Logik für Informatiker

3. Prädikatenlogik

Teil 7

8.07.2013

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

- Prädikatenlogische Signatur; Term, Atom, Formel
- Prädikatenlogisches Modell; Auswertung von Formeln in Modellen
- Erfüllbarkeit, Gültigkeit; Folgerung, Äquivalenz
- Wichtige Äquivalenzen
- Entscheidbarkeit der Erfüllbarkeit von Formeln

Ziel: Kalküle zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit (für Formeln und/oder Formelmengen)

- Normalformen, Skolemisierung

Kalküle

- Resolution
- Semantische Tableaux

Resolutionskalkül *Res* für allgemeine Klauseln

$$\frac{C \vee A \qquad D \vee \neg B}{(C \vee D)\sigma} \quad \text{falls } \sigma = \mathrm{mgu}(A, B) \qquad \text{[Resolution]}$$

$$\frac{C \vee L_1 \vee L_2}{(C \vee A)\sigma} \quad \text{falls } \sigma = \mathrm{mgu}(A, B) \quad \text{[Faktorisierung]}$$

Es wird immer implizit angenommen, dass die Variablen in einer der beiden Prämissen der Resolutionsregel ggfs. (bijektiv) umbenannt werden, so dass sie disjunkt mit denen der anderen Prämisse sind.

Dieses implizite Umbenennen werden wir nicht formalisieren.

Welche Variablennamen man verwendet ist egal.

Beispielsweise könnte man sich vorstellen, dass am Anfang alle Klauseln paarweise variablendisjunkt sind und das Unifikatoren so gewählt werden, dass in ihrem Wertebereich nur neue Variablen vorkommen.

Wichtig: Häufige Fehlerquellen

- Das Bereinigen (Umbenennen) nicht vergessen!
- Das Faktorisierungen (falls möglich) nicht vergessen!
- Selbstresolution ist möglich!

Resolution: Korrektheit und Vollständigkeit

$\text{Res}^\star(N)$ bezeichnet die Vereinigung der Ergebnisse aus aller möglichen Resolutions- und Faktorisierungsschritte auf N.

Theorem (**Korrektheit**)
Für eine Menge N von Klauseln gilt: Falls $\perp \in \text{Res}^*(N)$, so N unerfüllbar.

Theorem (**Vollständigkeit**)
Für eine Menge N von Klauseln gilt: Falls N unerfüllbar, so $\perp \in \text{Res}^*(N)$.

Idee: Reduktion auf Vollständigkeit der Resolution für Grundklauseln (also Aussagenlogischer Resolution).

$\mapsto$ Herbrandinterpretationen

Herbrand-Interpretationen

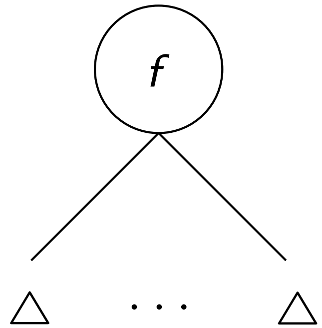
Ω enthalte immer mindestens ein Konstantensymbol.

Definition. Herbrand-Interpretationen (über Σ) sind Σ-Strukturen $\mathcal{A}$ mit:

1. $U_{\mathcal{A}} = T_\Sigma$ Menge der Grundterme, d.h. variablenfreien Terme über Σ ($U_{\mathcal{A}}$: Herbrand-Universum)

2. $f_{\mathcal{A}} : (s_1, \ldots, s_n) \mapsto f(s_1, \ldots, s_n), \; f/n \in \Omega$

$$f_{\mathcal{A}}(\triangle, \ldots, \triangle) =$$



d.h. vorgegeben sind Terme als Daten und Funktionen als Termkonstruktoren.

Variabel sind nur die Interpretationen der Prädikatensymbole

$$p_{\mathcal{A}} \subseteq T_\Sigma^m, \; p_m \in \Pi$$

Herbrand-Interpretationen als Mengen von Grundatomen

Satz.
Jede Menge von Grundatomen I identifiziert genau eine Herbrand-Interpretation $\mathcal{A}$ durch

$$(s_1, \ldots, s_n) \in p_{\mathcal{A}} \text{ genau dann, wenn } p(s_1, \ldots, s_n) \in I$$

Im folgenden werden wir daher nicht zwischen Herbrand-Interpretationen (über Σ) und Mengen von Σ-Grundatomen unterscheiden.

Herbrand-Interpretationen als Mengen von Grundatomen

Beispiel:

- Sei $\mathcal{A}$ eine Herbrand Interpretation mit:
  $p_{\mathcal{A}} = \{(a, b),\ (f(a), f(b)),\ (f(f(a)), f(f(b)))\}$ und
  $q_{\mathcal{A}} = \{a,\ f(a),\ f(f(a)),\ f(f(f(a))), \ldots\}$

  Dann sind folgende Grundatome wahr in $\mathcal{A}$:
  $p(a, b),\quad p(f(a), f(b)),\quad p(f(f(a)), f(f(b))),$
  $q(a),\quad q(f(a)),\quad q(f(f(a)),\quad q(f(f(f(a)))), \ldots.$

  Sei I die Menge dieser Grundatome. I identifiziert $\mathcal{A}$.

