Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 3

13.05.2014

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

- Syntax (Formeln)
- Semantik

Wertebelegungen/Valuationen/Modelle

Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen

$\mathcal{A} \models F$ g.d.w. $\mathcal{A}(F) = 1$.

Gültigkeit und Erfüllbarkeit

F allgemeingültig/Tautologie:

– $\mathcal{A}(F) = 1$ für alle Wertebelegungen $\mathcal{A}$

F erfüllbar

– es gibt Wertebelegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$

F unerfüllbar/Kontradiktion

– $\mathcal{A}(F) = 0$ für alle Wertebelegungen $\mathcal{A}$

Folgerung, Äquivalenz

$F \models G$, $F \equiv G$

Bis jetzt

Eine Formel F ist:

– erfüllbar, wenn es eine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ gibt mit $\mathcal{A}(F) = 1$.

– unerfüllbar, wenn für alle Wertebelegungen $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow$, $\mathcal{A}(F) = 0$.

Bis jetzt

Eine Formelmenge N ist:

– erfüllbar, wenn es eine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ gibt, für die alle Formeln in N wahr sind (d.h. mit $\mathcal{A}(F) = 1$ für alle $F \in N$).

– unerfüllbar, wenn es keine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow$ gibt, für die alle Formeln in N wahr sind (d.h. es gibt keine Wertebelegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$ für alle $F \in N$).

Beispiel

$N = \{P \wedge Q, \neg Q \vee R\}$ ist erfüllbar:

Für $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(R) = 1$ gilt:
$\mathcal{A}(P \wedge Q) = 1$ und $\mathcal{A}(\neg Q \vee R) = 1$ (alle Formeln in N sind wahr in $\mathcal{A}$).

$N = \{P \wedge Q, \neg Q \wedge R\}$ ist nicht erfüllbar (unerfüllbar):

Für jede Wertebelegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(P \wedge Q) = 1$, ist $\mathcal{A}(Q) = 1$
Für jede Wertebelegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(\neg Q \wedge R) = 1$, ist $\mathcal{A}(Q) = 0$.

Es kann keine Wertebelegung $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ geben mit
$\mathcal{A}(P \wedge Q) = 1$ und $\mathcal{A}(\neg \wedge R) = 1$.

Bis jetzt

- **Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung**

$$
\begin{array}{rcl}
F \models G & \text{gdw.} & \models F \rightarrow G \\
N \cup \{F\} \models G & \text{gdw.} & N \models F \rightarrow G \\
F \equiv G & \text{gdw.} & \models F \leftrightarrow G \\
\\
G \text{ allgemeingültig} & \text{gdw.} & \neg G \text{ unerfüllbar} \\
F \models G & \text{gdw.} & F \wedge \neg G \text{ unerfüllbar} \\
N \models G & \text{gdw.} & N \cup \{\neg G\} \text{ unerfüllbar}
\end{array}
$$

Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \{\neg G\}$ ist unerfüllbar.

Beweis: "$\Rightarrow$"

Annahme: $N \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}:\Pi \rightarrow \{0, 1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N$] so $\mathcal{A}(G)=1$.

Zu zeigen: $N \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar.

Beweis durch Widerspruch: Wir nehmen an, $N \cup \{\neg G\}$ erfüllbar, d.h. es gibt $\mathcal{A}:\Pi \rightarrow \{0, 1\}$, mit

[$\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N \cup \{\neg G\}$].

Dann [$\mathcal{A}(H)=1$ für alle Formeln $H \in N$] und $\mathcal{A}(\neg G) = 1$ (d.h. $\mathcal{A}(G) = 0$). Widerspruch.

Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \{\neg G\}$ ist unerfüllbar.

Beweis: "$\Leftarrow$"

Annahme: $N \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar.

Zu zeigen: $N \models G$ d.h. für alle $\mathcal{A}{:}\Pi{\rightarrow}\{0,1\}$,
falls [$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N$] so $\mathcal{A}(G){=}1$.

