

Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 2

6.05.2014

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

- Grundlegende Beweisstrategien
- Induktion über die natürlichen Zahlen / Fehlerquellen
- Strukturelle Induktion
- **Aussagenlogik**
 - Beispiel: Das 8-Damen Problem

Formale Logik

- **Syntax**

welche Formeln?

- **Semantik**

Modelle (Strukturen)

Wann ist eine Formel wahr (in einer Struktur)?

- **Deduktionsmechanismus**

Ableitung neuer wahrer Formeln

Aussagenlogik

Die Welt besteht aus Fakten die **wahr** oder **falsch** sein können.

Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

\top Symbol für die Formel “wahr” (Formel, die immer wahr ist)

\perp Symbol für die Formel “falsch” (Formel, die immer falsch ist)

Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

\top Symbol für die Formel “wahr”

\perp Symbol für die Formel “falsch”

\neg Negationssymbol (“nicht”)

Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

\top Symbol für die Formel “wahr”

\perp Symbol für die Formel “falsch”

\neg Negationssymbol (“nicht”)

\wedge Konjunktionssymbol (“und”)

\vee Disjunktionssymbol (“oder”)

\rightarrow Implikationssymbol (“wenn . . . dann”)

\leftrightarrow Symbol für Äquivalenz (“genau dann, wenn”)

Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

\top Symbol für die Formel “wahr”

\perp Symbol für die Formel “falsch”

\neg Negationssymbol (“nicht”)

\wedge Konjunktionssymbol (“und”)

\vee Disjunktionssymbol (“oder”)

\rightarrow Implikationssymbol (“wenn . . . dann”)

\leftrightarrow Symbol für Äquivalenz (“genau dann, wenn”)

() die beiden Klammern

Vokabular der Aussagenlogik

Abzählbare Menge von Symbolen, etwa

$$\Pi = \{P_0, \dots, P_n\}$$

oder

$$\Pi = \{P_0, P_1, \dots\}$$

Vokabular der Aussagenlogik

Abzählbare Menge von Symbolen, etwa

$$\Pi = \{P_0, \dots, P_n\}$$

oder

$$\Pi = \{P_0, P_1, \dots\}$$

Bezeichnungen für Symbole in Π

- atomare Aussagen
- Atome
- Aussagenvariablen

Formeln der Aussagenlogik

Definition: Menge For_Π der Formeln über Π :

Die kleinste Menge mit:

- $\top \in \text{For}_\Pi$ und $\perp \in \text{For}_\Pi$

Formeln der Aussagenlogik

Definition: Menge For_Π der Formeln über Π :

Die kleinste Menge mit:

- $\top \in \text{For}_\Pi$ und $\perp \in \text{For}_\Pi$
- $\Pi \subseteq \text{For}_\Pi$

Formeln der Aussagenlogik

Definition: Menge For_Π der Formeln über Π :

Die kleinste Menge mit:

- $\top \in \text{For}_\Pi$ und $\perp \in \text{For}_\Pi$
- $\Pi \subseteq \text{For}_\Pi$
- Wenn $F, G \in \text{For}_\Pi$, dann auch

$$\neg F, (F \wedge G), (F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$$

Elemente von For_Π .

Aussagenformeln

For_Π Menge der Formeln über Π :

F, G, H	$::=$	\perp	(Falsum)
		\top	(Verum)
		$P, P \in \Pi$	(atomare Formel)
		$\neg F$	(Negation)
		$(F \wedge G)$	(Konjunktion)
		$(F \vee G)$	(Disjunktion)
		$(F \rightarrow G)$	(Implikation)
		$(F \leftrightarrow G)$	(Äquivalenz)

Konventionen zur Notation

- Klammereinsparungen werden nach folgenden Regeln vorgenommen:
 - $\neg >_p \wedge >_p \vee >_p \rightarrow >_p \leftrightarrow$ (Präzedenzen),
 - \vee und \wedge sind assoziativ und kommutativ,

Konventionen zur Notation

- Klammereinsparungen werden nach folgenden Regeln vorgenommen:
 - $\neg >_p \wedge >_p \vee >_p \rightarrow >_p \leftrightarrow$ (Präzedenzen),
 - \vee und \wedge sind assoziativ und kommutativ,

Beispiele: $\Pi = \{P, Q, R\}$

$\perp, P, \neg Q, P \wedge \neg Q, (P \vee (\neg R \wedge \top))$ sind Formeln

Wir schreiben $P \wedge Q \wedge R$ statt $(P \wedge Q) \wedge R$.

