Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 4

15.05.2014

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

- **Syntax** (Formeln)
- **Semantik**

  Wertebelegungen/Valuationen/Modelle
  Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen
  Gültigkeit und Erfüllbarkeit
  Folgerung, Äquivalenz

- **Kalküle**

  Wahrheitstafelmethode
  Äquivalenzumformung

Nicht besonders effizient

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

Dazu brauchen wir “Normalformen”

Normalformen

Definition:

- Atom: aussagenlogische Variable
- Literal: Atom, oder

  Negation eines Atoms

Beispiel. Sei $\Pi = \{P, Q, R\}$.

Atome: $P, \quad Q, \quad R$

Literale: $P, \quad \neg P, \quad Q, \quad \neg Q, \quad R, \quad \neg R$

Normalformen

Definition:

- Atom: aussagenlogische Variable
- Literal: Atom, oder

  Negation eines Atoms

Definition:

Klausel: Eine Disjunktion von Literalen

- mehrstellige Disjunktionen $(P \vee \neg Q \vee R)$, $(P \vee P \vee \neg Q)$
- einstellige Disjunktionen P
- die nullstellige Disjunktion (leere Klausel) $\perp$

Normalformen

Definition:

Konjunktive Normalform (KNF): Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, d.h., eine Konjunktion von Klauseln

Normalformen

Definition:

Konjunktive Normalform (KNF): Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, d.h., eine Konjunktion von Klauseln

mehrstellig, einstellig oder nullstellig

Normalformen

Definition:

Konjunktive Normalform (KNF): Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen, d.h., eine Konjunktion von Klauseln

mehrstellig, einstellig oder nullstellig

Beispiele:

$(P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg R \vee \neg S)$

$P \vee Q$

$P \wedge (Q \vee R)$

$P \wedge Q$

$P \wedge P$

$\top$

Normalformen

Definition:

Disjunktive Normalform (DNF): Eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen.

mehrstellig, einstellig oder nullstellig

Beispiele:

$(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg R \wedge \neg S)$

$P \wedge Q$

$P \vee (Q \wedge R)$

$P \vee Q$

$P \vee P$

$\bot$

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
  - eine äquivalente Formel in KNF
  - eine äquivalente Formel in DNF

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
  - eine äquivalente Formel in KNF
  - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
  - eine äquivalente Formel in KNF
  - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig
- Solche Formeln können aus einer Wahrheitstafel abgelesen werden
- Solche Formeln können durch Umformungen hergestellt werden

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
  - eine äquivalente Formel in KNF
  - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig
- Solche Formeln können aus einer Wahrheitstafel abgelesen werden
- Solche Formeln können durch Umformungen hergestellt werden

Beispiel

$F: \quad (P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee R)$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$((\neg P \wedge Q) \vee R)$	F
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1

Beispiel: DNF

$F: \quad (P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee R)$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$((\neg P \wedge Q) \vee R)$	F
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1

Beispiel: DNF

$F: \quad (P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee R)$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$((\neg P \wedge Q) \vee R)$	F
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1	1

DNF: $(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

Beispiel: KNF

$F: \quad (P \vee Q) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee R)$

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$\neg P$	$(\neg P \wedge Q)$	$((\neg P \wedge Q) \vee R)$	F	$\neg F$
0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1	1	0

DNF für $\neg F$: $(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$

KNF für F: $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

Normalformen

DNF für F:

$$\boxed{\bigvee_{\substack{\mathcal{A}:\{P_1,\ldots,P_n\}\to\{0,1\}\\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \cdots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})}$$

wobei:

$P^0 = \neg P$

$P^1 = P$

Normalformen

DNF für F: $$\bigvee_{\substack{\mathcal{A}:\{P_1,\ldots,P_n\}\to\{0,1\}\\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \cdots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})$$

wobei:

