Logik für Informatiker

Prädikatenlogik: Anwendungen

Erweiterungen

29.07.2014

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

Aussagenlogik

- Syntax, Semantik
- Kalküle (Resolution, Tableaux)
- Anwendungen

Prädikatenlogik

- Syntax, Semantik
- Kalküle (Resolution, Tableaux)

Bis jetzt

Aussagenlogik

- Syntax, Semantik
- Kalküle (Resolution, Tableaux)
- Anwendungen

Prädikatenlogik

- Syntax, Semantik
- Kalküle (Resolution, Tableaux)

Heute: Anwendungen und Erweiterungen

Implementierungen

Implementierung

Aussagenlogik

Wahrheitstabellen, KNF, DNF

Erfüllbarkeit

Implementierung

Erfüllbarkeit, Aussagenlogik

Prolog?

Implementierung

Erfüllbarkeit, Aussagenlogik

Prolog?

```
sat(true).
sat(not(false)).
sat(or([X|L])):- sat(X); sat(or(L)).
sat(and([])).
sat(and([X|L])):-sat(X), sat(and(L)).
```

Aussagenlogik

Beweise durch Resolution:

SPASS

Vampire

E

Theoremenbeweiser für Prädikatenlogik

Aussagenlogik

Tableaux

z.B. KRHyper

Theoremenbeweiser für Prädikatenlogik

Aussagenlogik

Das Davis-Putnam-Verfahren [Martin Davis and Hilary Putnam, 1960]

Gegeben: N Klauselmenge

Ziel: Entscheide, ob N erfüllbar ist. (Falls ja: Modell)

Idee: Erfüllende Wertebelegung inkrementell gebildet.

Wir beginnen mit der leeren Belegung und versuchen diese Belegung zu einem Modell für N zu erweitern.

Falls $\mathcal{A}$ partielle Wertebelegung, so können Literale und Klauseln in $\mathcal{A}$ wahr, falsch oder undefiniert sein.

Eine Klausel ist wahr in $\mathcal{A}$, wenn ein Literal in C wahr ist; falsch, wenn alle Literale falsch sind. Sonst ist C undefiniert (unresolved).

Eine alternative Formulierung

UnitPropagation

$M||F, C \vee L \Rightarrow M, L||F, C \vee L$ falls $M \models \neg C$, und L undef. in M

Decide

$M||F \Rightarrow M, L^d||F$ falls L oder $\neg L$ kommt in F vor, L undef. in M

Fail

$M||F, C \Rightarrow$ Fail falls $M \models \neg C$, M enthält kein Entscheidungsliter

Backjump

$M, L^d, N||F \Rightarrow M, L'||F$ falls $\begin{cases} \text{es gibt eine Klausel } C \vee L' \text{ mit:} \\ F \models C \vee L', M \models \neg C, \\ L' \text{ undef. in } M \\ L' \text{ oder } \neg L' \text{ kommt in } F \text{ vor.} \end{cases}$

Eine alternative Formulierung

Backjump

$$M, L^d, N || F \Rightarrow M, L' || F \qquad \text{falls} \begin{cases} \text{es gibt eine Klausel } C \vee L' \text{ mit:} \\ F \models C \vee L', M \models \neg C, \\ L' \text{ undef. in } M \\ L' \text{ oder } \neg L' \text{ kommt in } F \text{ vor.} \end{cases}$$

Es gibt mehrere mögliche backjump Klauseln. Ein Kandidat ist $\neg L_1 \vee \cdots \vee \neg L_n$ wo $L_1, \ldots, L_n$ alle Entscheidungsliterale in $ML^d N$ sind.

(Es gibt manchmal bessere Kandidaten).

Beispiel

Wertebelegung:	Klauselmenge:
$\emptyset$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$

Beispiel

Wertebelegung:	Klauselmenge:	
$\emptyset$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Pures Litera
$\neg P_1$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Pures Litera

Beispiel

Wertebelegung:	Klauselmenge:	
$\emptyset$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Pures Litera
$\neg P_1$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Pures Litera
$\neg P_1 \neg P_3$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	

Beispiel

Wertebelegung:	Klauselmenge:	
$\emptyset$	$\mid\mid \neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Pures Litera
$\neg P_1$	$\mid\mid \neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Pures Litera
$\neg P_1 \neg P_3$	$\mid\mid \neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Decide)

Beispiel

Wertebelegung:	Klauselmenge:	
$\emptyset$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Pures Litera
$\neg P_1$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Pures Litera
$\neg P_1 \neg P_3$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Decide)
$\neg P_1 \neg P_3 P_5{}^d$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (UnitProp)

Beispiel

Wertebelegung:	Klauselmenge:	
$\emptyset$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Pures Liter
$\neg P_1$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee \P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Pures Liter
$\neg P_1 \neg P_3$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Decide)
$\neg P_1 \neg P_3 {P_5}^d$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (UnitProp)
$\neg P_1 \neg P_3 {P_5}^d \neg P_6$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Backtrack)

Beispiel

Wertebelegung:	Klauselmenge:	
$\emptyset$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Pures Liter
$\neg P_1$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Pures Liter
$\neg P_1 \neg P_3$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Decide)
$\neg P_1 \neg P_3 {P_5}^d$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (UnitProp)
$\neg P_1 \neg P_3 {P_5}^d \neg P_6$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Backtrack)
$\neg P_1 \neg P_3 \neg P_5$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	

Beispiel

Wertebelegung:	Klauselmenge:	
$\emptyset$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Pures Liter
$\neg P_1$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Pures Liter
$\neg P_1 \neg P_3$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Decide)
$\neg P_1 \neg P_3 P_5{}^d$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (UnitProp)
$\neg P_1 \neg P_3 P_5{}^d \neg P_6$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (Backtrack)
$\neg P_1 \neg P_3 \neg P_5$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	$\Rightarrow$ (UnitProp)
$\neg P_1 \neg P_3 \neg P_5 P_6$	$\|\|\neg P_1 \vee P_2, \neg P_3 \vee P_4, \neg P_5 \vee \neg P_6, P_6 \vee P_5, P_6 \vee \neg P_5$	

Implementierungen

Davis-Putnam Verfahren

zchaff

`https://www.princeton.edu/~chaff/software.html`

Cleaneling:

`http://fmv.jku.at/cleaneling/`

The educational variant of the prover, where some optimizations have been left out to keep the code readable.

SAT competition and benchmarks:

`http://www.satcompetition.org`

Grosse Benchmarks, z.B. slp-synthesis-aes-top27.cnf

Theoremenbeweiser: Prädikatenlogik

SPASS:

`http://www.spass-prover.org`

SPASS can interpret the .dfg files in the examples/ folder.

The web interface

http://www.spass-prover.org/webspass/index.html

provides a nice first-order example. If you add

```
list_of_settings(SPASS).
 {*
 set_flag(DocProof,1).
 *}
 end_of_list.
```

before the end of the document, SPASS outputs a proof where you can see the intermediate inference steps.