Beispiel: 8-Damenproblem

Aussagenlogische Variablen

$D_{i,j}$ bedeutet: Auf dem Feld (i, j) steht eine Dame.

Beispiel: 8-Damenproblem

Aussagenlogische Variablen

$D_{i,j}$ bedeutet: Auf dem Feld (i, j) steht eine Dame.

Formeln

“Wenn auf dem Feld $(5, 7)$ eine Dame steht, kann keine Dame auf Feld $(5, 8)$, $(5, 6)$, $(5, 5)$, $(5, 4)$, $(5, 3)$, $(5, 2)$, $(5, 1)$ stehen”:

$$D_{57} \rightarrow \neg D_{58} \wedge \neg D_{5,6} \wedge \neg D_{5,5} \wedge \neg D_{5,4} \wedge \neg D_{5,3} \wedge \neg D_{5,2} \wedge \neg D_{5,1}$$

Syntax: Beispiel

“Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?”,
wurde ein 100 Jähriger gefragt.

“Ich halte mich streng an die Diätregeln:

- Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke,
dann habe ich immer Fisch.
- Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe,
verzichte ich auf Eiscreme.
- Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide,
dann rühre ich Fisch nicht an.”

Beispiel 1

Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch.

▶ $\neg B \rightarrow F$

Beispiel 1

Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch.

▶ $\neg B \rightarrow F$

Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme.

▶ $F \wedge B \rightarrow \neg E$

Beispiel 1

Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch.

▶ $\neg B \rightarrow F$

Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme.

▶ $F \wedge B \rightarrow \neg E$

Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, dann rühre ich Fisch nicht an.

▶ $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Beispiel 1

- ▶ $\neg B \rightarrow F$
- ▶ $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- ▶ $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Beispiel 1

- ▶ $\neg B \rightarrow F$
- ▶ $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- ▶ $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Wir möchten wissen, welche Menüs solche Diätregeln erfüllen.

z.B.:

- kein Bier, Fisch und Eiscreme
erfüllt 3. Diätregel nicht!
- Bier, Fisch, keine Eiscreme
erfüllt alle Diätregeln

Beispiel 1

- ▶ $\neg B \rightarrow F$
- ▶ $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- ▶ $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Wir möchten wissen, welche Menüs solche Diätregeln erfüllen.

z.B.:

Formalisierung:

- kein Bier, Fisch und Eiscreme
erfüllt 3. Diätregel nicht!
- Bier, Fisch, keine Eiscreme
erfüllt alle Diätregeln

$B \mapsto$ falsch, $F \mapsto$ wahr, $E \mapsto$ wahr

$B \mapsto$ wahr, $F \mapsto$ wahr, $E \mapsto$ falsch

Beispiel 1

- ▶ $\neg B \rightarrow F$
- ▶ $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- ▶ $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Wir möchten wissen, welche Menüs solche Diätregeln erfüllen.

z.B.:

Formalisierung:

0:falsch, 1:wahr $\mathcal{A} : \{B, F, E\} \rightarrow \{0, 1\}$

- kein Bier, Fisch und Eiscreme
erfüllt 3. Diätregel nicht!

$$\mathcal{A}(B) = 0, \mathcal{A}(F) = 1, \mathcal{A}(E) = 1$$

- Bier, Fisch, keine Eiscreme
erfüllt alle Diätregeln

$$\mathcal{A}(B) = 1, \mathcal{A}(F) = 1, \mathcal{A}(E) = 0$$

Letztes Mal

Aussagenlogik

- **Syntax:** welche Formeln?

- **Semantik:** Modelle (Strukturen)

Wann ist eine Formel wahr (in einer Struktur)?

- **Deduktionsmechanismus:** Ableitung neuer wahrer Formeln

Semantik der Aussagenlogik

Aussagenvariablen für sich haben keine Bedeutung.

Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) zur Verfügung stehen.