Beweis: Sei $\mathcal{A}{:}\Pi{\rightarrow}\{0,1\}$, mit [$\mathcal{A}(H){=}1$ für alle Formeln $H{\in}N$].

Falls $\mathcal{A}(G) = 0$, wäre $\mathcal{A}$ ein Modell für $N \cup \{\neg G\}$. Das ist aber unmöglich, da wir angenommen haben, dass $N \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar ist.

Es folgt, dass $\mathcal{A}(G) = 1$.

Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung

F, G Formeln; N Formelmenge.

Theorem. F ist allgemeingültig gdw. $\neg F$ ist unerfüllbar.

Theorem. $F \models G$ gdw. $F \wedge \neg G$ ist unerfüllbar.

Theorem. $N \models G$ gdw. $N \cup \{\neg G\}$ ist unerfüllbar.

Nota bene: falls N unerfüllbar, so $N \models G$ für jede Formel G
... auch für $\perp$.

Notation: $N \models \perp$ für N unerfüllbar.

Bis jetzt

- **Unerfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit/Folgerung**

$$\begin{array}{rcl} F \models G & \text{gdw.} & \models F \rightarrow G \\ N \cup \{F\} \models G & \text{gdw.} & N \models F \rightarrow G \\ F \equiv G & \text{gdw.} & \models F \leftrightarrow G \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} G \text{ allgemeingültig} & \text{gdw.} & \neg G \text{ unerfüllbar} \\ F \models G & \text{gdw.} & F \wedge \neg G \text{ unerfüllbar} \\ N \models G & \text{gdw.} & N \cup \{\neg G\} \text{ unerfüllbar} \end{array}$$

- Kalküle:

  Erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Ein zweiter Kalkül

Ein zweiter Kalkül: Äquivalenzumformung

- (Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel

Äquivalenz

Zwei Formeln F und G sind logisch äquivalent (Notation: $F \equiv G$) wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind

Beispiel: $(P \to Q) \equiv (\neg Q \to \neg P)$ (Kontraposition)

Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln F, G, H gültig:

$$\begin{aligned}
(F \wedge F) &\equiv F \\
(F \vee F) &\equiv F && \text{(Idempotenz)} \\[1ex]
(F \wedge G) &\equiv (G \wedge F) \\
(F \vee G) &\equiv (G \vee F) && \text{(Kommutativität)} \\[1ex]
(F \wedge (G \wedge H)) &\equiv ((F \wedge G) \wedge H) \\
(F \vee (G \vee H)) &\equiv ((F \vee G) \vee H) && \text{(Assoziativität)} \\[1ex]
(F \wedge (F \vee G)) &\equiv F \\
(F \vee (F \wedge G)) &\equiv F && \text{(Absorption)} \\[1ex]
(F \wedge (G \vee H)) &\equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H)) \\
(F \vee (G \wedge H)) &\equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H)) && \text{(Distributivität)}
\end{aligned}$$

Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln F, G, H gültig:

$$(\neg\neg F) \equiv F \qquad \text{(Doppelte Negation)}$$

$$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$$

$$\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G) \qquad \text{(De Morgan's Regeln)}$$

$$(F \to G) \equiv (\neg G \to \neg F) \qquad \text{(Kontraposition)}$$

$$(F \to G) \equiv (\neg F \vee G) \qquad \text{(Elimination Implikation)}$$

$$F \leftrightarrow G \equiv (F \to G) \wedge (G \to F) \qquad \text{(Elimination Äquivalenz)}$$

Wichtige Äquivalenzen

Die folgenden Äquivalenzen sind für alle Formeln F, G, H gültig:

$(F \wedge G) \equiv F$, falls G Tautologie

$(F \vee G) \equiv \top$, falls G Tautologie (Tautologieregeln)