Theoremenbeweiser

Vampire:

`http://www.vprover.org/`

E:

`http://www.eprover.org/`

Anwendungen

Logical puzzles

Beispiel: Tante Agatha

Jemand, der in Schloss Dreadbury wohnt, hat Tante Agatha ermordet. Agatha, ihr Butler und ihr Neffe Charles waren die einzigen Bewohner von Schloss Dreadbury. Ein Mörder hasst immer sein Opfer und ist niemals reicher als sein Opfer. Charles hasst niemanden, den Tante Agatha gehasst hat. Agatha hat jeden gehasst außer ihrem Butler. Der Butler hasst jeden, der nicht reicher ist als Tante Agatha. Der Butler hasst jeden, den Tante Agatha gehasst hat. Niemand hasst jeden. Agatha war nicht der Butler.

Wer hat Tante Agatha ermordet?

Formalisieren

Jemand, der in Schloss Dreadbury wohnt, hat Tante Agatha ermordet.

- $\exists x\ (\text{schlossbewohner}(x) \land \text{ermordet}(x, \text{a}))$

Agatha, ihr Butler und ihr Neffe Charles waren die einzigen Bewohner von Schloss Dreadbury.

- $\forall x\ (\text{schlossbewohner}(x) \leftrightarrow (x \approx \text{a} \lor x \approx \text{b} \lor x \approx \text{c}))$

Formalisieren

Ein Mörder hasst immer sein Opfer und ist niemals reicher als sein Opfer.

- $\forall x, y\ (\text{ermordet}(x, y) \to \text{hasst}(x, y))$
  $\forall x, y\ (\text{ermordet}(x, y) \to \neg\, \text{reicher}(x, y))$

Charles hasst niemanden, den Tante Agatha gehasst hat.

- $\forall x\ (\text{hasst}(\text{c}, x) \to \neg\, \text{hasst}(\text{a}, x))$

Agatha hat jeden gehasst außer ihrem Butler.

- $\forall x\ (\neg\, \text{hasst}(\text{a}, x) \leftrightarrow x \approx \text{b})$

Formalisieren

Der Butler hasst jeden, der nicht reicher ist als Tante Agatha.

- $\forall x\ (\neg\, \mathsf{reicher}(x, \mathsf{a}) \rightarrow \mathsf{hasst}(\mathsf{b}, x))$

Der Butler hasst jeden, den Tante Agatha gehasst hat.

- $\forall x\ (\mathsf{hasst}(\mathsf{a}, x) \rightarrow \mathsf{hasst}(\mathsf{b}, x))$

Niemand hasst jeden.

- $\forall x\ \exists y\ (\neg\, \mathsf{hasst}(x, y))$

Agatha war nicht der Butler.

- $\neg\, \mathsf{a} \approx \mathsf{b}$

Klauselmenge

$\exists x \; (\text{schlossbewohner}(x) \wedge \text{ermordet}(x, \text{a}))$

$\mapsto$

$(\text{schlossbewohner}(sk) \wedge \text{ermordet}(sk, \text{a}))$

Klauselmenge

$\exists x\ (\text{schlossbewohner}(x) \wedge \text{ermordet}(x, \text{a}))$

$\mapsto$

$(\text{schlossbewohner}(sk) \wedge \text{ermordet}(sk, \text{a}))$

Since we know that $(\text{schlossbewohner}(x) \leftrightarrow (x \approx a) \vee (x \approx b) \vee (x \approx c))$

we use instead

$\text{ermordet}(a, \text{a}) \vee \text{ermordet}(b, \text{a}) \vee \text{ermordet}(c, \text{a})$

Klauselmenge

$\forall x \; \exists y \; (\neg \, \mathrm{hasst}(x, y))$

$\mapsto$

$\neg \, \mathrm{hasst}(x, sk1(x))$ Not what is meant.

$\neg \, \mathrm{hasst}(x, sk1(x)) \wedge \mathrm{schlossbewohner}(sk1(x))$

Klauselmenge

$\forall x \; \exists y \; (\neg \, \mathrm{hasst}(x, y))$

$\mapsto$

$\neg \, \mathrm{hasst}(x, sk1(x))$ Not what is meant.

$\neg \, \mathrm{hasst}(x, sk1(x)) \wedge \mathrm{schlossbewohner}(sk1(x))$

Since we know that $(\mathrm{schlossbewohner}(x) \leftrightarrow (x \approx a) \vee (x \approx b) \vee (x \approx c))$

we use instead

$\neg \, \mathrm{hasst}(x, a) \vee \neg \, \mathrm{hasst}(x, b) \vee \neg \, \mathrm{hasst}(x, c)$

Klauselmenge

1. $\mathsf{ermordet}(a, \mathsf{a}) \vee \mathsf{ermordet}(b, \mathsf{a}) \vee \mathsf{ermordet}(c, \mathsf{a})$
2. $\neg\mathsf{schlossbewohner}(x) \vee (x \approx \mathsf{a} \vee x \approx \mathsf{b} \vee x \approx \mathsf{c})$
3. $\mathsf{schlossbewohner}(a)$
4. $\mathsf{schlossbewohner}(b)$
5. $\mathsf{schlossbewohner}(c)$
6. $\neg\mathsf{ermordet}(x, y) \vee \mathsf{hasst}(x, y)$
7. $\neg\mathsf{ermordet}(x, y) \vee \neg\mathsf{reicher}(x, y)$
8. $\neg\mathsf{hasst}(\mathsf{c}, x) \vee \neg\mathsf{hasst}(\mathsf{a}, x)$
9. $\mathsf{hasst}(\mathsf{a}, x) \vee x \approx \mathsf{b}$
10. $x \approx \mathsf{b} \vee \neg\mathsf{hasst}(\mathsf{a}, x)$
11. $\mathsf{reicher}(x, \mathsf{a}) \vee \mathsf{hasst}(\mathsf{b}, x)$
12. $\neg\ \mathsf{hasst}(x, a) \vee \neg\ \mathsf{hasst}(x, b) \vee \neg\ \mathsf{hasst}(x, c)$
13. $\neg\ \mathsf{a} \approx \mathsf{b}$
14. $\neg\ \mathsf{c} \approx \mathsf{b}$