1 Symbol für den Wahrheitswert “wahr”

0 Symbol für den Wahrheitswert “falsch”

Eine **Valuation** (Wertebelegung, Interpretation, Struktur, Modell)

ist eine Abbildung

$$\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$$

Semantik der Aussagenlogik

Π eine aussagenlogische Signatur

Aussagenvariablen für sich haben keine Bedeutung.

Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) explizit oder implizit aus dem Kontext zur Verfügung stehen.

Eine **Valuation (Wertebelegung)** ist eine Abbildung

$$\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$$

Wir werden Wertebelegungen auch **Aussagenlogische Strukturen**, **Aussagenlogische Modelle** oder **Interpretationen** nennen.

Semantik der Aussagenlogik

Π eine aussagenlogische Signatur

Aussagenvariablen für sich haben keine Bedeutung.

Hierfür müssen Wertebelegungen (Valuationen) explizit oder implizit aus dem Kontext zur Verfügung stehen.

Eine **Wertebelegung** ist eine Abbildung

$$\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$$

Beispiel:

A	B	C
0	1	0

(Bei drei Symbolen gibt es 8 mögliche Modelle)

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_{\Pi} \rightarrow \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_{\Pi} \rightarrow \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(\perp) = 0$$

$$\mathcal{A}^*(\top) = 1$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_{\Pi} \rightarrow \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(\perp) = 0$$

$$\mathcal{A}^*(\top) = 1$$

$$\mathcal{A}^*(P) = \mathcal{A}(P)$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_{\Pi} \rightarrow \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(\neg F) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathcal{A}^*(F) = 1 \\ 1 & \text{falls } \mathcal{A}^*(F) = 0 \end{cases}$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_{\Pi} \rightarrow \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(F_1 \wedge F_2) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathcal{A}^*(F_1) = 0 \text{ oder } \mathcal{A}^*(F_2) = 0 \\ 1 & \text{falls } \mathcal{A}^*(F_1) = \mathcal{A}^*(F_2) = 1 \end{cases}$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_{\Pi} \rightarrow \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(F_1 \wedge F_2) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathcal{A}^*(F_1) = 0 \text{ oder } \mathcal{A}^*(F_2) = 0 \\ 1 & \text{falls } \mathcal{A}^*(F_1) = \mathcal{A}^*(F_2) = 1 \end{cases}$$
$$\mathcal{A}^*(F_1 \vee F_2) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathcal{A}^*(F_1) = \mathcal{A}^*(F_2) = 0 \\ 1 & \text{falls } \mathcal{A}^*(F_1) = 1 \text{ oder } \mathcal{A}^*(F_2) = 1 \end{cases}$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Wertebelegung.

$\mathcal{A}^* : For_{\Pi} \rightarrow \{0, 1\}$ wird wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(F_1 \rightarrow F_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}^*(F_1) = 0 \text{ oder } \mathcal{A}^*(F_2) = 1 \\ 0 & \text{falls } \mathcal{A}^*(F_1) = 1 \text{ und } \mathcal{A}^*(F_2) = 0 \end{cases}$$
$$\mathcal{A}^*(F_1 \leftrightarrow F_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{A}^*(F_1) = \mathcal{A}^*(F_2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

P	$\neg P$
0	1
1	0

Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

P	$\neg P$
0	1
1	0

\wedge	0	1
0	0	0
1	0	1

\vee	0	1
0	0	1
1	1	1

Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

P	$\neg P$
0	1
1	0

\wedge	0	1
0	0	0
1	0	1

\vee	0	1
0	0	1
1	1	1

\rightarrow	0	1
0	1	1
1	0	1

\leftrightarrow	0	1
0	1	0
1	0	1

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung von Formeln

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ eine Π -Valuation.

$\mathcal{A}^* : \text{For}_{\Pi} \rightarrow \{0, 1\}$ wird induktiv über Aufbau von F wie folgt definiert:

$$\mathcal{A}^*(\perp) = 0$$

$$\mathcal{A}^*(\top) = 1$$

$$\mathcal{A}^*(P) = \mathcal{A}(P)$$

$$\mathcal{A}^*(\neg F) = 1 - \mathcal{A}^*(F)$$

$$\mathcal{A}^*(F \rho G) = B_{\rho}(\mathcal{A}^*(F), \mathcal{A}^*(G))$$

$B_{\rho}(x, y)$ berechnet entspr. der Wahrheitstafel für ρ

z.B. : $B_{\vee}(0, 1) = (0 \vee 1) = 1$; $B_{\rightarrow}(1, 0) = (1 \rightarrow 0) = 0$

Wir schreiben normalerweise \mathcal{A} statt \mathcal{A}^* .