$(F \wedge G) \equiv \bot$, falls G unerfüllbar

$(F \vee G) \equiv F$, falls G unerfüllbar (Tautologieregeln)

Wichtige Äquivalenzen mit $\top / \bot$

$(A \wedge \neg A) \equiv \bot$

$(A \vee \neg A) \equiv \top$ (Tertium non datur)

$(A \wedge \top) \equiv A$

$(A \wedge \bot) \equiv \bot$

Wichtige Äquivalenzen (Zusammengefasst)

$(F \wedge F) \equiv F$	$(F \vee F) \equiv F$	(Idempotenz)
$(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$	$(F \vee G) \equiv (G \vee F)$	(Kommutativität)
$(F \wedge (G \wedge H)) \equiv ((F \wedge G) \wedge H)$ $(F \vee (G \vee H)) \equiv ((F \vee G) \vee H)$		(Assoziativität)
$(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$ $(F \vee (F \wedge G)) \equiv F$		(Absorption)
$(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$ $(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$		(Distributivität)
$(\neg\neg F) \equiv F$		(Doppelte Negation)
$\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$ $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$		(De Morgan's Regeln)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg G \rightarrow \neg F)$		(Kontraposition)
$(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G)$		(Elimination Implikation)
$F \leftrightarrow G \equiv (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$		(Elimination Äquivalenz)

Terminologie

Eine Formel F, die als Teil einer Formel G auftritt, heißt Teilformel von G.

- F ist eine Teilformel von F
- $\left.\begin{array}{l} F = \neg G \text{ und} \\ H \text{ Teilformel von } G \end{array}\right\} \rightarrow \quad H \text{ Teilformel von } F$
- $\left.\begin{array}{l} F = F_1 \ \rho \ F_2 \\ (\text{wo } \rho \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}) \\ H \text{ Teilformel von } F_1 \text{ oder } F_2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad H \text{ Teilformel von } F$

Substitutionstheorem

Theorem.
Seien F und G äquivalente Formeln. Sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Teilformel F.

Dann ist H äquivalent zu H', wobei H' aus H hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H durch G ersetzt wird.

Beispiel:

$A \vee B \equiv B \vee A$

impliziert

$(C \wedge (A \vee B)) \equiv (C \wedge (B \vee A))$

Strukturelle Induktion

Menge aller aussagenlogischen Formeln For_Π

Basismenge: $\top, \bot; P_0, P_1, P_2, \ldots$ sind aussagenlogische Formeln (atomare Forme

Erzeugungsregel: Wenn F_1, F_2 aussagenlogische Formeln sind, dann sind auch

$\neg F_1, F_1 \wedge F_2, F_1 \vee F_2, F_1 \rightarrow F_2, F_1 \leftrightarrow F_2$ aussagenlogische Formeln

For_Π kleinste Menge, die:

- $\top, \bot$ und Π enthält
- zusammen mit F auch $\neg F$ enthält
- zusammen mit F_1, F_2 auch $F_1 \mathrm{op} F_2$ enthält ($\mathrm{op} \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$)

Gelten die beiden Aussagen:

- $p(A)$ für alle atomaren Formeln $A \in \{\top, \bot\} \cup \Pi$
- $\forall F \in \mathrm{For}_\Pi$: (Falls ($F = \neg F_1$ und $p(F_1)$) dann $p(F)$);
  (Falls ($F = F_1 \mathrm{op} F_2$ und $p(F_1)$ und $p(F_2)$) dann $p(F)$)

dann gilt auch $\forall F \in \mathrm{For}_\Pi : p(F)$.

Substitutionstheorem

Theorem.
Seien F und G äquivalente Formeln. Sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Teilformel F.

Dann ist H äquivalent zu H', wobei H' aus H hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H durch G ersetzt wird.

Beweis: Strukturelle Induktion.