Klauselmenge

1.	$\mathrm{ermordet}(a, \mathrm{a}) \vee \mathrm{ermordet}(b, \mathrm{a}) \vee \mathrm{ermordet}(c, \mathrm{a})$	
2.	$\neg\mathrm{schlossbewohner}(x) \vee (x \approx \mathrm{a} \vee x \approx \mathrm{b} \vee x \approx \mathrm{c})$	
3.	$\mathrm{schlossbewohner}(a)$	
4.	$\mathrm{schlossbewohner}(b)$	
5.	$\mathrm{schlossbewohner}(c)$	
6.	$\neg\mathrm{ermordet}(x, y) \vee \mathrm{hasst}(x, y)$	
7.	$\neg\mathrm{ermordet}(x, y) \vee \neg\mathrm{reicher}(x, y)$	
8.	$\neg\mathrm{hasst}(\mathrm{c}, x) \vee \neg\mathrm{hasst}(\mathrm{a}, x)$	
9.	$\mathrm{hasst}(\mathrm{a}, x) \vee x \approx \mathrm{b}$	
10.	$x \approx \mathrm{b} \vee \neg\mathrm{hasst}(\mathrm{a}, x)$	
11.	$\mathrm{reicher}(x, \mathrm{a}) \vee \mathrm{hasst}(\mathrm{b}, x)$	
12.	$\neg\ \mathrm{hasst}(x, a) \vee \neg\ \mathrm{hasst}(x, b) \vee \neg\ \mathrm{hasst}(x, c)$	
13.	$\neg\ \mathrm{a} \approx \mathrm{b}$	
14.	$\neg\ \mathrm{c} \approx \mathrm{b}$	
15.	$\neg\mathrm{ermordet}(c, y) \vee \neg\mathrm{hasst}(a, y)$	[Res. 6, 8]
16.	$\neg\mathrm{ermordet}(c, y) \vee y \approx b$	[Res. 15, 9]
17.	$\neg\mathrm{ermordet}(c, a)$	[Res. 16, 13]
18.	$\mathrm{hasst}(a, a)$	[Res. 13, 9]
19.	$\mathrm{hasst}(a, c)$	[Res. 14, 9]
20.	$\neg\mathrm{hasst}(c, a)$	[Res. 19, 8]
21.	$\mathrm{hasst}(b, a)$	[Res. 11, 18]
22.	$\mathrm{hasst}(b, c)$	[Res. 11, 19]
23.	$\neg\mathrm{hasst}(b, b)$	[Res. 21, 22, 12]
24.	$\mathrm{richer}(b, a)$	[Res. 23, 11]
25.	$\neg\mathrm{ermordet}(b, a)$	[Res. 24, 7]
26.	$\mathrm{ermordet}(a, a)$	[Res. 25, 17, 1]

Ähnliche Probleme

Programmverifikation

int [] $\textsc{BubbleSort}$(int[] a) {
  int i, j, t;
  for ($i := |a| - 1; i > 0; i := i - 1$) {
    for ($j := 0; j < i; j := j + 1$) {
      if ($a[j] > a[j+1]$){$t := a[j]$;
        $a[j] := a[j+1]$;
        $a[j+1] := t$};
}} return a}

Ähnliche Probleme

Sicherheitsprotokolle

Ähnliche Probleme

Mathematik

Anwendungsbereiche

MATHEMATIK

Aufgaben
- Beweisen
- Beweisüberprüfung

Theorien
- Zahlen
- Polynomen
- Funktionen auf Zahlenbereichen
- Algebren

VERIFIKATION

Aufgaben
- **Programme**
  - Korrektheit
  - Terminierung
- **reaktive/hybride Systeme**
  - Sicherheit

Theorien
- Zahlen
- Datentypen
- Funktionen auf Zahlenbereichen

DATENBANKEN

Aufgaben
- Konsistenz
- Anfragen beantworten
- Kleiner Suchraum

Theorien
- Logik erster Stufe
- Datalog
- ...
- Komplexe Theorien
  - Funktionen
  - Zahlen

komplexe Systeme (MAS, mit eingebetteter Software, Datenbanken)

Anwendungsbereiche

MATHEMATIK

Aufgaben
- Beweisen
- Beweisüberprüfung

Theorien

VERIFIKATION

Aufgaben
- **Programme**
  - Korrektheit
  - Terminierung
- **reaktive/hybride Systeme**
  - Sicherheit

DATENBANKEN

Aufgaben
- Konsistenz
- Anfragen beantworten
- Kleiner Suchraum

Theorien

Formale Methoden

Verfahren: - Probleme $\mapsto$ als logische Formeln kodiert

- Verifikationsaufgaben: zu Erfüllbarkeit/Gültigkeitstests reduziert

komplexe Systeme (MAS, mit eingebetteter Software, Datenbanken)

Anwendungsbereiche

MATHEMATIK

Aufgaben

- Beweisen
- Beweisüberprüfung

Theorien

- Zahlen
- Polynomen
- Funktionen auf Zahlenbereichen
- Algebren

VERIFIKATION

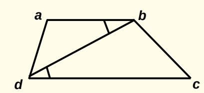
Aufgaben

- **Programme**
  - Korrektheit
  - Terminierung
- **reaktive/hybride Systeme**
  - Sicherheit

Theorien

- Zahlen
- Datentypen
- Funktionen auf Zahlenbereichen

Beispiel: Geometrie



(A1) $\forall x \forall y \forall u \forall v (T(x, y, u, v) \rightarrow P(x, y, u, v))$

(A2) $\forall x \forall y \forall u \forall v (P(x, y, u, v) \rightarrow E(x, y, v, u, v, y))$

(A3) $T(a, b, c, d)$

A1 $\wedge$ A2 $\wedge$ A3 $\rightarrow$ $E(a, b, d, c, d, b)$

Anwendungsbereiche

MATHEMATIK

Aufgaben

– Beweisen

– Beweisüberprüfung

Theorien

– Algebren

VERIFIKATION

Aufgaben

– **Programme**

– Korrektheit

– Terminierung

– **reaktive/hybride Systeme**

– Sicherheit

DATENBANKEN

Aufgaben

– Konsistenz

– Anfragen beantworten

– Kleiner Suchraum

Theorien

Formale Methoden

Verfahren: - Probleme $\mapsto$ als logische Formeln kodiert

- Verifikationsaufgaben: zu Erfüllbarkeit/Gültigkeitstests reduziert

komplexe Systeme (MAS, mit eingebetteter Software, Datenbanken)

Beispiel: Sicherheitsprotokole

Ziel: zwei Personen (Alice und Bob) wollen miteinander kommunizieren

- über ein **unsicheres** Daten- oder Telefonnetz,
- **sicher**, d. h., ohne daß ein Eindringling (Charlie) mithören oder sich als Alice oder Bob ausgeben kann.

Beispiel: Sicherheitsprotokole

Ziel: zwei Personen (Alice und Bob) wollen miteinander kommunizieren

- über ein **unsicheres** Daten- oder Telefonnetz,
- **sicher**, d. h., ohne dass ein Eindringling (Charlie) mithören oder sich als Alice oder Bob ausgeben kann.

Hilfsmittel: Verschlüsselung

- Alice und Bob vereinbaren einen gemeinsamen Schlüssel und nutzen ihn, um ihr Gespräch zu verschlüsseln.
- Nur wer den Schlüssel kennt, kann das Gespräch entschlüsseln.

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Problem: wie kommen die Gesprächspartner an den gemeinsamen Schlüssel?