Beispiel

Sei $\mathcal{A} : \{P, Q, R\} \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 1$, $\mathcal{A}(Q) = 0$, $\mathcal{A}(R) = 1$.

$$\mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \rightarrow R)$$

Beispiel

Sei $\mathcal{A} : \{P, Q, R\} \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 1$, $\mathcal{A}(Q) = 0$, $\mathcal{A}(R) = 1$.

$$\mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \rightarrow R) = \mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \rightarrow \mathcal{A}^*(R))$$

Beispiel

Sei $\mathcal{A} : \{P, Q, R\} \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 1$, $\mathcal{A}(Q) = 0$, $\mathcal{A}(R) = 1$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \rightarrow R) &= \mathcal{A}^*(P \wedge (Q \vee \neg P) \rightarrow \mathcal{A}^*(R)) \\ &= (\mathcal{A}^*(P) \wedge \mathcal{A}^*(Q \vee \neg P)) \rightarrow \mathcal{A}^*(R)\end{aligned}$$

Beispiel

Sei $\mathcal{A} : \{P, Q, R\} \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 1$, $\mathcal{A}(Q) = 0$, $\mathcal{A}(R) = 1$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^*((P \wedge (Q \vee \neg P)) \rightarrow R) &= \mathcal{A}^*(P \wedge (Q \vee \neg P) \rightarrow \mathcal{A}^*(R)) \\ &= (\mathcal{A}^*(P) \wedge \mathcal{A}^*(Q \vee \neg P)) \rightarrow \mathcal{A}^*(R) \\ &= (\mathcal{A}(P) \wedge (\mathcal{A}(Q) \vee \neg \mathcal{A}(P))) \rightarrow \mathcal{A}(R) \\ &= (1 \wedge (0 \vee \neg 1)) \rightarrow 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

Beispiel 1

- ▶ $\neg B \rightarrow F$
- ▶ $F \wedge B \rightarrow \neg E$
- ▶ $E \vee \neg B \rightarrow \neg F$

Menü

Formalisierung:

$$\mathcal{A} : \{B, F, E\} \rightarrow \{0, 1\}$$

kein Bier, Fisch und Eiscreme
erfüllt 3. Diätregel nicht!

$$\mathcal{A}(B) = 0, \mathcal{A}(F) = 1, \mathcal{A}(E) = 1$$

1. $\mathcal{A}(\neg B \rightarrow F) = \neg \mathcal{A}(B) \rightarrow \mathcal{A}(F) = \neg 0 \rightarrow 1 = 1 \rightarrow 1 = 1$
2. $\mathcal{A}(F \wedge B \rightarrow \neg E) = \mathcal{A}(F) \wedge \mathcal{A}(B) \rightarrow \neg \mathcal{A}(E)$
 $= (1 \wedge 0) \rightarrow \neg 1 = 0 \rightarrow 0 = 1$
3. $\mathcal{A}(E \wedge \neg B \rightarrow \neg F) = (\mathcal{A}(E) \wedge \neg \mathcal{A}(B)) \rightarrow \neg \mathcal{A}(F)$
 $= (1 \wedge \neg 0) \rightarrow \neg 1 = 1 \rightarrow 0 = 0$

Wahrheitstabellen: Beispiel

$$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$$

A	B	C	$(A \vee C)$	$\neg C$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Wahrheitstabellen: Beispiel

$$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$$

A	B	C	$(A \vee C)$	$\neg C$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0	0	1	1	
0	0	1	1	0	0	
0	1	0	0	1	1	
0	1	1	1	0	1	
1	0	0	1	1	1	
1	0	1	1	0	0	
1	1	0	1	1	1	
1	1	1	1	0	1	

Beispiel

$$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$$

A	B	C	$(A \vee C)$	$\neg C$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Modell einer Formel(menge)