$P^0 = \neg P$

$P^1 = P$

Theorem

Für alle Interpretationen $\mathcal{A}' : \{P_1, \ldots, P_n\} \to \{0, 1\}$:

$$\mathcal{A}'(F) = 1 \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{A}'(\bigvee_{\substack{\mathcal{A}:\{P_1,\ldots,P_n\}\to\{0,1\}\\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \cdots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})) = 1.$$

Normalformen

DNF für F:

$$\bigvee_{\substack{\mathcal{A}:\{P_1,\ldots,P_n\}\to\{0,1\} \\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \cdots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})$$

wobei:

$P^0 = \neg P$

$P^1 = P$

KNF für F: $\neg F'$,

wobei F' die DNF von $\neg F$ ist.

Normalformen

DNF für F: $$\boxed{\bigvee_{\substack{\mathcal{A}:\{P_1,\ldots,P_n\}\to\{0,1\}\\ \mathcal{A}(F)=1}} (P_1^{\mathcal{A}(P_1)} \wedge \cdots \wedge P_n^{\mathcal{A}(P_n)})}$$

wobei:

$P^0 = \neg P$

$P^1 = P$

KNF für F: $\neg F'$,

wobei F' die DNF von $\neg F$ ist.

KNF für F: $$\boxed{\bigwedge_{\substack{\mathcal{A}:\{P_1,\ldots,P_n\}\to\{0,1\}\\ \mathcal{A}(F)=0}} (P_1^{1-\mathcal{A}(P_1)} \vee \cdots \vee P_n^{1-\mathcal{A}(P_n)})}$$

Normalformen

Eigenschaften:

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es:
  - eine äquivalente Formel in KNF
  - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig
- Solche Formeln können aus einer Wahrheitstafel abgelesen werden
- Solche Formeln können durch Umformungen hergestellt werden

Umformung in KNF

Vier Schritte:

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von $\leftrightarrow$

   Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von $\leftrightarrow$

   Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von $\rightarrow$

   Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von $\leftrightarrow$

   Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$

2. Elimination von $\rightarrow$

   Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \lor B)$

3. "Nach innen schieben" von $\neg$

   Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$

   $\mapsto$ Negationsnormalform (NNF)

Eine logische Formel ist in Negationsnormalform (NNF), falls die Negationsoperatoren in ihr nur direkt über atomaren Aussagen vorkommen.

Umformung in KNF

Vier Schritte:

1. Elimination von $\leftrightarrow$

   Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von $\rightarrow$

   Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. "Nach innen schieben" von $\neg$

   Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$ (NNF)

4. "Nach innen schieben" von $\vee$

   Verwende Distributivität von $\vee$ über $\wedge$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von $\leftrightarrow$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von $\leftrightarrow$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

2. Elimination von $\rightarrow$

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg(Q \vee R) \vee P)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von $\leftrightarrow$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

2. Elimination von $\rightarrow$

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg(Q \vee R) \vee P)$$

3. "Nach innen schieben" von $\neg$ (NNF)

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R)) \vee P)$$

Umformung in KNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Elimination von $\leftrightarrow$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge ((Q \vee R) \rightarrow P)$$

2. Elimination von $\rightarrow$

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg(Q \vee R) \vee P)$$

3. "Nach innen schieben" von $\neg$ (NNF)

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R)) \vee P)$$

4. "Nach innen schieben" von $\vee$

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge (\neg R \vee P))$$

Umformung in DNF

Vier Schritte:

1. Elimination von $\leftrightarrow$

   Verwende $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

2. Elimination von $\rightarrow$

   Verwende $A \rightarrow B \equiv (\neg A \vee B)$

3. "Nach innen schieben" von $\neg$

   Verwende de Morgans Regeln und $\neg\neg A \equiv A$ (NNF)

4. "Nach innen schieben" von $\wedge$

   Verwende Distributivität von $\wedge$ über $\vee$

Umformung in DNF: Beispiel

Gegeben:

$$P \leftrightarrow (Q \vee R)$$

1. Negationsnormalform (NNF) (s. Seite 32):

$$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)$$

2. "Nach innen schieben" von $\wedge$

$$
\begin{aligned}
& (\neg P \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)) \vee (Q \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)) \vee (R \wedge ((\neg Q \wedge \neg R) \vee P)) \\
\equiv\ & (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge P) \quad \vee \quad (Q \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge P) \quad \vee \\
& (R \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge P) \\
\equiv\ & (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee \underbrace{(\neg P \wedge P)}_{\equiv \bot} \quad \vee \quad (\underbrace{(Q \wedge \neg Q)}_{\equiv \bot} \wedge \neg R) \vee (Q \wedge P) \quad \vee \\
& (\underbrace{(R \wedge \neg R)}_{\equiv \bot} \wedge \neg Q) \vee (R \wedge P) \\
\equiv\ & (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge P) \vee (R \wedge P)
\end{aligned}
$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

Zu A_n äquivalente KNF

$$\bigwedge_{f:\{1,\ldots,n\}\to\{1,2\}} (P_{1,f(1)} \vee \cdots \vee P_{n,f(n)})$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \land P_{12}) \lor \cdots \lor (P_{n1} \land P_{n2})$$

$$\begin{aligned}
n = 1 : A_1 &= P_{11} \land P_{12} && \text{Länge: } 2 = 2^1 \\
n = 2 : A_2 &= (P_{11} \land P_{12}) \lor (P_{21} \land P_{22}) \\
&\equiv ((P_{11} \land P_{12}) \lor P_{21}) \land ((P_{11} \land P_{12}) \lor P_{22}) \\
&\equiv (P_{11} \lor P_{21}) \land (P_{12} \lor P_{21}) \land (P_{11} \lor P_{22}) \land (P_{12} \lor P_{22}) && \text{Länge: } 2 \cdot 2 = 2^2
\end{aligned}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

$$\begin{array}{rcll}
n = 1 : A_1 & = & P_{11} \wedge P_{12} & \text{Länge: } 2 = 2^1 \\
n = 2 : A_2 & = & (P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22}) & \\
 & \equiv & ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{21}) \wedge ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{22}) & \\
 & \equiv & (P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}) & \text{Länge: } 2 \cdot 2 = 2^2 \\
n = 3 : A_3 & = & \underbrace{(P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22})}_{A_2} \vee (P_{31} \wedge P_{32}) & \\
 & \equiv & \underbrace{((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}))}_{KNF(A_2)} \vee (P_{31} \wedge P_{32}) &
\end{array}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

$$\begin{aligned}
n = 1 : A_1 &= P_{11} \wedge P_{12} && \text{Länge: } 2 = 2^1 \\
n = 2 : A_2 &= (P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22}) \\
&\equiv ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{21}) \wedge ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{22}) \\
&\equiv (P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}) && \text{Länge: } 2 \cdot 2 = 2^2 \\
n = 3 : A_3 &= \underbrace{(P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22})}_{A_2} \vee (P_{31} \wedge P_{32}) \\
&\equiv \underbrace{((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}))}_{KNF(A_2)} \vee (P_{31} \wedge P_{32}) \\
&\equiv (((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})) \vee P_{31}) \wedge \\
&\quad\; (((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})) \vee P_{32})
\end{aligned}$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

$$
\begin{aligned}
n = 1 : A_1 &= P_{11} \wedge P_{12} && \text{Länge: 2} \\
n = 2 : A_2 &= (P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22}) \\
&\equiv ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{21}) \wedge ((P_{11} \wedge P_{12}) \vee P_{22}) \\
&\equiv (P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}) && \text{Länge: 2} \\
n = 3 : A_3 &= \underbrace{(P_{11} \wedge P_{12}) \vee (P_{21} \wedge P_{22})}_{A_2} \vee (P_{31} \wedge P_{32}) \\
&\equiv \underbrace{((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22}))}_{KNF(A_2)} \vee (P_{31} \wedge P_{32}) \\
&\equiv (((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})) \vee P_{31}) \wedge \\
&\quad (((P_{11} \vee P_{21}) \wedge (P_{12} \vee P_{21}) \wedge (P_{11} \vee P_{22}) \wedge (P_{12} \vee P_{22})) \vee P_{32}) \\
&\equiv (((P_{11} \vee P_{21} \vee P_{31}) \wedge (P_{12} \vee P_{21} \vee P_{31}) \wedge (P_{11} \vee P_{22} \vee P_{31}) \wedge (P_{12} \vee P_{22} \vee P_{31}) \wedge \\
&\quad (((P_{11} \vee P_{21} \vee P_{32}) \wedge (P_{12} \vee P_{21} \vee P_{32}) \wedge (P_{11} \vee P_{22} \vee P_{32}) \wedge (P_{12} \vee P_{22} \vee P_{32}) && \text{Länge: 2}
\end{aligned}
$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben:

$$A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$$

Zu A_n äquivalente KNF

$$\bigwedge_{f:\{1,\ldots,n\} \to \{1,2\}} (P_{1,f(1)} \vee \cdots \vee P_{n,f(n)})$$

Größe der KNF:

- Klausel in KNF von A_n: 2^n

Beweis: Induktion

Sei $f(n)$ die Anzahl der Klausel in KNF für A_n.

$f(1) = 2$

$f(n+1) = 2f(n)$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben: $A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$

- Klausel in KNF von A_n: 2^n

Beweis durch Induktion

Induktionsbasis: $n = 1 : A_1$ in KNF, 2^1 Klausel.

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben: $A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$

- Klausel in KNF von A_n: 2^n

Beweis durch Induktion

Induktionsvoraussetzung: KNF von A_n hat 2^n Klausel

$KNF(A_n) = C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n},\ C_i = (L_1^i \vee \cdots \vee L_{n_i}^i)$ Klausel

Induktionsschritt: Zu zeigen: KNF von A_{n+1} hat 2^{n+1} Klausel

$$
\begin{aligned}
A_{n+1} = \quad & (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2}) \vee (P_{(n+1),1} \wedge P_{(n+1),2}) \\
\equiv \quad & \underbrace{((P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2}))}_{A_n} \vee (P_{(n+1),1} \wedge P_{(n+1),2}) \\
\equiv \quad & \underbrace{(C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n})}_{KNF(A_n)} \vee (P_{(n+1),1} \wedge P_{(n+1),2}) \\
\equiv \quad & ((C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n}) \vee P_{(n+1),1}) \wedge ((C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n}) \vee P_{(n+1),2}) \\
\equiv \quad & (C_1 \vee P_{(n+1),1}) \wedge \cdots \wedge (C_{2^n} \vee P_{(n+1),1}) \wedge (C_1 \vee P_{(n+1),2}) \wedge \cdots \wedge (C_{2^n} \vee P_{(n+1),2})
\end{aligned}
$$

Beispiel zur exponentiellen Länge der KNF

Gegeben: $A_n = (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2})$

- Klausel in KNF von A_n: 2^n

Beweis durch Induktion

Induktionsvoraussetzung: KNF von A_n hat 2^n Klausel

$$KNF(A_n) = C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n},\ C_i = (L^i_1 \vee \cdots \vee L^i_{n_i}) \text{ Klausel}$$

Induktionsschritt: Zu zeigen: KNF von A_{n+1} hat 2^{n+1} Klausel

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= (P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2}) \vee (P_{(n+1),1} \wedge P_{(n+1),2}) \\
&\equiv \underbrace{((P_{11} \wedge P_{12}) \vee \cdots \vee (P_{n1} \wedge P_{n2}))}_{A_n} \vee (P_{(n+1),1} \wedge P_{(n+1),2}) \\
&\equiv \underbrace{(C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n})}_{KNF(A_n)} \vee (P_{(n+1),1} \wedge P_{(n+1),2}) \\
&\equiv ((C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n}) \vee P_{(n+1),1}) \wedge ((C_1 \wedge \cdots \wedge C_{2^n}) \vee P_{(n+1),2}) \\
&\equiv \underbrace{(C_1 \vee P_{(n+1),1}) \wedge \cdots \wedge (C_{2^n} \vee P_{(n+1),1})}_{2^n} \wedge \underbrace{(C_1 \vee P_{(n+1),2}) \wedge \cdots \wedge (C_{2^n} \vee P_{(n+1),2})}_{2^n}
\end{aligned}$$

KNF: Mengenschreibweise

Notation:

Klausel als Menge von Literalen

Formel in KNF als Menge von Klauseln

KNF: Mengenschreibweise

Notation:

Klausel als Menge von Literalen

Formel in KNF als Menge von Klauseln

Beispiel:

$$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

$$\{\ \ \{P, Q, R\},\ \ \{P, Q, \neg R\},\ \ \{\neg P, Q, R\},\ \ \{\neg P, \neg Q, R\}\ \ \}$$

KNF: Mengenschreibweise

Bedeutung der leeren Menge

- Leere Klausel

  $=$ leere Menge von Literalen

  $=$ leere Disjunktion

  $= \perp$

KNF: Mengenschreibweise

Bedeutung der leeren Menge

- Leere Klausel

  $=$ leere Menge von Literalen

  $=$ leere Disjunktion

  $= \bot$

- Leere Menge von Klausels

  $=$ leere Konjunktion

  $= \top$

Vereinfachung der KNF: Subsumption

Theorem (Subsumption Regel)
Enthält eine KNF-Formel ($=$ Klauselmenge) Klauseln K, K' mit

$$K \subset K'$$

dann entsteht eine äquivalente Formel, wenn K' weggelassen wird.

Vereinfachung der KNF: Subsumption

Theorem (Subsumption Regel)
Enthält eine KNF-Formel (= Klauselmenge) Klauseln K, K' mit

$$K \subset K'$$

dann entsteht eine äquivalente Formel, wenn K' weggelassen wird.

Beweis:

$K = \{L_1, \ldots, L_p\} \subseteq \{L_1, \ldots, L_p, L_{p+1}, \ldots, L_m\} = K'$

F enthält $K \wedge K'$

$$\begin{aligned} K \wedge K' = &\quad (L_1 \vee \cdots \vee L_p) \wedge ((L_1 \vee \cdots \vee L_p) \vee L_{p+1} \vee \ldots L_m) \\ \equiv &\quad (L_1 \vee \cdots \vee L_p) = K \qquad \text{(Absorption)} \end{aligned}$$

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Definition: SAT-Problem

Gegeben: Eine aussagenlogische Formel F

Frage: Ist F erfüllbar?

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Definition: SAT-Problem

Gegeben:	Eine aussagenlogische Formel F
Frage:	Ist F erfüllbar?

NB: F allgemeingültig gdw. $\neg F$ nicht erfüllbar

Das SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

Erfüllbarkeitsproblem für DNF Formeln

Sei $F = \bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ in DNF

F unerfüllbar gdw. $(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ unerfüllbar für alle $i = 1, \ldots, n$

gdw. $(\bigwedge_{j=1}^{m} L_{ij})$ enthält zwei komplementare Literale für alle i

Zusammenfassung

- Normalformen

  Atome, Literale, Klauseln

  Konjunktive und Disjunktive Normalform

  Ablesen von DNF und KNF aus Wahrheitstafeln

  Umformen in KNF/DNF

  Mengenschreibweise

  Subsumption

- SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

  Definition

  Erfüllbarkeitsproblem für DNF Formeln