- Persönliche Übergabe kommt nicht immer in Frage.
- Wird der gemeinsame Schlüssel über das Netz unverschlüsselt verschickt, könnte Charlie ihn abfangen oder austauschen.
- Annahme: es gibt eine sichere Schlüsselzentrale, mit der Alice und Bob jeweils einen gemeinsamen Schlüssel vereinbart haben.

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Das folgende Schlüsselaustauschverfahren wurde 1993 von den beiden Kryptographen Neuman und Stubblebine vorgeschlagen:

Schritt 1:

Alice schickt (offen) Identifikation und Zufallszahl an Bob.

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Das folgende Schlüsselaustauschverfahren wurde 1993 von den beiden Kryptographen Neuman und Stubblebine vorgeschlagen:

Schritt 1:

Alice schickt Bob die Nachricht 1: A, Na.

Die Nachricht enthält den Namen von Alice, A, und eine Zufallszahl Na.

Die Aufgabe von Na liegt darin, diesen Protokollauf eindeutig zu kennzeichnen, um das wiederholen von Nachrichten durch einen Angreifer sinnlos werden zu lassen.

Alice schickt (offen) Identifikation und Zufallszahl an Bob.

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Schritt 2:

Bob leitet Nachricht weiter an Schlüsselzentrale („Trust“).

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Bob schickt die Nachricht 2 : $B, E(Kbt, A, Na, Tb), Nb$ an Trust

Nachdem Bob die Nachricht von Alice erhalten hat, weiss er, dass sie einen sicheren Schlüssel mit ihm etablieren will. Deshalb schickt Bob die Nachricht 2 an Trust.

Schritt 2:

Die Nachricht enthält:

- seinen Namen, B,
- einen verschlüsselten Mittelteil
- eine von Bob generierte Zufallszahl, Nb,
- Tb: Zeitspanne für die Gültigkeitsdauer des Schlüssels

Der Term $E(Kbt, A, Na, Tb)$ steht für die Nachricht A, Na, Tb verschlüsselt mit dem Schlüssel Kbt, dem sicheren Schlüssel zwischen Bob und Trust.

Bob leitet Nachricht weiter an Schlüsselzentrale („Trust“).

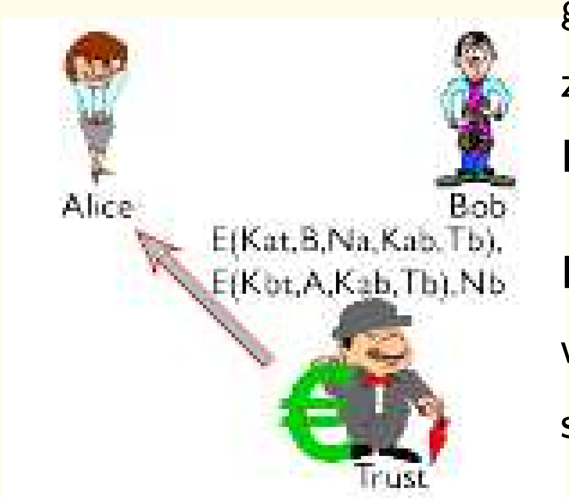
Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Schritt 3:

Trust schickt Nachricht an Alice. Darin: ein neuer gemeinsamer Schlüssel, einmal für Alice und einmal für Bob verschlüsselt.

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Schritt 3:



Trust schickt die Nachricht 3

$$E(Kat, B, Na, Kab, Tb), E(Kbt, A, Kab, Tb), Nb \text{ an Alice.}$$

Nachdem Trust Bob's Nachricht gelesen und entschlüsselt hat, generiert er den sicheren Schlüssel *Kab* für die Kommunikation zwischen Alice und Bob.
Er verschickt den Schlüssel mit Nachricht 3 an Alice.

Der erste Teil der Nachricht kann von Alice entschlüsselt werden während sie den zweiten Teil später einfach an Bob weiterleitet, siehe Schritt 4.

Trust schickt Nachricht an Alice. Darin: ein neuer gemeinsamer Schlüssel, einmal für Alice und einmal für Bob verschlüsselt.

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Schritt 4:

Alice leitet den neuen gemeinsamen Schlüssel weiter an Bob.

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Schritt 4:

Alice schickt die Nachricht 4:

$$E(Kbt, A, Kab, Tb), E(Kab, Nb) \text{ an Bob.}$$

Alice liest Nachricht 3, entschlüsselt den ersten Teil durch den gemeinsamen Schlüssel *Kat* mit Trust und erhält so den neuen Schlüssel *Kab*, um mit Bob zu kommunizieren.

Sie leitet den zweiten Teil von Trust's Nachricht an Bob weiter und fügt die Nachricht $E(Kab, Nb)$ hinzu.

Alice leitet den neuen gemeinsamen Schlüssel weiter an Bob.

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

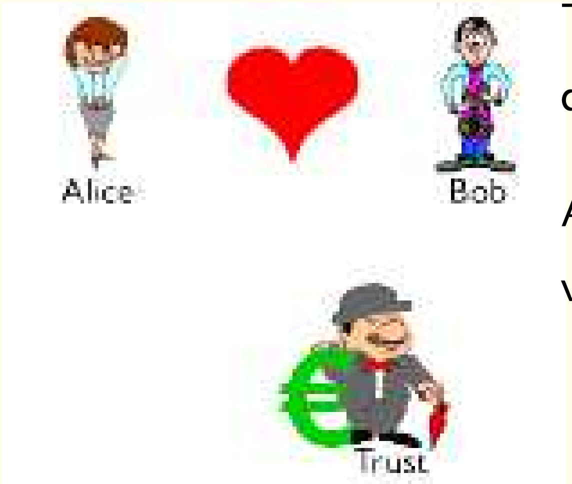
Schritt 5:

Alice und Bob können nun mit dem gemeinsamen Schlüssel kommunizieren.

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Bob liest Nachricht 4, entschlüsselt den ersten Teil und erhält so auch den Schlüssel *Kab*.

Schritt 5:



Diesen verwendet er dann zur Entschlüsselung des zweiten Teils und vergleicht die enthaltene Zufallszahl *Nb* mit der, die er ursprünglich in Nachricht 2 an Trust schickte.

Auf diese Weise ist sich Bob sicher, dass die Nachricht von Alice stammt und *Kab* der gewünschte Schlüssel ist.

Alice und Bob können nun mit dem gemeinsamen Schlüssel kommunizieren.

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

1. $A \xrightarrow{\quad A,\ N_a \quad} B$

2. $B \xrightarrow{\quad B,\ N_b,\ E_{K_{bt}}(A,\ N_a,\ T_b) \quad} T$

3. $T \xrightarrow{\quad E_{K_{at}}(B,\ N_a,\ K_{ab},\ T_b),\ E_{K_{bt}}(A,\ K_{ab},\ T_b),\ N_b \quad} A$

4. $A \xrightarrow{\quad E_{K_{bt}}(A,\ K_{ab},\ T_b),\ E_{K_{ab}}(N_b) \quad} B$

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Ist das Verfahren sicher?