- Sei $I' = \{p(a, b),\ p(b, a),\ q(b),\ q(f(b)),\ q(f(f(b)))\}$.
  I' identifiziert die Herbrand interpretation $\mathcal{A}'$ mit:
  $p_{\mathcal{A}'} = \{(a, b), (b, a)\}$ und
  $q_{\mathcal{A}'} = \{b, f(b), f(f(b))\}$.

Existenz von Herbrand-Modellen

Definition. Eine Herbrand-Interpretation I heißt Herbrand-Modell von F, falls $I \models F$.

Theorem [Herbrand] Sei N eine Menge von Σ-Klauseln.

$$
\begin{array}{lll}
N \text{ erfüllbar} & \text{g.d.w.} & N \text{ hat Herbrand-Modell (über } \Sigma) \\
 & \text{g.d.w.} & G_\Sigma(N) \text{ hat Herbrand-Modell (über } \Sigma)
\end{array}
$$

wobei

$$G_\Sigma(N) = \{ C\sigma \text{ Grundklausel} \mid C \in N,\ \sigma : X \to T_\Sigma \}$$

die Menge der Grundinstanzen von N ist.

[Beweis später im Zusammenhang mit dem Vollständigkeitsbeweis für Resolution.]

Herbrand-Interpretationen als Mengen von Grundatomen

Beispiel:

$\Sigma_{Pres} = (\{0/0, s/1, +/2\},\ \{< /2, \leq /2\})$

Herbrand-Interpretation über Σ_{Pres}

$$
\begin{aligned}
I = \{ \quad & 0 \leq 0,\ 0 \leq s(0),\ 0 \leq s(s(0)),\ \ldots, \\
& 0 + 0 \leq 0,\ 0 + 0 \leq s(0),\ \ldots, \\
& \ldots,\ (s(0) + 0) + s(0) \leq s(0) + (s(0) + s(0)) \\
& \ldots \\
& s(0) + 0 < s(0) + 0 + 0 + s(0) \\
& \ldots\}
\end{aligned}
$$

Beispiel für G_Σ

Bzgl. Σ_{Pres} erhält man für

$$C = (x < y) \vee (y \leq s(x))$$

folgende Grundinstanzen:

$(0 < 0) \vee (0 \leq s(0))$
$(s(0) < 0) \vee (0 \leq s(s(0)))$
$\ldots$
$(s(0) + s(0) < s(0) + 0) \vee (s(0) + 0 \leq s(s(0) + s(0)))$
$\ldots$

Resolution: Vollständigkeit

Theorem (Vollständigkeit)
Für eine Menge N von Klauseln gilt: Falls N unerfüllbar, so $\bot \in \text{Res}^*(N)$.

Beweisplan:

1. Sei N eine unter Res saturierte Menge allgemeiner Klauseln, d.h. $\mathit{Res}(N) \subseteq N$. Dann ist auch $G_\Sigma(N)$ saturiert.

   Beweis: "Lifting-Lemma"

2. Sei N eine Menge von Σ-Klauseln.
   N erfüllbar g.d.w. N besitzt Herbrand-Modell über Σ.

3. Sei N Menge allgemeiner Klauseln mit $\mathit{Res}(N) \subseteq N$. Dann $N \models \bot$ genau dann, wenn $\bot \in N$.

Resolution: Vollständigkeit

Theorem (**Vollständigkeit**)
Für eine Menge N von Klauseln gilt: Falls N unerfüllbar, so $\bot \in \mathrm{Res}^*(N)$.

Beweisplan:

1. Sei N eine unter Res saturierte Menge allgemeiner Klauseln, d.h. $Res(N) \subseteq N$. Dann ist auch $G_\Sigma(N)$ saturiert.

   Beweis: "Lifting-Lemma"

2. Sei N eine Menge von Σ-Klauseln.
   N erfüllbar g.d.w. N besitzt Herbrand-Modell über Σ.

3. Sei N Menge allgemeiner Klauseln mit $Res(N) \subseteq N$. Dann $N \models \bot$ genau dann, wenn $\bot \in N$.

Lifting-Lemma

Lemma. Falls

$$\frac{C\sigma \qquad\qquad D\sigma}{C'} \qquad \text{[aussagenlogische Resolution]}$$

dann gibt es τ, so dass

$$\frac{C \qquad\qquad D}{C''} \qquad \text{[allgemeine Resolution]}$$

und $C' = C''\tau$.