Substitutionstheorem

Theorem.
Seien F und G äquivalente Formeln. Sei H eine Formel mit (mindestens) einem Vorkommen der Teilformel F.

Dann ist H äquivalent zu H', wobei H' aus H hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H durch G ersetzt wird. $p(H)$

Beweis: Strukturelle Induktion.

Induktionsbasis: Beweisen, dass $p(H)$ für alle Formeln H in $\{\bot, \top\} \cup \Pi$ gilt.

Beweis: Falls $H \in \{\bot, \top\} \cup \Pi$ und F Teilformel von H, so muss $F = H$ sein. Dann ist die Formel H', die aus H hervorgeht, indem F ($=$ die ganze Formel H) durch G ersetzt wird, gleich G.

Aber dann: $H = F \equiv G = H'$.

Substitutionstheorem

Beweis: (Fortsetzung)
Sei H eine Formel, $H \not\in \{\bot, \top\} \cup \Pi$. Sei F eine Teilformel von H.

Fall 1: $F = H$. Dann $H' = G$ (wie vorher), so $H = F \equiv G = H'$.

Fall 2: $F \neq H$.

Induktionsvoraussetzung: Annahme: $p(H')$ gilt für alle dir. Teilformeln H' von H.

Induktionsschritt: Beweis, dass $p(H)$ gilt (durch Fallunterscheidung):

Fall 2.1: $H = \neg H_1$. Da $F \neq H$, ist F eine Teilformel von H_1.

Induktionvoraussetzung: $p(H_1)$ gilt, d.h. $H_1 \equiv H_1'$, wobei H_1' aus H_1 hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H_1 durch G ersetzt wird.

Da $H = \neg H_1$, ist $H' = \neg H_1'$.

Dann für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$: $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(\neg H_1) = \neg \mathcal{A}(H_1) \stackrel{I.V.}{=} \neg \mathcal{A}(H_1') = \mathcal{A}(\neg H_1') = \mathcal{A}(H')$

Somit ist bewiesen, dass $H \equiv H'$.

Substitutionstheorem

Beweis: (Fortsetzung)
Induktionsschritt: Beweis, dass $p(H)$ gilt (durch Fallunterscheidung):

Fall 2.2: $H = H_1$ op H_2. Da $F \neq H$, ist F Teilformel von H_1 oder von H_2.

Fall 2.2.1 F ist eine Teilformel von H_1.
Induktionvoraussetzung: $p(H_1)$ gilt, d.h. $H_1 \equiv H_1'$, wobei H_1' aus H_1 hervorgeht, indem (irgend) ein Vorkommen von F in H_1 durch G ersetzt wird.

Da $H = H_1$ op H_2, und F in H_1 vorkommt, so $H' = H_1'$ op H_2.
Dann für alle $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$: $\mathcal{A}(H) = \mathcal{A}(H_1 \text{ op } H_2) = \mathcal{A}(H_1) \text{ op } \mathcal{A}(H_2) \stackrel{I.V.}{=}$ $\mathcal{A}(H_1') \text{ op } \mathcal{A}(H_2) = \mathcal{A}(H_1' \text{ op } H_2) = \mathcal{A}(H')$.

Somit ist bewiesen, dass $H \equiv H'$.

Fall 2.2.2 F ist eine Teilformel von H_2. Analog.

Ein zweiter Kalkül: Logische Umformung

Definition: Äquivalenzumformung

- (Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel
- Anwendung des Substitutionstheorems

Ein zweiter Kalkül: Logische Umformung

Definition: Äquivalenzumformung

- (Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel
- Anwendung des Substitutionstheorems

Theorem

Äquivalenzumformung bildet mit den aufgelisteten wichtigen Äquivalenzen einen vollständigen Kalkül:

Wenn F und G logisch äquivalent sind, kann F in G umgeformt werden.

