Pi)$.

Beweisidee: Die Lemma (auf Seiten 32-33) wird sukzessive für alle existentiell quantifizierten Variablen (von links nach rechts) angewandt.

Klauselnormalform (konjunktive Normalform)

Transformationsregeln $\Rightarrow_K$

$$
\begin{array}{rrcll}
(1) & (F \leftrightarrow G) & \Rightarrow_K & (F \rightarrow G) \land (G \rightarrow F) & \\
(2) & (F \rightarrow G) & \Rightarrow_K & (\neg F \lor G) & \\
(3) & \neg(F \lor G) & \Rightarrow_K & (\neg F \land \neg G) & \\
(4) & \neg(F \land G) & \Rightarrow_K & (\neg F \lor \neg G) & \\
(5) & \neg\neg F & \Rightarrow_K & F & \\
(\neg\forall) & \neg\forall x F & \Rightarrow_K & \exists x \neg F & \\
(\neg\exists) & \neg\exists x F & \Rightarrow_K & \forall x \neg F & (NNF)
\end{array}
$$

(P) Pränex Normalform

(S) Skolemisierung

$$
\begin{array}{rrccl}
(6) & (F \land G) \lor H & \Rightarrow_K & (F \lor H) \land (G \lor H) & \\
(7) & (F \land \top) & \Rightarrow_K & F & \\
(8) & (F \land \bot) & \Rightarrow_K & \bot & \\
(9) & (F \lor \top) & \Rightarrow_K & \top & \\
(10) & (F \lor \bot) & \Rightarrow_K & F & (KNF)
\end{array}
$$

Gesamtbild

$$
\begin{array}{llll}
F & \overset{*}{\Rightarrow}_P & Q_1 y_1 \ldots Q_n y_n \; G & (G \text{ quantorenfrei}) \\
 & \overset{*}{\Rightarrow}_S & \forall x_1, \ldots, x_m \; H & (H \text{ quantorenfrei}) \\
 & \overset{*}{\Rightarrow}_K & \underbrace{\underbrace{\forall x_1, \ldots, x_n}_{\text{weglassen}} \bigwedge_{i=1}^{k} \underbrace{\bigvee_{j=1}^{n_i} L_{ij}}_{\text{Klauseln } C_i}}_{F'} &
\end{array}
$$

$N = \{C_1, \ldots, C_k\}$ heißt Klausel(normal)form (KNF) von F.

Merke: Die Variablen in Klauseln sind implizit allquantifiziert.

Falls F freie Variablen enthält, werden diese Variablen mit Konstanten ersetzt ($F(x)$ erfüllbar gdw. $\exists x F(x)$ erfüllbar)

Theorem: F ist erfüllbar, gdw. F' erfüllbar, gdw. N erfüllbar.

Viel Optimierungspotential vorhanden, wenn nur Erfüllbarkeit bewahrt werden muß und kann: Größenexplosion, kleine Stelligkeit von Skolemfunktionen.

Beispiel

$$F \equiv \exists z((\forall x(p(u, z, x))) \to (\forall y(q(z, y) \wedge (\exists x r(y, x)))))$$

Beispiel

$$F \equiv \exists z((\forall x(p(u,z,x))) \rightarrow (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x)))))$$

Pränexnormalform:

$$\begin{array}{lll} F & \equiv & \exists z((\neg\forall x p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x))))) \\ & \equiv & \exists z((\exists x \neg p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x))))) \qquad \text{(NNF)} \\ & \equiv & \exists z((\exists x \neg p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x_1 r(y,x_1))))) \qquad \text{(Bereinigung)} \\ & \equiv & \exists z \exists x \forall y \exists x_1(\neg p(u,z,x) \vee (q(z,y) \wedge r(y,x_1))) \qquad \text{(Pränexnormalform)} \end{array}$$

Beispiel

$$F \equiv \exists z((\forall x(p(u,z,x))) \to (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x)))))$$

Pränexnormalform:

$$\begin{array}{lcll}
F & \equiv & \exists z((\neg\forall x p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x))))) & \\
 & \equiv & \exists z((\exists x \neg p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x))))) & \text{(NNF)} \\
 & \equiv & \exists z((\exists x \neg p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x_1 r(y,x_1))))) & \text{(Bereinigung)} \\
 & \equiv & \exists z \exists x \forall y \exists x_1 (\neg p(u,z,x) \vee (q(z,y) \wedge r(y,x_1))) & \text{(Pränexnormalform)}
\end{array}$$

Skolemisierung $u \mapsto sk_u,\ z \mapsto sk_z;\ x \mapsto sk_x;\ x_1 \mapsto sk_{x_1}(y)$

$$\Rightarrow^*_S \ \forall y(\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \vee (q(sk_z, y) \wedge r(y, sk_{x_1}(y))))$$

(Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemnormalform)

Beispiel

$$F \equiv \exists z((\forall x(p(u,z,x))) \rightarrow (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x)))))$$

Pränexnormalform:

$$\begin{aligned} F &\equiv \exists z((\neg\forall x p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x))))) & \\ &\equiv \exists z((\exists x \neg p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x r(y,x))))) & \text{(NNF)} \\ &\equiv \exists z((\exists x \neg p(u,z,x)) \vee (\forall y(q(z,y) \wedge (\exists x_1 r(y,x_1))))) & \text{(Bereinigung)} \\ &\equiv \exists z \exists x \forall y \exists x_1(\neg p(u,z,x) \vee (q(z,y) \wedge r(y,x_1))) & \text{(Pränexnormalform)} \end{aligned}$$

Skolemisierung $u \mapsto sk_u, z \mapsto sk_z; x \mapsto sk_x; x_1 \mapsto sk_{x_1}(y)$

$$\Rightarrow_S^* \quad \forall y(\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \vee (q(sk_z, y) \wedge r(y, sk_{x_1}(y))))$$

(Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemnormalform)

Klauselnormalform:

$$\Rightarrow_K^* \quad \forall y((\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \vee q(sk_z, y)) \wedge (\neg p(sk_u, sk_z, sk_x) \vee r(y, sk_{x_1}(y))))$$

Klauselmenge: $N = \{\{\neg p(sk_u, sk_z, sk_x), q(sk_z, y)\}, \{\neg p(sk_u, sk_z, sk_x), r(y, sk_{x_1}(y))\}\}$

Kalküle

- Resolution
- Semantische Tableaux

Kalküle

- Resolution
- Semantische Tableaux

Resolution für Grundklauseln (Mengennotation)

Aussagenlogische Klauseln entsprechen Grundklauseln und umgekehrt.

Resolutionsregel:

$$\frac{C \cup \{A\} \qquad \{\neg A\} \cup D}{C \cup D}$$

$C \cup D$: Resolvente

A: resolviertes Atom

Beispielrefutation (Mengennotation)

1.	$\{\neg P(f(a)),\quad Q(b)\}$	(gegeben)
2.	$\{P(f(a)),\quad Q(b)\}$	(gegeben)
3.	$\{\neg P(g(b,a)),\quad \neg Q(b)\}$	(gegeben)
4.	$\{P(g(b,a))\}$	(gegeben)
5.	$\{Q(b)\}$	(Res. 2. in 1.)
6.	$\{\neg P(g(b,a))\}$	(Res. 5. in 3.)
8.	$\bot$	(Res. 4. in 6.)

Resolution für Grundklauseln (Klauselnotation)

Resolutionsregel:

$$\frac{C \vee A \qquad \neg A \vee D}{C \vee D}$$

$C \vee D$: Resolvente

A: resolviertes Atom

Faktorisieren:

$$\frac{C \vee L \vee L}{C \vee L}$$

„$\vee$“ wird in Klauseln als assoziativ und kommutativ aufgefaßt.

Beispielrefutation (Klauselnotation)

1.	$\neg P(f(a)) \vee \neg P(f(a)) \vee Q(b)$	(gegeben)
2.	$P(f(a)) \vee Q(b)$	(gegeben)
3.	$\neg P(g(b, a)) \vee \neg Q(b)$	(gegeben)
4.	$P(g(b, a))$	(gegeben)
5.	$\neg P(f(a)) \vee Q(b) \vee Q(b)$	(Res. 2. in 1.)
6.	$\neg P(f(a)) \vee Q(b)$	(Fakt. 5.)
7.	$Q(b) \vee Q(b)$	(Res. 2. in 6.)
8.	$Q(b)$	(Fakt. 7.)
9.	$\neg P(g(b, a))$	(Res. 8. in 3.)
10.	$\perp$	(Res. 4. in 9.)

Korrektheit und Vollständigkeit

Aussagenlogische Resolution ist korrekt und vollständig.

- Mengennotation: Resolutionsregel
- Klauselnotation: Resolutionsregel + Faktorisieren

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Möglichkeit für Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

wobei

- die Elternklauseln keine Variablen gemeinsam haben (bereinigt)
  $\mapsto$ ggf. umbenennen
- $\sigma(L) = \sigma(L')$

Prädikatenlogische Resolution

Grundidee

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar von Literalen erzeugen

Möglichkeit für Resolutionsregel

$$\frac{C_1 \cup \{L\} \qquad C_2 \cup \{\neg L'\}}{C_1\sigma \cup C_2\sigma}$$

wobei

- die Elternklauseln keine Variablen gemeinsam haben (bereinigt) $\mapsto$ ggf. umbenennen
- $\sigma(L) = \sigma(L')$

Nachteil: Viel zu viele Substitutionen σ mit $\sigma(L) = \sigma(L')$
Idee: Wähle die "allgemeinste" Substitution, mit $\sigma(L) = \sigma(L')$

Beispiel

$$\frac{\{p(x,f(x)),q(f(x))\} \qquad\qquad \{\neg r(f(y)),\neg q(y)\}}{\{p(x,f(x))\sigma,\neg r(f(y))\sigma\}}$$

$L = q(f(x)), L' = q(y)$

Nachteil: Viel zu viele Substitutionen σ mit $\sigma(L) = \sigma(L')$:

σ_1 $\quad$ $\sigma_1(x) = a,\ \sigma_1(y) = f(a)$

σ_1 $\quad$ $\sigma_1(x) = f(a),\ \sigma_1(y) = f(f(a))$

$\ldots$

Beispiel

$$\frac{\{p(x,f(x)),q(f(x))\} \qquad\qquad \{\neg r(f(y)),\neg q(y)\}}{\{p(x,f(x))\sigma,\neg r(f(y))\sigma\}}$$

$L = q(f(x))$, $L' = q(y)$

Nachteil: Viel zu viele Substitutionen σ mit $\sigma(L) = \sigma(L')$:

$\sigma_1 \qquad \sigma_1(x) = a,\ \sigma_1(y) = f(a)$

$\sigma_1 \qquad \sigma_1(x) = f(a),\ \sigma_1(y) = f(f(a))$

$\ldots$

Idee: Wähle die "allgemeinste" Substitution, mit $\sigma(L) = \sigma(L')$

$q(f(x)) \stackrel{?}{=} q(y) \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \stackrel{?}{=} y \qquad \Rightarrow \qquad y \stackrel{?}{=} f(x)$

$\sigma = [f(x)/y] \qquad \sigma(y) = f(x),\ \sigma(z) = z$ for $z \neq y$.

Unifikation

Sei $E = \{s_1 \stackrel{?}{=} t_1, \ldots, s_n \stackrel{?}{=} t_n\}$ (s_i, t_i Terme oder Atome) eine Menge von Gleichheitsproblemen.

Definition: Eine Substitution σ heißt ein Unifikator von E g.d.w.

$$\forall 1 \leq i \leq n : s_i\sigma = t_i\sigma.$$

Existiert ein Unifikator, so heißt E unifizierbar.

Definition: σ heißt allgemeiner als τ

$$\sigma \leq \tau \;\; :\Leftrightarrow \;\; \text{es gibt Subst.} \varrho : \sigma \circ \varrho = \tau$$

wobei $(\sigma \circ \varrho)(x) := (x\sigma)\varrho$ die Komposition von σ und ϱ als Abbildungen.[a]

[a] Ist wohldefiniert, weil $\sigma \circ \varrho$ einen endlichen Bereich hat.

Beispiel

$E = \{q(f(x)) \stackrel{?}{=} q(y)\}$

$\sigma_1 = [a/x, f(a)/y]$ ist ein Unifikator von E

$\sigma_2 = [f(a)/x, f(f(a))/y]$ ist ein Unifikator von E

$\sigma = [f(x)/y]$ ist ein Unifikator von E

σ ist allgemeiner als σ_1 und als σ_2:

$$\sigma_1 = \sigma \circ [a/x]$$
$$\sigma \circ [a/x](y) = \sigma(y)[a/x] = f(x)[a/x] = f(a)$$
$$\sigma \circ [a/x](x) = \sigma(x)[a/x] = x[a/x] = a$$

$$\sigma_2 = \sigma \circ [f(a)/x]$$
$$\sigma \circ [f(a)/x](y) = \sigma(y)[f(a)/x] = f(x)[f(a)/x] = f(f(a))$$
$$\sigma \circ [f(a)/x](x) = \sigma(x)[f(a)/x] = x[f(a)/x] = f(a)$$

Ein paar simple Fakten

- Jeder Term ist mit sich selbst unifizierbar (mittels id)
- Terme der Gestalt $f(s_1, \ldots, s_n)$, $f(t_1, \ldots, t_n)$ sind unifizierbar g.d.w. si und t_i unifizierbar für $1 \leq i \leq n$
- Atome der Gestalt $p(s_1, \ldots, s_n)$, $p(t_1, \ldots, t_n)$ sind unifizierbar g.d.w. si und t_i unifizierbar für $1 \leq i \leq n$
- Terme der Gestalt $f(s_1, \ldots, s_n)$, $g(t_1, \ldots, t_m)$ sind niemals unifb.
- Atome der Gestalt $p(s_1, \ldots, s_n)$, $q(t_1, \ldots, t_n)$ sind niemals unifb.
- Eine Variable x und ein Term t, der x nicht enthält, sind immer unifb. (mittels $[t/x]$)
- Eine Variable x und ein Term $t \neq x$, der x enthält, sind niemals unifizierbar