Entsprechend für Faktorisieren.

Lifting-Lemma: Beweis

Beweis (Idee)

Sei $C = C_1 \vee L_1$, $D = C_2 \vee \neg L_2$.

$C\sigma = C_1\sigma \vee L_1\sigma$, $D\sigma = C_2\sigma \vee \neg L_2\sigma$.

$L_1\sigma = L_2\sigma$ und $C' = (C_1 \vee C_2)\sigma$.

L_1, L_2 unifizierbar. Sei $\rho = mgu(L_1, L_2)$.

Die Resolvente C'' ist dann $(C_1 \vee C_2)\rho$.

ρ ist allgemeiner als σ, d.h. es gibt eine Substitution τ mit $\sigma(x) = \tau(\rho(x))$ für alle $x \in X$.

$C''\tau = (C_1 \vee C_2)\rho\tau = (C_1 \vee C_2)\sigma = C'$.

Saturiertheit von Mengen allgemeiner Klauseln

Sei N eine Klauselmenge und

$$\mathrm{Res}(N) = N \cup \{R \mid R \text{ ist eine Resolvente zweier Klauseln aus } N \text{ oder Resultat der Faktorisierung einer Klausel aus } N\}$$

$\mathrm{Res}^0(N) = N$

$\mathrm{Res}^{n+1}(N) = \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^n(N))$

$\mathrm{Res}^\star(N) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Res}^n(N)$

(bezeichnet die Vereinigung der Resolventen aus aller möglichen Resolutionsschritte auf N)

Saturiertheit von Mengen allgemeiner Klauseln

Theorem.
Sei N eine unter Res saturierte Menge allgemeiner Klauseln, d.h. $Res(N) \subseteq N$. Dann ist auch $G_\Sigma(N)$ saturiert, d.h.

$$Res(G_\Sigma(N)) \subseteq G_\Sigma(N).$$

Saturiertheit von Mengen allgemeiner Klauseln

Theorem.
Sei N eine unter *Res* saturierte Menge allgemeiner Klauseln, d.h. $Res(N) \subseteq N$. Dann ist auch $G_\Sigma(N)$ saturiert, d.h.

$$Res(G_\Sigma(N)) \subseteq G_\Sigma(N).$$

Beweis. Sei $C' \in Res(G_\Sigma(N))$. D.h. es gibt: (i) Grundinstanzen $C\sigma$ und $D\sigma'$ von N mit Resolvente C', oder (ii) Grundinstanz $C\sigma$ s.d. C' durch Faktorisierung abgeleitet.

(i) Ist C' Resolvente, so können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\sigma = \sigma'$.

   (Nur wenn C und D nicht variablen-disjunkt wären, könnte dies schiefgehen. Dann aber dürfen und müssen wir die Variablen in einer Klausel umbenennen.)

   Wegen des Lifting-Lemmas sind C und D resolvierbar mit einer Resolvente C'' so dass $C''\tau = C'$, für eine geeignete Substitution τ. Weil $C'' \in N$ nach Voraussetzung, ist $C' \in G_\Sigma(N)$.

(ii) Analog für den Fall, dass C' durch Faktorisierung abgeleitet wurde.

Satz von Herbrand

Theorem (Herbrand)
Sei N eine Menge von Σ-Klauseln.

$$N \text{ erfüllbar g.d.w. } N \text{ besitzt Herbrand-Modell über } \Sigma$$

Beweis:

"$\Leftarrow$" trivial

"$\Rightarrow$"

$$\begin{array}{lll}
N \not\models \bot & \Rightarrow \bot \notin \mathit{Res}^*(N) & \text{(Res. korrekt)} \\
 & \Rightarrow \bot \notin G_\Sigma(\mathit{Res}^*(N)) & \\
 & \Rightarrow G_\Sigma(\mathit{Res}^*(N)) \text{ hat ein ('aussagenlogisches') Modell} & \\
 & \Rightarrow G_\Sigma(\mathit{Res}^*(N)) \text{ hat ein Herbrand Modell } I & \\
 & \Rightarrow I \models \mathit{Res}^*(N) & (I \text{ Herbrand-Modell}) \\
 & \Rightarrow I \models N & (N \subseteq \mathit{Res}^*(N))
\end{array}$$

Korrektheit und Vollständigkeit der allgemeinen Resolution

Theorem

Sei N Menge allgemeiner Klauseln mit $Res(N) \subseteq N$. Dann:

$$N \models \bot \text{ genau dann, wenn } \bot \in N$$

Korrektheit und Vollständigkeit der allgemeinen Resolution

Theorem

Sei N Menge allgemeiner Klauseln mit $Res(N) \subseteq N$. Dann:

$$N \models \perp \text{ genau dann, wenn } \perp \in N$$

Proof: "$\Leftarrow$" trivial

"$\Rightarrow$:" Sei N Klauselmenge mit $Res(N) \subseteq N$.
Dann $Res(G_\Sigma(N)) \subseteq G_\Sigma(N)$ (Theorem Seite 18)

Annahme: $N \models \perp$. Dann $G_\Sigma(N) \models \perp$ (Wir haben gezeigt, dass $G_\Sigma(N) \not\models \perp \Rightarrow G_\Sigma(N)$ hat Herbrand Modell I und $I \models N$)

Aber $G_\Sigma(N) \models \perp$ gdw. $\perp \in G_\Sigma(N)$ (aussag.log. Resol. vollständig + korrekt).