Wir übersetzen das Problem in Formeln und lassen sie von einem Theorembeweiser untersuchen.

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Zuerst formalisieren wir die Eigenschaften des Protokolls:

- Wenn Alice/Bob/Trust eine Nachricht in einem bestimmten Format bekommt, dann schickt er/sie eine andere Nachricht ab.

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Zuerst formalisieren wir die Eigenschaften des Protokolls:

- Wenn Alice/Bob/Trust eine Nachricht in einem bestimmten Format bekommt, dann schickt er/sie eine andere Nachricht ab.

Dann formalisieren wir die Eigenschaften des Angreifers:

- Wenn eine Nachricht übermittelt wird, kann Charlie sie mithören.
- Wenn Charlie eine verschlüsselte Nachricht bekommt und den passenden Schlüssel hat, kann er sie entschlüsseln.
- Wenn Charlie eine Nachricht hat, dann kann er sie an Alice/Bob/Trust abschicken.

...

Formalisierung der Eigenschaften des Protokolls

$\boxed{1.\ A, Na}$

(1) $Ak(key(at, t))$

(2) $M(sent(a, b, pair(a, na)))$

Formel (1) beschreibt, dass Alice am Anfang den Schlüssel *at* für die Kommunikation mit Trust besitzt. (Wir lassen "K" bei der Benamung von Schlüsseln weg.)

Formel (2) formalisiert Nachricht 1.

Nachrichten werden durch die dreistellige Funktion "sent" ausgedrückt, wobei das erste Argument den Absender bezeichnet, das zweite den Empfänger und das dritte den Inhalt der Nachricht.

Die Konstante a bezeichnet Alice, b Bob, t Trust und i Intruder.

Die Funktionen "pair" (triple, quadr) gruppieren Sequenzen von Nachrichten entsprechender Länge.

Formalisierung der Eigenschaften des Protokolls

$\boxed{2.\ B, Nb, E(Kbt, A, Na, Tb)}$

(3) $Bk(key(bt, t))$

(4) $\forall xa, xna[M(sent(xa, b, pair(xa, xna))) \quad \rightarrow$
$M(sent(b, t, triple(b, nb(xna), encr(triple(xa, xna, tb(xna)), bt)))))]$

Formel (3): Bob besitzt den Schlüssel *bt* zur Kommunikation mit Trust.

Formel (4): Wann immer er eine Nachricht in der Form von Nachricht 1 erhält (Formel 2), schickt er die Anfrage nach einem Schlüssel an Trust wie in Nachricht 2 festgelegt.

Die Verschlüsselung wird mit Hilfe der zweistelligen Funktion "encr" beschrieben.

Das erste Argument der Funktion ist die zu verrschlüsselnde Nachricht und das zweite Argument der benutzte Schlüssel.

Alle Symbole die mit einem kleinen x anfangen, bezeichnen Variablen.
Die Funktionen *nb* und *tb* generieren Bob's Zufallszahl und Ablaufdatum aus *xna*, *xa*'s (Alice's) Zufallszahl.

Formalisierung der Eigenschaften des Protokolls

3. $E(Kat, B, Na, Kab, Tb), E(Kbt, A, Kab, Tb), Nb$

(5) $Tk(key(at, a))) \wedge Tk(key(bt, b))$

(6) $\forall xb, xnb, xa, xna, xbet, xbt, xat, xk$
$$[(M(sent(xb, t, triple(xb, xnb, encr(triple(xa, xna, xbet), xbt)))) \wedge$$
$$Tk(key(xbt, xb)) \wedge Tk(key(xat, xa))) \rightarrow$$
$$M(sent(t, xa, triple(encr(quadr(xb, xna, kt(xna), xbet), xat),$$
$$encr(triple(xa, kt(xna), xbet), xbt),$$
$$xnb)))]$$

(5) Trust besitzt die Schlüssel für Alice und Bob und ...

(6) ... antwortet entsprechend des Protokolls auf Nachricht 2.

Entschlüsselung wird hierbei durch Unifikation mit einer entsprechenden Termstruktur realisiert, wobei zusätzlich überprüft wird, dass Trust die benötigten Schlüssel auch besitzt.

Trust generiert den neuen Schlüssel durch die Funktion kt aus der Zufallszahl xna.

Formalisierung der Eigenschaften des Protokolls

4. $E(Kbt, A, Kab, Tb), E(Kab, Nb)$

(7) $\forall xnb, xbet, xk, xm, xb, xna$
$[M(sent(t, a, triple(encr(quadr(xb, xna, xk, xbet), at), xm, xnb)) \rightarrow$
$(M(sent(a, xb, pair(xm, encr(xnb, xk)))) \wedge Ak(key(xk, xb)))]$

(8) $\forall xbet, xk, xnb, xa, xna$
$[M(sent(xa, b, pair(encr(triple(xa, xk, tb(xna)), bt), encr(nb(xna), xk))) \rightarrow$
$Bk(key(xk, xa))]$

Formel (7): Alice antwortet in korrekter Weise auf Nachricht 3 und merkt sich den neuen Schlüssel.

Formel (8) beschreibt Bob's Verhalten nachdem er Alices Nachricht erhalten hat. Bob entschlüsselt die Nachricht und extrahiert den neuen Schlüssel.

Formalisierung des Angreifers

Der Angreifer wird als unermüdlicher Hacker implementiert, der keine Möglichkeit unversucht lässt, das Protokoll anzugreifen.

Er hört alle Nachrichten ab und zerlegt sie in ihre Bestandteile, solange er dazu nicht einen Schlüssel braucht, den er nicht hat.

Die Bestandteile werden dann auf jeder Art und Weise zu neuen Nachrichten beliebiger Länge komponiert.

Jeder Bestandteil wird als Schlüssel in Betracht gezogen und sowohl zum verschlüsseln als auch zum entschlüsseln verwendet.

Alle so generierten Nachrichten werden verschickt.

Die Menge aller Nachrichten(teile), die der Intruder so erhält, wird durch das Prädikat "*Im*" ausgedrückt.

Der Angreifer

- Die Teilnehmer (Participants) sind Alice, Bob, Trust und Intruder:

  (9) $P(a) \wedge P(b) \wedge P(t) \wedge P(i)$

Der Angreifer

- Die Teilnehmer (Participants) sind Alice, Bob, Trust und Intruder:

  (9) $P(a) \wedge P(b) \wedge P(t) \wedge P(i)$

- Intruder hört alle Nachrichten ab.

  (10) $\forall xa, xb, xm[M(sent(xa, xb, xm)) \rightarrow Im(xm)]$

Der Angreifer

- Die Teilnehmer (Participants) sind Alice, Bob, Trust und Intruder:

  (9) $P(a) \wedge P(b) \wedge P(t) \wedge P(i)$

- Intruder hört alle Nachrichten ab.

  (10) $\forall xa, xb, xm[M(sent(xa, xb, xm)) \rightarrow Im(xm)]$

- Er dekomponiert und entschlüsselt alle Nachrichten, soweit er dafür den Schlüssel besitzt.

  (11) $\forall u, v[Im(pair(u, v)) \rightarrow (Im(u) \wedge Im(v))]$

Der Angreifer

- Die Teilnehmer (Participants) sind Alice, Bob, Trust und Intruder:

  (9) $P(a) \wedge P(b) \wedge P(t) \wedge P(i)$

- Intruder hört alle Nachrichten ab.

  (10) $\forall xa, xb, xm[M(sent(xa, xb, xm)) \rightarrow Im(xm)]$

- Er dekomponiert und entschlüsselt alle Nachrichten, soweit er dafür den Schlüssel besitzt.

  (11) $\forall u, v[Im(pair(u, v)) \rightarrow (Im(u) \wedge Im(v))]$

  (12) $\forall u, v, w[Im(triple(u, v, w)) \rightarrow (Im(u) \wedge Im(v) \wedge Im(w))]$

  (13) $\forall u, v, w, z[Im(quadr(u, v, w, z)) \rightarrow (Im(u) \wedge Im(v) \wedge Im(w) \wedge Im(z))]$

  (14) $\forall u, v, w[(Im(encr(u, v)) \wedge Ik(key(v, w)) \rightarrow Im(u)]$

Der Angreifer

- Alle Nachrichten(teile) werden auf alle möglichen Arten neu komponiert.

  (15) $\forall u, v[(Im(u) \wedge Im(v) \rightarrow Im(pair(u, v))]$

  (16) $\forall u, v, w[(Im(u) \wedge Im(v) \wedge Im(w)) \rightarrow Im(triple(u, v, w))$

  (17) $\forall u, v, w, z[(Im(u) \wedge Im(v) \wedge Im(w) \wedge Im(z)) \rightarrow Im(quadr(u, v, w, z))$

Der Angreifer

- Alle Nachrichten(teile) werden auf alle möglichen Arten neu komponiert.

  (15) $\forall u, v[(Im(u) \wedge Im(v) \rightarrow Im(pair(u, v))]$

  (16) $\forall u, v, w[(Im(u) \wedge Im(v) \wedge Im(w)) \rightarrow Im(triple(u, v, w))$

  (17) $\forall u, v, w, z[(Im(u) \wedge Im(v) \wedge Im(w) \wedge Im(z)) \rightarrow Im(quadr(u, v, w, z))$

- Jeder Nachrichtenteil wird auch als Schlüssel aufgefasst und zur Verschlüsselung benutzt.

  (18) $\forall u, v, w[(Im(v), P(w) \rightarrow Ik(key(v, w))]$

  (19) $\forall u, v, w[(Im(v), P(w), Ik(key(v, w))) \rightarrow Im(encr(u, v))]$

Der Angreifer

- Alle Nachrichten(teile) werden auf alle möglichen Arten neu komponiert.

  (15) $\forall u, v[(Im(u) \wedge Im(v) \rightarrow Im(pair(u, v))]$

  (16) $\forall u, v, w[(Im(u) \wedge Im(v) \wedge Im(w)) \rightarrow Im(triple(u, v, w))$

  (17) $\forall u, v, w, z[(Im(u) \wedge Im(v) \wedge Im(w) \wedge Im(z)) \rightarrow Im(quadr(u, v, w, z))$

- Jeder Nachrichtenteil wird auch als Schlüssel aufgefasst und zur Verschlüsselung benutzt.

  (18) $\forall u, v, w[(Im(v), P(w) \rightarrow Ik(key(v, w))]$

  (19) $\forall u, v, w[(Im(v), P(w), Ik(key(v, w))) \rightarrow Im(encr(u, v))]$

- Der Angreifer schickt alles was er hat an jeden.

  (20) $\forall x, y, u[(P(x) \wedge P(y) \wedge Im(u)) \rightarrow M(sent(x, y, u))]$

Formalisierung

Zum Schluss müssen wir noch formalisieren was es bedeutet, dass der Angreifer Erfolg hat.

Dies ist dann der Fall, wenn er einen Schlüssel zur Kommunikation mit Bob hat, von dem Bob glaubt, es sei ein Schlüssel für Alice.

$\exists x[Ik(key(x, b)) \wedge Bk(key(x, a))]$

Automatische Analyse

Die Formalisierung des Protokolls, Formeln (1)-(8) zusammen mit den Angreiferformeln (9)-(20) und der Erfolgsbedingung für den Angreifer kann man nun in einen Theorembeweiser eingeben.

Dieser antwortet “erfüllbar”.
Das beweist dann automatisch, dass der Angreifer das Protokoll brechen kann und der kritische Schlüssel die Zufallszahl Na ist.

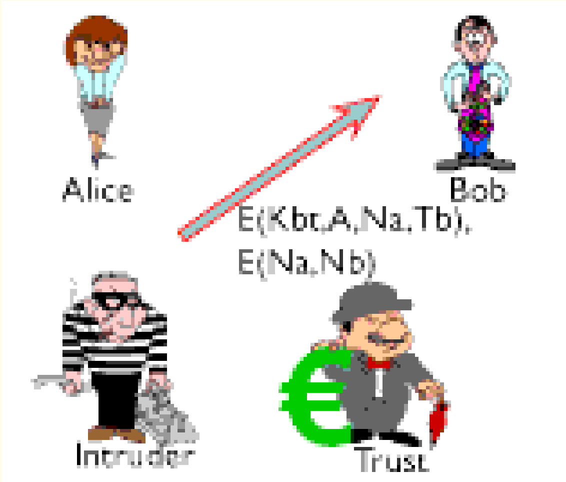
Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Was kann passieren?

Charlie fängt die letzte Nachricht von Alice ab.

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

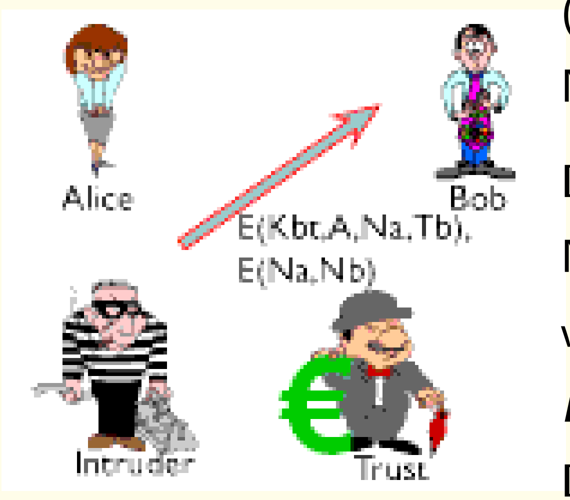
Was kann passieren?



Charlie schickt eine veränderte Nachricht an Bob.

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Was kann passieren?