Definition: Interpretation \mathcal{A} ist Modell einer Formel $F \in \text{For}_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1.$$

Modell einer Formel(menge)

Definition: Interpretation \mathcal{A} ist Modell einer Formel $F \in \text{For}_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1.$$

Definition: Interpretation \mathcal{A} ist Modell einer Formelmenge $M \subseteq \text{For}_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1 \text{ für alle } F \in M$$

Modell einer Formel(menge)

Definition: Interpretation \mathcal{A} ist Modell einer Formel $F \in \text{For}_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1.$$

Definition: Interpretation \mathcal{A} ist Modell einer Formelmenge $M \subseteq \text{For}_\Pi$, falls

$$\mathcal{A}^*(F) = 1 \text{ für alle } F \in M$$

Notation:

$$\mathcal{A} \models F$$

$$\mathcal{A} \models M$$

Beispiel

$$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$$

A	B	C	$(A \vee C)$	$\neg C$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Sei $\mathcal{A} : \{A, B, C\} \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(A) = 0$, $\mathcal{A}(B) = 1$, $\mathcal{A}(C) = 1$.

$$\mathcal{A} \models (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$$

$$\mathcal{A} \models \{(A \vee C), (B \vee \neg C)\}$$

Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Definition: F gilt in \mathcal{A} (oder \mathcal{A} ist Modell von F) gdw. $\mathcal{A}(F) = 1$.

Notation: $\mathcal{A} \models F$

Definition: F ist (allgemein-) gültig (oder eine Tautologie)

gdw.: $\mathcal{A} \models F$, für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$

Notation: $\models F$

Definition: F heißt erfüllbar gdw. es $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ gibt, so dass $\mathcal{A} \models F$.

Sonst heißt F unerfüllbar (oder eine Kontradiktion).

Beispiel

$$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$$

A	B	C	$(A \vee C)$	$\neg C$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

F ist nicht allgemeingültig:

$$\mathcal{A}_1(F) = 0 \text{ für } \mathcal{A}_1 : \{A, B, C\} \rightarrow \{0, 1\} \text{ mit } \mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = \mathcal{A}(C) = 0.$$

F ist erfüllbar (also ist F nicht unerfüllbar):

$$\mathcal{A}_2(F) = 1 \text{ für } \mathcal{A} : \{A, B, C\} \rightarrow \{0, 1\} \text{ mit } \mathcal{A}(A) = 0, \mathcal{A}(B) = 1, \mathcal{A}(C) = 1.$$

Tautologien und Kontradiktionen

Tautologien: Formel, die stets **wahr** sind.

Beispiele: $p \vee (\neg p)$ (Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten)
(Tertium non datur)

$p \leftrightarrow \neg\neg p$ (Prinzip der doppelten Negation)

Kontradiktionen: Formel, die stets **falsch** sind.

Beispiel: $p \wedge \neg p$

- Die Negation einer Tautologie ist eine Kontradiktion
- Die Negation einer Kontradiktion ist eine Tautologie

Beispiele

Die folgenden Formeln sind Tautologien:

$$(1) \quad (p \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p)$$

$$(2) \quad (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

$$(3) \quad (p \wedge q) \rightarrow p$$

$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

$$(4) \quad p \rightarrow (p \vee q)$$

$$q \rightarrow (p \vee q)$$

$$(5) \quad (p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

$$(6) \quad (((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \wedge p) \rightarrow r$$

Folgerung und Äquivalenz

Definition: F impliziert G (oder G folgt aus F),

gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ gilt: Wenn $\mathcal{A} \models F$, dann $\mathcal{A} \models G$.

Notation: $F \models G$

Definition: F und G sind äquivalent

gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ gilt: $\mathcal{A} \models F$ gdw. $\mathcal{A} \models G$.

Notation: $F \equiv G$.

Erweiterung auf Formelmengen N in natürlicher Weise, z.B.:

$N \models G$ gdw.: für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ gilt:
falls $\mathcal{A} \models F$, für alle $F \in N$,
so $\mathcal{A} \models G$.