Es ist leicht zu sehen, dass $\perp \in G_\Sigma(N)$ gdw. $\perp \in N$.

Resolution: Vollständigkeit

Theorem (Vollständigkeit)
Für eine Menge N von Klauseln gilt: Falls N unerfüllbar, so $\bot \in \mathrm{Res}^*(N)$.

Beweis:

Sei $M = \mathrm{Res}^*(N)$. Dann $\mathrm{Res}(M) \subseteq M$. So: $M \models \bot$ gdw. $\bot \in M$.

Widerspruchsbeweis:

Annahme: $\bot \notin \mathrm{Res}^*(N)$. Dann $\mathrm{Res}^*(N) \not\models \bot$, d.h. $\mathrm{Res}^*(N)$ hat ein Modell $\mathcal{A}$.

Da $N \subseteq \mathrm{Res}^*(N)$, $\mathcal{A} \models N$, d.h. $N \not\models \bot$.

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (1)

Gegeben die Formel F:

$$
\begin{aligned}
&(\forall x \forall y (p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \wedge \\
&\ \forall x \forall y (r(x,y) \rightarrow s(x,y)) \\
&) \rightarrow \\
&(\forall x \forall y ((\exists z (p(x,z) \wedge r(z,y))) \rightarrow \\
&\qquad\qquad (\exists z (q(x,z) \wedge s(z,y))))) \\
&)
\end{aligned}
$$

Gezeigt werden soll die Allgemeingültigkeit von F mittels Resolution

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (2)

Dazu zeigen wir die Unerfüllbarkeit von $\neg F$:

$$
\begin{array}{l}
\neg((\forall x \forall y(p(x,y) \rightarrow q(x,y)) \wedge \\
\quad \forall x \forall y(r(x,y) \rightarrow s(x,y)) \\
\quad) \rightarrow \\
\quad (\forall x \forall y((\exists z(p(x,z) \wedge r(z,y))) \rightarrow \\
\qquad\qquad (\exists z(q(x,z) \wedge s(z,y)))) \\
\quad))
\end{array}
$$

Diese Formel muss zunächst in Klauselnormalform transformiert werden

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (3)

Elimination der Implikationen:

$$
\begin{aligned}
&\neg(\neg(\forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee q(x,y)) \wedge \\
&\quad \forall x \forall y(\neg r(x,y) \vee s(x,y)) \\
&\quad) \quad \vee \\
&\quad (\forall x \forall y(\neg(\exists z(p(x,z) \wedge r(z,y))) \vee \\
&\qquad\qquad (\exists z(q(x,z) \wedge s(z,y)))) \\
&\quad))
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (4)

Äußere Negation nach innen schieben:

$$
\begin{array}{l}
((\forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee q(x,y)) \wedge \\
\quad \forall x \forall y(\neg r(x,y) \vee s(x,y)) \\
\quad) \;\; \wedge \\
\neg(\forall x \forall y(\neg(\exists z(p(x,z) \wedge r(z,y))) \vee \\
\qquad\qquad\qquad \exists z(q(x,z) \wedge s(z,y))) \\
))
\end{array}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (5)

Negation an den Allquantoren vorbei:

$$
\begin{array}{l}
((\forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee q(x,y)) \wedge \\
\quad \forall x \forall y(\neg r(x,y) \vee s(x,y)) \\
\quad) \;\; \wedge \\
(\exists x \exists y \neg(\neg(\exists z(p(x,z) \wedge r(z,y))) \vee \\
\qquad\qquad\qquad \exists z(q(x,z) \wedge s(z,y))) \\
))
\end{array}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (6)

De Morgan:

$$
\begin{aligned}
&((\forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee q(x,y)) \wedge \\
&\quad \forall x \forall y(\neg r(x,y) \vee s(x,y)) \\
&\quad) \ \ \wedge \\
&\ (\exists x \exists y((\exists z(p(x,z) \wedge r(z,y))) \wedge \\
&\qquad\qquad \neg \exists z(q(x,z) \wedge s(z,y))) \\
&))
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (7)