Intruder schickt die Nachricht 5:

$$E(Kbt, A, Na, Tb), E(Na, Nb) \text{ an Bob.}$$

Das Problem des Protokolls liegt darin, dass die Nachricht $E(Kbt, A, Kab, Tb)$ in Nachricht 4 und die Nachricht $E(Kbt, A, Na, Tb)$ in Nachricht 2 fast identisch sind.
Die beiden Nachrichten unterscheiden sich nur an der 2. Position (Nachricht 4 enthält dort den Schlüssel Kab, Nachricht 2 die Zufallszahl Na.)

Da der Intruder alle Nachrichten lesen und auch selbst Nachrichten schicken kann, fängt er also Nachricht 4 ab, wiederholt den obigen Teil aus Nachricht 2 und fügt $E(Na, Nb)$ hinzu.
Die beiden Zufallszahlen wurden bereits unverschlüsselt verschick

Charlie schickt eine veränderte Nachricht an Bob.

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Was kann passieren?

Bob entschlüsselt die Nachricht und denkt, sie komme von Alice, und dass *Na* der sichere Schlüssel zur Kommunikation mit Alice ist.

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Was kann passieren?

Bob startet Kommunikation mit Alice . . .

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Was kann passieren?

. . . aber spricht in Wirklichkeit mit Charlie.

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Der Fehler ist tatsächlich leicht zu beheben.

Mit ein wenig Erfahrung erkennt man aus der Ausgabe des Theorembeweisers, wie es geht.

Dieser Angriff lässt sich reparieren, in dem man die Elemente des Protokolls typisiert, so dass Zufallszahlen und Schlüssel nicht mehr austauschbar sind.

Dies lässt sich dann auch wieder formalisieren;
der Theoremenbeweise antwortet jetzt "unerfüllbar".

Beispiel: Sicherheitsprotokolle

Literatur

[1] Neuman, B. C. and Stubblebine, S. G., 1993, A note on the use of timestamps as nonces, ACM SIGOPS, Operating Systems Review, 27(2), 10-14.

[2] Weidenbach, C., 1999, Towards an automatic analysis of security protocols in first-order logic, in H. Ganzinger, ed., 16th International Conference on Automated Deduction, CADE-16, Vol. 1632 of LNAI, Springer, pp. 378-382.

Andere Anwendungsbereiche

MATHEMATIK

Aufgaben

- Beweisen
- Beweisüberprüfung

Theorien

- Zahlen
- Polynomen
- Funktionen auf Zahlenbereichen
- Algebren

VERIFIKATION

Aufgaben

- **Programme**
  - Korrektheit
  - Terminierung
- **reaktive/hybride Systeme**
  - Sicherheit

Theorien

- Zahlen
- Datentypen
- Funktionen auf Zahlenbereichen

Beispiel: Programmverifikation

int [] $\textsc{BubbleSort}$(int[] a) $\{$
  int i, j, t;
  for $(i := |a| - 1; i > 0; i := i - 1)$ $\{$
    for $(j := 0; j < i; j := j + 1)$ $\{$
      if $(a[j] > a[j + 1])\{t := a[j];$
        $a[j] := a[j + 1];$
        $a[j + 1] := t\};$
$\}\}$ return $a\}$

Andere Anwendungsbereiche

MATHEMATIK

Aufgaben
- Beweisen
- Beweisüberprüfung

Theorien
- Zahlen
- Polynomen
- Funktionen auf Zahlenbereichen
- Algebren

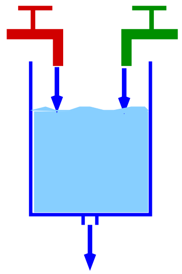
VERIFIKATION

Aufgaben
- **Programme**
  - Korrektheit
  - Terminierung
- **reaktive/hybride Systeme**
  - Sicherheit

Theorien
- Zahlen
- Datentypen
- Funktionen auf Zahlenbereichen

Controllers





Überprüfe:
- Kein "overflow"
- Substanzen in der richtigen Proportion
- ... andernfalls:

  Tank kann in $\leq$ 200s geleert werden.

Weitere Anwendungebereiche

MATHEMATIK

Aufgaben
- Beweisen
- Beweisüberprüfung

Theorien
- Zahlen
- Polynomen
- Funktionen auf Zahlenbereichen
- Algebren

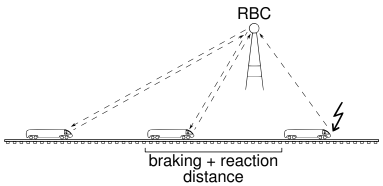
VERIFIKATION

Aufgaben
- **Programme**
  - Korrektheit
  - Terminierung
- **reaktive/hybride Systeme**
  - Sicherheit

Theorien
- Zahlen
- Datentypen
- Funktionen auf Zahlenbereichen

Controllers

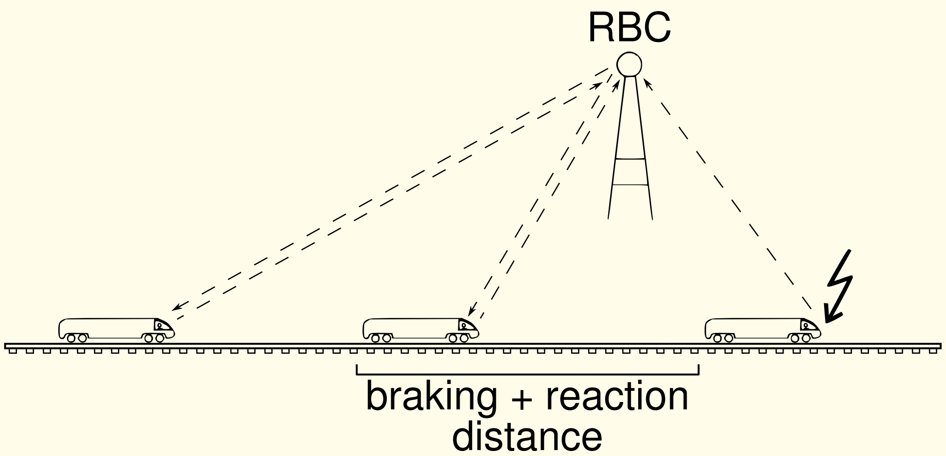
Zugkontrollsysteme



- **Task:** Keine Kollision

Beispiel: ETCS Fallstudie

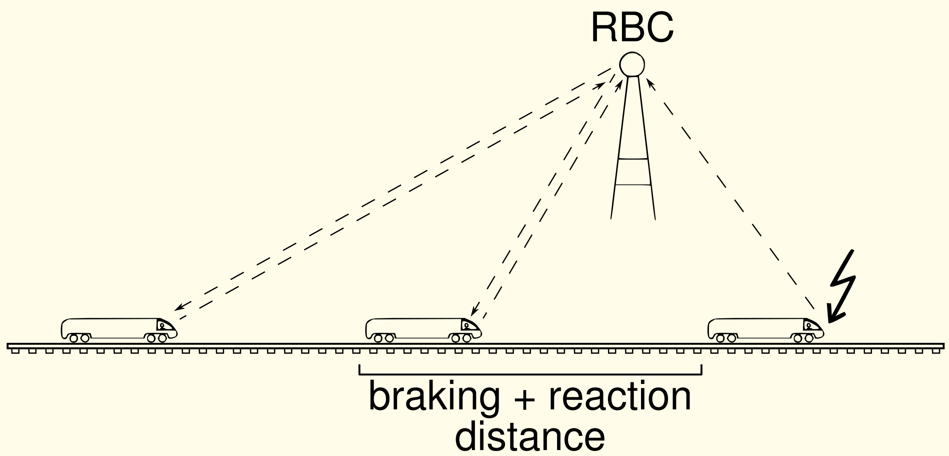
AVACS: ETCS Fallstudie [Jacobs,VS'06,'07; Faber,Jacobs,VS'07]



Anzahl der Züge:	$n > 0$	$\mathbb{Z}$
Minimaler sicherer Abstand:	$l_{\text{alarm}} > 0$	$\mathbb{R}$
Minimale / maximale Geschwindigkeit :	$0 \leq \text{min} < \text{max}$	$\mathbb{R}$
Zeit zwischen Updates:	$\Delta t > 0$	$\mathbb{R}$
Zugpositionierung vor/nach Update:	pos, pos′	$: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

Beispiel: ETCS Fallstudie

AVACS: ETCS Fallstudie [Jacobs,VS'06,'07; Faber,Jacobs,VS'07]



Update(pos, pos′) :

- $\forall i\ (i = 0 \rightarrow pos(i) + \Delta t{*}\text{min} \leq pos'(i) \leq pos(i) + \Delta t{*}\text{max})$
- $\forall i\ (0 < i < n\ \wedge\ pos(i-1) > 0\ \wedge\ pos(i-1) - pos(i) \geq l_{\text{alarm}}$
  $\rightarrow pos(i) + \Delta t * \text{min} \leq pos'(i) \leq pos(i) + \Delta t{*}\text{max})$

...

Induktive Invariante: Keine Kollision

$\text{Sicher}(\text{pos}) \wedge \text{Update}(\text{pos}, \text{pos}') \wedge \neg \text{Sicher}(\text{pos}') \models \perp$

Sicher(pos) :

$\forall i, j (i < j \rightarrow \text{pos}(i) > \text{pos}(j))$

Anwendungen

- **Vorlesung:** Decision procedures for verification:
  BSc, MSc, Normalerweise in Wintersemester

- **Vorlesung:** Formal specification and verification:
  MSc, Normalerweise in Sommersemester

Weitere Logiken

- Alternativen zur klassischen Logik
- Erweiterungen der klassischen Logik

Weitere Logiken

- Alternativen: z.B. Mehrwertige Logiken

Ausgangspunkt für die Entwicklung mehrwertiger Logiken war die Frage, ob Annahme, das es nur zwei Wahrheitswerte 0 (falsch) und 1 (wahr) geben kann nicht zu Einschränkungen führen kann.

Für Aussagen über die Zukunft stellte bereits Aristoteles diese Frage, indem er argumentierte, dass die Wahrheit einer Aussage wie

"Morgen wird eine Seeschlacht stattfinden"

erst am Abend des morgigen Tages feststehen wird und dass sie bis zu diesem Zeitpunkt noch als unbestimmt betrachtet werden muss.

Weitere Logiken

- Alternativen: z.B. Mehrwertige Logiken

Wahrheitswerten: Menge W mit $0, 1 \in W$

z.B: $W = \{0, 1, \text{unbekannt}\}$

$W = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ oder $W = [0, 1]$.

Weitere Logiken

- Alternativen: z.B. Mehrwertige Logiken.

Wahrheitswerten: Menge W mit $0, 1 \in W$

z.B: $W = \{0, 1, \text{unbekannt}\}$

$W = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ oder $W = [0, 1]$.

In neuerer Zeit haben mehrwertige Logiken im Bereich der Informatik hohe praktische Bedeutung gewonnen.

Sie ermöglichen den Umgang mit der Tatsache, dass Datenbanken nicht nur eindeutig bestimmte, sondern auch unbestimmte, fehlende oder sogar widersprüchliche Informationen enthalten können.

Weitere Logiken

- Erweiterungen:

In einer nichtklassischen Erweiterung der klassischen Logik werden zusätzliche logische Operatoren hinzugefügt.

Beispiele:

- Modale Logiken
- Dynamische Logik
- Temporale Logik

Weitere Logiken

- Erweiterungen:
  - Modale Logiken: Zusätzliche logische Operatoren:

    "$\Box$": steht für "Es ist notwendig, dass...".

    "$\Diamond$": steht für "Es ist möglich, dass...".

Weitere Logiken

- Erweiterungen:
  - Modale Logiken: Zusätzliche logische Operatoren:

    "$\Box$": steht für "Es ist notwendig, dass...".

    "$\Diamond$": steht für "Es ist möglich, dass...".

  - Dynamische Logik: Zusätzliche logische Operatoren:

    $[\alpha]$, $<\alpha>$, α Programm.

    $[\alpha]F$: F gilt nach jeder Ausführung von α

    $<\alpha>$: es gibt eine Ausführung von α nach der F gilt

Weitere Logiken

- Erweiterungen:

In einer nichtklassischen Erweiterung werden zusätzliche logische Operatoren hinzugefügt.

  - Temporale Logiken: Erweiterungen der Logik, durch die zeitliche Abläufe erfasst werden können.

    Die Aussagenlogik kann Aussagen, deren Wahrheitswerte sich mit der Zeit ändern, nicht oder nur mit Mühe adäquat behandeln.

    > So ist “Es regnet” nur wahr, wenn es am Ort und zur Zeit der Äusserung gerade regnet, sonst nicht.

    Klassische Logiken zählen daher den Äußerungszeitpunkt zu den Wahrheitsbedingungen.

Weitere Logiken

- Erweiterungen:

In einer nichtklassischen Erweiterung werden zusätzliche logische Operatoren hinzugefügt.

- Temporale Logiken: Erweiterungen der Logik, durch die zeitliche Abläufe erfasst werden können.

  Zeitlogiken führen Operatoren ein, so dass jeder Fall der Äusserung des Satzes unter denselben Wahrheitsbedingungen steht.

  Diese Operatoren lassen es zu, differenziertere zeitliche Aussagen logisch zu analysieren, so dass der Wahrheitswert von “Es hat geregnet”, “Es wird regnen”, “Es regnet immer” von der Erfüllung von “Es regnet” zu bestimmten Zeitpunkten abhängig ist.

  Temporale Logik wird in der Informatik für die Programm Spezifikation und Verifikation benutzt.

Weitere Logiken

- **Vorlesung:** Nicht-klassische Logiken
  MSc, Normalerweise in Wintersemester.

Logik höherer Stufe

Logik höherer Stufe erweitert die Prädikatenlogik erster Stufe um die Möglichkeit, über alle Relationen/Funktionen zu quantifizieren.

Donnerstag

Question/Answer Session