Beispiel

$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

Beispiel

$(P \to Q) \wedge \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge \neg((\neg Q \vee R) \to (\neg P \vee R))$ (Elimination Implikation)

Beispiel

$(P \rightarrow Q) \land \neg((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$

$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \rightarrow (\neg P \lor R))$ (Elimination Implikation)

$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R))$ (Elimination Implikation)

Beispiel

$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

$\equiv (\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R))$ (Elimination Implikation)

$\equiv (\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R))$ (Elimination Implikation)

$\equiv (\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R))$ (De Morgan's Regel, $\lor$)

Beispiel

$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

$\equiv (\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv (\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv (\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R))$	(De Morgan's Regel, $\lor$)
$\equiv (\neg P \lor Q) \land \quad ((\neg Q \lor R) \land (\neg\neg P \land \neg R))$	(Doppelte Negation, De Morgan, $\lor$)

Beispiel

$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R))$	(De Morgan's Regel, $\lor$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land \quad ((\neg Q \lor R) \land (\neg\neg P \land \neg R))$	(Doppelte Negation, De Morgan, $\lor$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \lor R) \land (P \land \neg R))$	(Doppelte Negation)

Beispiel

$$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$$

$$\begin{aligned}
&\equiv (\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R)) && \text{(Elimination Implikation)}\\
&\equiv (\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R)) && \text{(Elimination Implikation)}\\
&\equiv (\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R)) && \text{(De Morgan's Regel,}\lor\text{)}\\
&\equiv (\neg P \lor Q) \land \quad ((\neg Q \lor R) \land (\neg\neg P \land \neg R)) && \text{(Doppelte Negation, De Morgan, }\lor\text{)}\\
&\equiv (\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \lor R) \land (P \land \neg R)) && \text{(Doppelte Negation)}\\
&\equiv (\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land P \land \neg R)) && \text{(Distributivität)}
\end{aligned}$$

Beispiel

$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R))$	(De Morgan's Regel, $\lor$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land \quad ((\neg Q \lor R) \land (\neg\neg P \land \neg R))$	(Doppelte Negation, De Morgan, $\lor$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \lor R) \land (P \land \neg R))$	(Doppelte Negation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land P \land \neg R))$	(Distributivität)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land \neg R \land P))$	(Kommutativität)

Beispiel

$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

$\equiv (\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv (\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv (\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R))$	(De Morgan's Regel, $\lor$)
$\equiv (\neg P \lor Q) \land \quad ((\neg Q \lor R) \land (\neg\neg P \land \neg R))$	(Doppelte Negation, De Morgan, $\lor$)
$\equiv (\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \lor R) \land (P \land \neg R))$	(Doppelte Negation)
$\equiv (\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land P \land \neg R))$	(Distributivität)
$\equiv (\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land \neg R \land P))$	(Kommutativität)
$\equiv (\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor \bot)$	(Äquivalenzen mit $\bot$)
$\equiv (\neg P \lor Q) \land (\neg Q \land P \land \neg R)$	(Äquivalenzen mit $\bot$)

Beispiel

$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R))$	(Elimination Implikation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R))$	(De Morgan's Regel, $\lor$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land \quad ((\neg Q \lor R) \land (\neg\neg P \land \neg R))$	(Doppelte Negation, De Morgan, $\lor$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \lor R) \land (P \land \neg R))$	(Doppelte Negation)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land P \land \neg R))$	(Distributivität)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land \neg R \land P))$	(Kommutativität)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor \bot)$	(Äquivalenzen mit $\bot$)
$\equiv(\neg P \lor Q) \land (\neg Q \land P \land \neg R)$	(Äquivalenzen mit $\bot$)
$\equiv(\neg P \land \neg Q \land P \land \neg R) \lor (Q \land \neg Q \land P \land \neg R)$	(Distributivität)
$\equiv(\neg P \land P \land \neg Q \land \neg R) \lor (Q \land \neg Q \land P \land \neg R)$	(Kommutativität)