Negation am Quantor vorbei:

$$
\begin{aligned}
&((\forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee q(x,y)) \wedge \\
&\quad \forall x \forall y(\neg r(x,y) \vee s(x,y)) \\
&\quad) \ \wedge \\
&(\exists x \exists y((\exists z(p(x,z) \wedge r(z,y))) \wedge \\
&\qquad\qquad \forall z \neg(q(x,z) \wedge s(z,y))) \\
&))
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (8)

De Morgan

$$
\begin{array}{l}
((\forall x \forall y(\neg p(x,y) \vee q(x,y))\wedge \\
\quad \forall x \forall y(\neg r(x,y) \vee s(x,y)) \\
\quad) \;\; \wedge \\
\;(\exists x \exists y((\exists z(p(x,z) \wedge r(z,y)))\wedge \\
\qquad\qquad \forall z(\neg q(x,z) \vee \neg s(z,y))) \\
))
\end{array}
$$

Nun ist die Formel in Negationsnormalform

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (9)

Bereinigen der Formel führt zu:

$$
\begin{array}{l}
((\forall x \, \forall y \, (\neg p(x, \; y\,) \lor q(x, \; y\,))\land \\
\quad \forall x' \forall y' (\neg r(x', y') \lor s(x', y')) \\
\quad) \;\; \land \\
\;(\exists x'' \exists y'' ((\exists z (p(x'', z) \land r(z, y'')))\land \\
\qquad\qquad\qquad \forall z' (\neg q(x'', z') \lor \neg s(z', y''))) \\
))
\end{array}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (10)

Da die Formel bereinigt und in NNF ist, kann man alle Quantoren nach vorne ziehen:

$$
\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall x' \forall y' \exists x'' \exists y'' \exists z \forall z' (\\
&(\neg p(x, y) \vee q(x, y)) \wedge \\
&(\neg r(x', y') \vee s(x', y')) \\
&p(x'', z) \wedge \\
&r(z, y'') \wedge \\
&(\neg q(x'', z') \vee \neg s(z', y'')) \\
&)
\end{aligned}
$$

Nun ist die Formel in Pränexnormalform, die Matrix der Formel ist auch schon in konjunktiver Normalform

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (11)

Skolemisieren:

$x'' \mapsto f(x, y, x', y'), \quad y'' \mapsto g(x, y, x', y'), \quad z \mapsto h(x, y, x', y')$

$$
\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall x' \forall y' \forall z' (\\
&(\neg p(x, y) \vee q(x, y)) \wedge \\
&(\neg r(x', y') \vee s(x', y')) \\
&p(f(x, y, x', y'), h(x, y, x', y')) \wedge \\
&r(h(x, y, x', y'), g(x, y, x', y')) \wedge \\
&(\neg q(f(x, y, x', y'), z') \vee \neg s(z', g(x, y, x', y'))) \\
&)
\end{aligned}
$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (13)

In Klauselmengenschreibweise:

1. $\{\neg p(x, y), q(x, y)\}$
2. $\{\neg r(x', y'), s(x', y')\}$
3. $\{p(f(x, y, x', y'), h(x, y, x', y'))\}$
4. $\{r(h(x, y, x', y'), g(x, y, x', y'))\}$
5. $\{\neg q(f(x, y, x', y'), z'), \neg s(z', g(x, y, x', y'))\}$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (14)

1. $\{\neg p(x,y), q(x,y)\}$
2. $\{\neg r(x',y'), s(x',y')\}$
3. $\{p(f(x,y,x',y'), h(x,y,x',y'))\}$
4. $\{r(h(x,y,x',y'), g(x,y,x',y'))\}$
5. $\{\neg q(f(x,y,x',y'), z'), \neg s(z', g(x,y,x',y'))\}$

Resolution der Klauseln 1. und 3. Dazu zunächst Umbenennung der Variablen x, y in 3., um die Klauseln variablendisjunkt zu machen

Verwendeter MGU: $[f(u,v,x',y')/x, h(u,v,x',y')/y]$

$$\frac{1 : \{\neg p(x,y), q(x,y)\} \qquad 3' : \{p(f(u,v,x',y'), h(u,v,x',y'))\}}{6 : \ \{q(f(u,v,x',y'), h(u,v,x',y'))\}}$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (15)

1. $\{\neg p(x, y), q(x, y)\}$
2. $\{\neg r(x', y'), s(x', y')\}$
3. $\{p(f(x, y, x', y'), h(x, y, x', y'))\}$
4. $\{r(h(x, y, x', y'), g(x, y, x', y'))\}$
5. $\{\neg q(f(x, y, x', y'), z'), \neg s(z', g(x, y, x', y'))\}$
6. $\{q(f(u, v, x', y'), h(u, v, x', y'))\}$

Resolution der Klauseln 2 und 4. Dazu zunächst Umbenennung der Variablen x', y' in 4, um die Klauseln variablendisjunkt zu machen

Verwendeter MGU: $[h(x, y, u, v)/x', g(x, y, u, v)/y']$

$$\frac{2: \ \{\neg r(x', y'), s(x', y')\} \qquad 4': \ \{r(h(x, y, u, v), g(x, y, u, v))\}}{7: \ \{s(h(x, y, u, v), g(x, y, u, v))\}}$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (16)

1. $\{\neg p(x, y), q(x, y)\}$
2. $\{\neg r(x', y'), s(x', y')\}$
3. $\{p(f(x, y, x', y'), h(x, y, x', y'))\}$
4. $\{r(h(x, y, x', y'), g(x, y, x', y'))\}$
5. $\{\neg q(f(x, y, x', y'), z'), \neg s(z', g(x, y, x', y'))\}$
6. $\{q(f(u, v, x', y'), h(u, v, x', y')\}$
7. $\{s(h(x, y, u, v), g(x, y, u, v))\}$

Resolution der Klauseln 5 und 6. Dazu zunächst Umbenennung der Variablen x', y' in 6, um die Klauseln variablendisjunkt zu machen.

Verwendeter MGU: $[u/x, v/y, u'/x', v'/y', h(u, v, u', v')/z']$

$$\frac{5: \ \{\neg q(f(x, y, x', y'), z'), \neg s(z', g(x, y, x', y'))\} \quad 6: \ \{q(f(u, v, u', v'), h(u, v, u', v')\}}{8: \ \{\neg s(h(u, v, u', v'), g(u, v, u', v'))\}}$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (17)

1. $\{\neg p(x, y), q(x, y)\}$
2. $\{\neg r(x', y'), s(x', y')\}$
3. $\{p(f(x, y, x', y'), h(x, y, x', y'))\}$
4. $\{r(h(x, y, x', y'), g(x, y, x', y'))\}$
5. $\{\neg q(f(x, y, x', y'), z'), \neg s(z', g(x, y, x', y'))\}$
6. $\{q(f(u, v, x', y'), h(u, v, x', y'))\}$
7. $\{s(h(x, y, u, v), g(x, y, u, v))\}$
8. $\{\neg s(h(u, v, u', v'), g(u, v, u', v'))\}$

Resolution der Klauseln 7 und 8. Dazu zunächst Umbenennung der Variablen u, v in 8, um die Klauseln variablendisjunkt zu machen.

Verwendeter MGU: $[u''/x, v''/y, u'/u, v'/v]$

$$\frac{7: \{s(h(x, y, u, v), g(x, y, u, v))\} \quad 8': \{\neg s(h(u'', v'', u', v'), g(u'', v'', u', v'))\}}{\perp}$$

Prädikatenlogische Resolution: Beispiel (18)

Damit ist die leere Klausel $\perp$ abgeleitet,

also ist die Klauselmenge unerfüllbar, (Korrektheit des Resolutionskalküls)

also ist die Formel $\neg F$ unerfüllbar,

also ist die Formel F allgemeingültig

Prädikatenlogische Resolution

- Zu zeigen: F (un)erfüllbar

- Zu zeigen: F allgemeingültig

- Zu zeigen: $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models F$

Prädikatenlogische Resolution

- Zu zeigen: F (un)erfüllbar

  Pränexnormalform, Skolemnormalform, KNF, Resolution

  Falls $\perp$ hergeleitet werden kann: F unerfüllbar

- Zu zeigen: F allgemeingültig

- Zu zeigen: $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models F$

Prädikatenlogische Resolution

- Zu zeigen: F (un)erfüllbar

  Pränexnormalform, Skolemnormalform, KNF, Resolution

  Falls $\perp$ hergeleitet werden kann: F unerfüllbar

- Zu zeigen: F allgemeingültig

  Zeige, dass $\neg F$ unerfüllbar ist.

- Zu zeigen: $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models F$

Prädikatenlogische Resolution

- Zu zeigen: F (un)erfüllbar

  Pränexnormalform, Skolemnormalform, KNF, Resolution

  Falls $\perp$ hergeleitet werden kann: F unerfüllbar

- Zu zeigen: F allgemeingültig

  Zeige, dass $\neg F$ unerfüllbar ist.

- Zu zeigen: $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models F$

  Zeige, dass $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg F$ unerfüllbar ist.