Unifikation nach Martelli/Montanari

$$
\begin{array}{lrll}
(1) & t \stackrel{?}{=} t, E & \Rightarrow_{MM} & E \\
(2) & f(s_1, \ldots, s_n) \stackrel{?}{=} f(t_1, \ldots, t_n), E & \Rightarrow_{MM} & s_1 \stackrel{?}{=} t_1, \ldots, s_n \stackrel{?}{=} t_n, E \\
(3) & f(\ldots) \stackrel{?}{=} g(\ldots), E & \Rightarrow_{MM} & \perp \\
(4) & x \stackrel{?}{=} t, E & \Rightarrow_{MM} & x \stackrel{?}{=} t, E[t/x] \\
 & & \text{falls } x \in var(E), x \notin var(t) & \\
(5) & x \stackrel{?}{=} t, E & \Rightarrow_{MM} & \perp \\
 & & \text{falls } x \neq t, x \in var(t) & \\
(6) & t \stackrel{?}{=} x, E & \Rightarrow_{MM} & x \stackrel{?}{=} t, E \\
 & & \text{falls } t \notin X &
\end{array}
$$

Beispiel 1

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(x,g(v,w)), f(x,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b))\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{g(a,x) \stackrel{?}{=} x, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), \textcolor{red}{x} \stackrel{?}{=} g(\textcolor{red}{x},a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(5)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \perp$$

Beispiel 2

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} g(x,g(v,w)), f(x,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b))\}$$

$$\stackrel{(3)}{\Longrightarrow}_{MM} \quad \perp$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{g(a,x) \stackrel{?}{=} z, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), z \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

$$\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} \quad \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), g(a,x) \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} && \{g(a,x) \stackrel{?}{=} z, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), z \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\} \\
&\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), g(a,x) \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\} \\
&\Rightarrow^{*}_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, v \stackrel{?}{=} v, w \stackrel{?}{=} b\}
\end{aligned}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(2)}{\Rightarrow}_{MM} && \{g(a,x) \stackrel{?}{=} z, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), z \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\} \\
&\overset{(4)}{\Rightarrow}_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), g(a,x) \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\} \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, v \stackrel{?}{=} v, w \stackrel{?}{=} b\} \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\}
\end{aligned}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b)\}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} && \{g(a,x) \stackrel{?}{=} z, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), z \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\} \\
&\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), g(a,x) \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\} \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, v \stackrel{?}{=} v, w \stackrel{?}{=} b\} \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\} \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,a), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} b, a \stackrel{?}{=} a, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\} \\
&\Rightarrow^*_{MM} && \{z \stackrel{?}{=} g(a,a), y \stackrel{?}{=} v, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\}
\end{aligned}$$

Beispiel 3

$$\{f(g(a,x),g(y,b)) \stackrel{?}{=} f(z,g(v,w)), f(z,g(v,w)) \stackrel{?}{=} f(g(x,a),g(v,b))\}$$

$$\begin{array}{ll}
\stackrel{(2)}{\Rightarrow}_{MM} & \{g(a,x) \stackrel{?}{=} z, g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), z \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\} \\
\stackrel{(4)}{\Rightarrow}_{MM} & \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), g(y,b) \stackrel{?}{=} g(v,w), g(a,x) \stackrel{?}{=} g(x,a), g(v,w) \stackrel{?}{=} g(v,b)\} \\
\Rightarrow^{*}_{MM} & \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, v \stackrel{?}{=} v, w \stackrel{?}{=} b\} \\
\Rightarrow^{*}_{MM} & \{z \stackrel{?}{=} g(a,x), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} w, a \stackrel{?}{=} x, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\} \\
\Rightarrow^{*}_{MM} & \{z \stackrel{?}{=} g(a,a), y \stackrel{?}{=} v, b \stackrel{?}{=} b, a \stackrel{?}{=} a, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\} \\
\Rightarrow^{*}_{MM} & \{z \stackrel{?}{=} g(a,a), y \stackrel{?}{=} v, x \stackrel{?}{=} a, w \stackrel{?}{=} b\}
\end{array}$$

Allgemeinster Unifikator:

$$[g(a,a)/z, v/y, a/x, b/w]$$

Vorsicht: a, b sind Konstanten. $[g(a,a)/z, v/y, x/a, w/b]$ ist keine Substitution!