Beispiel

$$
\begin{aligned}
& (P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R)) && \\
\equiv & (\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R)) && \text{(Elimination Implikation)} \\
\equiv & (\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R)) && \text{(Elimination Implikation)} \\
\equiv & (\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R)) && \text{(De Morgan's Regel,} \lor\text{)} \\
\equiv & (\neg P \lor Q) \land \quad ((\neg Q \lor R) \land (\neg\neg P \land \neg R)) && \text{(Doppelte Negation, De Morgan,} \lor\text{)} \\
\equiv & (\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \lor R) \land (P \land \neg R)) && \text{(Doppelte Negation)} \\
\equiv & (\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land P \land \neg R)) && \text{(Distributivität)} \\
\equiv & (\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land \neg R \land P)) && \text{(Kommutativität)} \\
\equiv & (\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor \bot) && \text{(Äquivalenzen mit } \bot\text{)} \\
\equiv & (\neg P \lor Q) \land (\neg Q \land P \land \neg R) && \text{(Äquivalenzen mit } \bot\text{)} \\
\equiv & (\neg P \land \neg Q \land P \land \neg R) \lor (Q \land \neg Q \land P \land \neg R) && \text{(Distributivität)} \\
\equiv & (\neg P \land P \land \neg Q \land \neg R) \lor (Q \land \neg Q \land P \land \neg R) && \text{(Kommutativität)} \\
\equiv & ((\neg P \land P) \land \neg Q \land \neg R) \lor ((Q \land \neg Q) \land P \land \neg R) && \text{(Assoziativität)}
\end{aligned}
$$

Beispiel

$(P \to Q) \land \neg((Q \to R) \to (P \to R))$

$$
\begin{aligned}
&\equiv (\neg P \lor Q) \land \neg((\neg Q \lor R) \to (\neg P \lor R)) && \text{(Elimination Implikation)}\\
&\equiv (\neg P \lor Q) \land \neg(\neg(\neg Q \lor R) \lor (\neg P \lor R)) && \text{(Elimination Implikation)}\\
&\equiv (\neg P \lor Q) \land (\neg\neg(\neg Q \lor R) \land \neg(\neg P \lor R)) && \text{(De Morgan's Regel,}\lor\text{)}\\
&\equiv (\neg P \lor Q) \land \quad ((\neg Q \lor R) \land (\neg\neg P \land \neg R)) && \text{(Doppelte Negation, De Morgan, }\lor\text{)}\\
&\equiv (\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \lor R) \land (P \land \neg R)) && \text{(Doppelte Negation)}\\
&\equiv (\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land P \land \neg R)) && \text{(Distributivität)}\\
&\equiv (\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor (R \land \neg R \land P)) && \text{(Kommutativität)}\\
&\equiv (\neg P \lor Q) \land ((\neg Q \land P \land \neg R) \lor \bot) && \text{(Äquivalenzen mit }\bot\text{)}\\
&\equiv (\neg P \lor Q) \land (\neg Q \land P \land \neg R) && \text{(Äquivalenzen mit }\bot\text{)}\\
&\equiv (\neg P \land \neg Q \land P \land \neg R) \lor (Q \land \neg Q \land P \land \neg R) && \text{(Distributivität)}\\
&\equiv (\neg P \land P \land \neg Q \land \neg R) \lor (Q \land \neg Q \land P \land \neg R) && \text{(Kommutativität)}\\
&\equiv ((\neg P \land P) \land \neg Q \land \neg R) \lor ((Q \land \neg Q) \land P \land \neg R) && \text{(Assoziativität)}\\
&\equiv \bot \lor \bot \equiv \bot && \text{(Äquivalenzen mit }\bot\text{)}
\end{aligned}
$$

Bis jetzt

Kalküle

Wahrheitstafelmethode

Äquivalenzumformung

Bis jetzt

Kalküle

Wahrheitstafelmethode

Äquivalenzumformung

Nicht besonders effizient