Verbindung mit Prolog

```
gerade([]).
gerade([_|Tail]):- ungerade(Tail).
ungerade([_|Tail]):- gerade(Tail).

ungerade([a,b,c]).
```

Verbindung mit Prolog

```
gerade([]).
gerade([_|Tail]):- ungerade(Tail).
ungerade([_|Tail]):- gerade(Tail).

ungerade([a,b,c]).
```

$$
\begin{aligned}
N := \quad & \{\mathrm{gerade}(nil), \\
& \forall x, y(\mathrm{ungerade}(y) \rightarrow \mathrm{gerade}(\mathrm{list}(x, y))) \\
& \forall x, y(\mathrm{gerade}(y) \rightarrow \mathrm{ungerade}(\mathrm{list}(x, y)))
\end{aligned}
$$

$$N \models \mathrm{ungerade}(\mathrm{list}(a, \mathrm{list}(b, \mathrm{list}(c, nil))))$$

Verbindung mit Prolog

$$N := \{\text{gerade}(nil), \quad \forall x, y(\text{ungerade}(y) \rightarrow \text{gerade}(\text{list}(x,y))) \quad \forall x, y(\text{gerade}(y) \rightarrow \text{ungerade}(\text{list}(x,y)))$$

$$N \models \text{ungerade}(\text{list}(a, \text{list}(b, \text{list}(c, nil))))$$

gdw.

$$N \cup \neg\text{ungerade}(\text{list}(a, \text{list}(b, \text{list}(c, nil))))$$

$$\frac{\neg\text{ungerade}(\text{list}(a,\text{list}(b,\text{list}(c,nil)))) \qquad \neg\text{gerade}(y) \vee \text{ungerade}(\text{list}(x,y))}{\neg\text{gerade}(\text{list}(b,\text{list}(c,nil)))} \qquad MGU: \quad [\text{list}(b, \text{list}(c, nil))/y]$$

$$\frac{\neg\text{gerade}(\text{list}(b,\text{list}(c,nil))) \qquad \neg\text{ungerade}(y) \vee \text{gerade}(\text{list}(x,y))}{\neg\text{ungerade}(\text{list}(c,nil))} \qquad MGU: \quad [\text{list}(c, nil)/y]$$

$$\frac{\neg\text{ungerade}(\text{list}(c,nil)) \qquad \neg\text{gerade}(y) \vee \text{ungerade}(\text{list}(x,y))}{\neg\text{gerade}(nil)} \qquad MGU: \quad [nil/y]$$

$$\frac{\neg\text{gerade}(nil) \qquad \text{gerade}(nil)}{\perp}$$

Verbindung mit Prolog

$N := \{\text{gerade}(nil),\ \text{ungerade}(y) \to \text{gerade}(\text{list}(x, y)),\ \text{gerade}(y) \to \text{ungerade}(\text{list}(x, y))$

$N \models \text{ungerade}(\text{list}(a, \text{list}(b, \text{list}(c, nil))))$

$\text{ungerade}(\text{list}(a, \text{list}(b, \text{list}(c, nil))))$

- unifizierbar mit dem Kopf der Regel $\text{gerade}(y) \to \text{ungerade}(\text{list}(x, y))$;
  MGU: $[x/a, \text{list}(b, \text{list}(c, nil))/y]$
- ist beweisbar, wenn $\text{gerade}(y)[x/a, \text{list}(b, \text{list}(c, nil))/y] = \text{gerade}(\text{list}(b, \text{list}(c, nil)))$ beweisbar ist.

$\text{gerade}(\text{list}(b, \text{list}(c, nil)))$

- unifizierbar mit dom Kopf der Regel $\text{ungerade}(y) \to \text{gerade}(\text{list}(x, y))$
  MGU: $[b/x, \text{list}(c, nil)/y]$.
- ist beweisbar, wenn $\text{ungerade}(y)[b/x, \text{list}(c, nil)/y] = \text{ungerade}(\text{list}(c, nil))$ beweisbar ist.

$\text{ungerade}(\text{list}(c, nil))$

- unifizierbar mit dem Kopf der Regel $\text{gerade}(y) \to \text{ungerade}(\text{list}(x, y))$;
  MGU: $[c/x, nil/y]$
- ist beweisbar, wenn$\text{gerade}(y)[c/x, nil/y] = \text{gerade}(nil)$ beweisbar ist.

$\text{gerade}(nil)$ ist mit dem Fakt $\text{gerade}(nil)$ unifizierbar, ist also bewiesen.

Verbindung mit Prolog

Anfragen

- Eine Anfrage bedeutet, daß das Ziel, das durch die Anfrage repräsentiert wird, bewiesen werden muß. Dies durch das Programm, das momentan in der Wissensbasis ist.

Prinzip

- Abarbeitung einer Anfrage geht von der Anfrage selbst aus.
- Anfrage wird mit Hilfe von Klauseln auf einfachere Aussagen vereinfacht, bis diese "Fakten" des Prolog-Programms sind.

Abarbeitungsregeln

- Wenn ein Ziel mit einem Fakt unifizierbar ist, ist es bewiesen.
- Wenn ein Ziel mit dem Kopf einer Regel unifizierbar ist, dann ist es bewiesen, wenn der Rumpf der Regel bewiesen ist.
- Wenn ein Ziel aus mehreren durch Kommata getrennte Teilzielen besteht, ist es bewiesen, falls alle Teilziele bewiesen sind.