Folgerung und Äquivalenz

Intuition:

- F **impliziert** G (oder G **folgt aus** F),
gdw.: für jede Wertebelegung, für die F wahr ist, auch G wahr ist.
- Erweiterung auf Formelmengen N in natürlicher Weise, z.B.:
 $N \models G$ gdw.: für alle Wertebelegungen, für denen alle Formeln in N wahr sind, ist G auch wahr.
- Zwei Formeln F und G sind **logisch äquivalent** (Notation: $F \equiv G$)
wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind

Beispiel: $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg Q \rightarrow \neg P)$ (Kontraposition)

Beispiel

$$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \quad G = (A \vee B)$$

Überprüfe, ob $F \models G$

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Beispiel

$$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \quad G = (A \vee B)$$

Überprüfe, ob $F \models G$

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	0	0	1	0	
0	0	1	1	0	0	
0	1	0	0	1	0	
0	1	1	1	1	1	
1	0	0	1	1	1	
1	0	1	1	0	0	
1	1	0	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	

Beispiel

$$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \quad G = (A \vee B)$$

Überprüfe, ob $F \models G$

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Beispiel

$$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \quad G = (A \vee B)$$

Überprüfe, ob $F \models G$: Ja, $F \models G$

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1

Beispiel

$$F = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C) \quad G = (A \vee B)$$

Überprüfe, ob $F \models G$: Ja, $F \models G$

.... aber es ist nicht wahr dass $G \models F$ (Notation: $G \not\models F$)

A	B	C	$(A \vee C)$	$(B \vee \neg C)$	$(A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$	$(A \vee B)$
0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1

Tautologien und Kontradiktionen

Tautologien, allgemeingültige Formeln:

Formeln, die stets **wahr** sind.

Kontradiktionen, unerfüllbare Formeln:

Formel, die stets **falsch** sind.

- Die Negation einer Tautologie ist eine Kontradiktion
- Die Negation einer Kontradiktion ist eine Tautologie

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Beweis 1: Aus der Wahrheitstafel.

Beweis 2: F allgemeingültig gdw. $\mathcal{A}(F)=1$ für alle $\mathcal{A}:\Pi\rightarrow\{0,1\}$

gdw. $\mathcal{A}(\neg F)=0$ für alle $\mathcal{A}:\Pi\rightarrow\{0,1\}$ gdw. $\neg F$ unerfüllbar

Allgemeingültigkeit / Folgerung

F, G Formeln

Theorem. $F \models G$ gdw. $\models F \rightarrow G$.

Beweis:

$F \models G$ g.d.w. für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$, falls $\mathcal{A}(F) = 1$ so $\mathcal{A}(G) = 1$
g.d.w. für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$, $(\mathcal{A}(F) \rightarrow \mathcal{A}(G)) = 1$
g.d.w. für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$, $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$
g.d.w. $\models F \rightarrow G$

Allgemeingültigkeit / Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \rightarrow G$.

Beweis: " \Rightarrow "

Annahme: $N \cup \{F\} \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$,
falls $[\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}]$ so $\mathcal{A}(G) = 1$.

Wir beweisen, dass $N \models F \rightarrow G$, d.h. für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$
falls $[\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N]$ so $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N$.

Fall 1: $\mathcal{A}(F) = 0$. Dann $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Fall 2: $\mathcal{A}(F) = 1$, d.h. $[\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}]$. Dann
 $\mathcal{A}(G) = 1$ und somit $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Allgemeingültigkeit / Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \rightarrow G$.

Beweis: “ \Leftarrow ”

Annahme: $N \models F \rightarrow G$ d.h. für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$,
falls $[\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N]$ so $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Wir beweisen, dass $N \cup \{F\} \models G$, d.h. für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$
falls $[\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}]$ so $\mathcal{A}(G) = 1$.

Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{F\}$.

Dann (i) $\mathcal{A}(F) = 1$ und

(ii) $[\mathcal{A}(H) = 1$ für alle Formeln $H \in N]$, also $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$.

Es folgt, dass $1 = \mathcal{A}(F \rightarrow G) = (\mathcal{A}(F) \rightarrow \mathcal{A}(G)) = (1 \rightarrow \mathcal{A}(G)) = \mathcal{A}(G)$,
so $\mathcal{A}(G) = 1$.

Allgemeingültigkeit / Folgerung

F, G Formeln.