Zusammenfassung: Prädikatenlogische Resolution

- Prädikatenlogische Resolutionsregel
- Faktorisierung
- Kombination von Resolution und Faktorisierung
- Häufige Fehlerquellen
- Korrektheit und Vollständigkeit
- Beispiel

Kalküle

- Resolution
- Semantische Tableaux

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Beweis durch Fallunterscheidung
- Top-down-Analyse der gegebenen Formeln

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl), wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Nachteile

- Mehr als eine Regel

Formeltypen

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg F$
- $F \wedge G$
- $\neg(F \vee G)$
- $\neg(F \rightarrow G)$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$F \wedge G$	F	G
$\neg(F \vee G)$	$\neg F$	$\neg G$
$\neg(F \rightarrow G)$	F	$\neg G$
$\neg\neg F$	F	

Formeltypen

Disjunktive Formeln: Typ β

- $\neg(F \wedge G)$
- $F \vee G$
- $F \rightarrow G$

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

β	β_1	β_2
$\neg(F \wedge G)$	$\neg F$	$\neg G$
$F \vee G$	F	G
$F \rightarrow G$	$\neg F$	G

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \\ \alpha_2\end{array}}$$

Konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

Disjunktiv

$$\begin{array}{ccc} & p \vee q & \\ / & & \backslash \\ p & & q \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\phi\\ \neg\phi\end{array}}{\bot}$$

Widerspruch

$$\begin{array}{c} \phi \\ \neg\phi \\ | \\ \bot \end{array}$$

Instanzen der α und β-Regel

Instanzen der α-Regel

$$\frac{P \wedge Q}{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \vee Q)}{\begin{array}{c} \neg P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg(P \rightarrow Q)}{\begin{array}{c} P \\ \neg Q \end{array}} \qquad \frac{\neg\neg P}{P}$$

Instanzen der β-Regel

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q} \qquad \frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q} \qquad \frac{P \rightarrow Q}{\neg P \mid Q}$$

Zusätzlich: Prädikatenlogische Formeltypen

universell		existentiell	
γ	$\gamma(t)$	δ	$\delta(t)$
$\forall x F$	$F[t/x]$	$\exists x F$	$F[t/x]$
$\neg\exists x F$	$\neg F[t/x]$	$\neg\forall x F$	$\neg F[t/x]$

Zusätzlich: Prädikatenlogische Tableauregeln

γ-Regel

$$\frac{\gamma}{\gamma(t)}$$

universell

$$\begin{array}{c} \forall x q(x) \\ | \\ q(t) \end{array}$$

wobei t ein beliebiger Term ist.

δ-Regel

$$\frac{\delta}{\delta(f(y_1,\ldots,y_n))}$$

existentiell

$$\begin{array}{c} \exists x p(x, y_1, \ldots, y_n) \\ | \\ p(f(y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n) \end{array}$$

wobei f eine *neue* Skolemfunktion ist, und $y_1, \ldots, y_n$ die freien Variablen in δ sind.

Skolemisierung ist also ein Bestandteil des Kalküls und wird nicht als ein Vorverarbeitungsschritt vorausgesetzt. Aber natürlich könnte man ebensogut vorher Skolemisieren, was auch Vorteile haben kann.

Instanzen der γ und δ-Regel

Instanzen der γ-Regel

$$\frac{\forall x F(x)}{F(t)} \qquad \frac{\neg \exists x F(x)}{\neg F(t)}$$

Instanzen der γ und δ-Regel

Instanzen der γ-Regel

$$\frac{\forall x F(x)}{F(t)} \qquad\qquad \frac{\neg\exists x F(x)}{\neg F(t)}$$

Instanzen der δ-Regel

$$\frac{\exists x F(x, y_1, \ldots, y_n)}{F(f(y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n)} \qquad\qquad \frac{\neg\forall x F(x, y_1, \ldots, y_n)}{\neg F(f(y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n)}$$

wobei f eine *neue* Skolemfunktion ist und $y_1, \ldots, y_n$ die freien Variablen in $\exists x F(x, y_1, \ldots, y_n)$ (resp. $\forall x F(x, y_1, \ldots, y_n)$) sind.

Determinismus der Regeln

α- und β-Regeln

deterministisch (wie in Aussagenlogik)

Determinismus der Regeln

α- und β-Regeln

deterministisch (wie in Aussagenlogik)

γ-Regel

- hochgradig nicht-deterministisch
- muss für Vollständigkeit mehrfach angewendet werden (pro Ast)
- Grund für Nicht-Terminierung

Determinismus der Regeln

α- und β-Regeln

deterministisch (wie in Aussagenlogik)

γ-Regel

- hochgradig nicht-deterministisch
- muss für Vollständigkeit mehrfach angewendet werden (pro Ast)
- Grund für Nicht-Terminierung

δ-Regel

- nicht-deterministisch
- muss dennoch nur einmal pro Ast und Formel angewendet werden