Theorem. $F \equiv G$ gdw. $\models F \leftrightarrow G$.

Beweis:

$F \equiv F$ g.d.w. für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$, $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$

g.d.w. für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$, $(\mathcal{A}(F) \leftrightarrow \mathcal{A}(G)) = 1$

g.d.w. für alle $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$, $\mathcal{A}(F \leftrightarrow G) = 1$

g.d.w. $\models F \leftrightarrow G$

Allgemeingültigkeit / Folgerung: Zusammenfassung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $F \models G$ gdw. $\models F \rightarrow G$.

Theorem. $N \cup \{F\} \models G$ gdw. $N \models F \rightarrow G$.

Theorem. $F \equiv G$ gdw. $\models F \leftrightarrow G$.

Unerfüllbarkeit / Allgemeingültigkeit / Folgerung

F, G Formeln.

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Beweis auf Seite 65.

Theorem. $F \models G$ gdw. $F \wedge \neg G$ ist unerfüllbar.

Beweis:

$F \models G$ gdw. $\models F \rightarrow G$ d.h. $F \rightarrow G$ allgemeingültig
gdw. $\neg(F \rightarrow G)$ unerfüllbar.
gdw. $F \wedge \neg G$ unerfüllbar.

... da $\neg(F \rightarrow G) \equiv \neg(\neg F \vee G) \equiv \neg\neg F \wedge \neg G \equiv F \wedge \neg G$.

Unerfüllbarkeit / Allgemeingültigkeit / Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \neg G$ ist unerfüllbar.

Beweis: " \Rightarrow "

Annahme: $N \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}: \Pi \rightarrow \{0, 1\}$,
falls $[\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N]$ so $\mathcal{A}(G)=1$.

Zu zeigen: $N \cup \neg G$ unerfüllbar.

Beweis durch Widerspruch: Wir nehmen an, $N \cup \neg G$ erfüllbar,
d.h. es gibt $\mathcal{A}: \Pi \rightarrow \{0, 1\}$, mit

$[\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{\neg G\}]$.

Dann $[\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N]$ und $\mathcal{A}(\neg G) = 1$ (d.h. $\mathcal{A}(G) = 0$). Widerspruch.

Unerfüllbarkeit / Allgemeingültigkeit / Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \neg G$ ist unerfüllbar.

Beweis: “ \Leftarrow ”

Annahme: $N \cup \neg G$ unerfüllbar.

Zu zeigen: $N \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}: \Pi \rightarrow \{0, 1\}$,
falls $[\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N]$ so $\mathcal{A}(G)=1$.

Beweis: Sei $\mathcal{A}: \Pi \rightarrow \{0, 1\}$, mit $[\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N]$.

Falls $\mathcal{A}(G) = 0$, wäre \mathcal{A} ein Modell für $N \cup \{\neg G\}$. Das ist aber unmöglich, da wir angenommen haben, dass $N \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar ist.

Es folgt, dass $\mathcal{A}(G) = 1$.

Unerfüllbarkeit / Allgemeingültigkeit / Folgerung: Zusammenfassung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Theorem. $F \models G$ gdw. $F \wedge \neg G$ ist unerfüllbar.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \neg G$ ist unerfüllbar.

Nota bene: falls N unerfüllbar, so $N \models G$ für jede Formel G
... auch für \perp .

Notation: $N \models \perp$ für N unerfüllbar.

Erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Erfüllbarkeitstest:

Jede Formel F enthält endlich viele Aussagenvariablen.

$\mathcal{A}(F)$ ist nur von den Werten dieser Aussagenvariablen abhängig.

F enthält n Aussagenvariablen:

⇒ 2^n Wertbelegungen notwendig um zu überprüfen,
ob F erfüllbar ist oder nicht.

⇒ Wahrheitstafel

⇒ Das Erfüllbarkeitsproblem ist entscheidbar

Es existieren viel bessere Methoden als Wahrheitstafeltests um die Erfüllbarkeit einer Formel zu überprüfen.

Zusammenfassung

- **Syntax** (Formeln)

- **Semantik**

Wertebelegungen (Valuationen, Modelle)

Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen

Modell einer Formel(menge)

Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Tautologien und Kontradiktionen

Folgerung und Äquivalenz

Erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode