Logik für Informatiker

2. Aussagenlogik

Teil 6

22.05.2014

Viorica Sofronie-Stokkermans

Universität Koblenz-Landau

e-mail: sofronie@uni-koblenz.de

Bis jetzt

- **Syntax** (Formeln)
- **Semantik**

  Wertebelegungen/Valuationen/Modelle

  Auswertung von Formeln / Wahrheitstabellen

  Gültigkeit und Erfüllbarkeit

  Folgerung, Äquivalenz
- **Kalküle**

  Wahrheitstafelmethode

  Äquivalenzumformung

  nicht sehr effizient.

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit
(für Formeln und/oder Formelmengen)

Bis jetzt

- Normalformen

  Atome, Literale, Klauseln

  Konjunktive und Disjunktive Normalform

  Ablesen von DNF und KNF aus Wahrheitstafeln

  Umformen in KNF/DNF

  Mengenschreibweise

  Subsumption

- SAT-Problem (Erfüllbarkeitsproblem)

  SAT

  - Erfüllbarkeitsproblem für DNF Formeln
  - k-SAT; 3-SAT vs. SAT
  - 2-SAT: heute oder in der nächsten Vorlesung
  - Horn-Formeln
    - Erfüllbarkeitstest für Hornformeln

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem
Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Lemma. Sei F Hornformel die keine Fakten enthält. Dann ist F erfüllbar.

Beweis: Sei $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(P) = 0$ für alle $P \in \Pi$. Dann $\mathcal{A}(F) = 1$.

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem
Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Beweis: (Idee)

Ziel: $\mathcal{A} : \Pi \to \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$.

Falls keine Fakten in F: F erfüllbar.

Sonst: Für alle Fakten $\to P$ in F: $\mathcal{A}(P) := 1$;

Wiederhole das Verfahren für F', entstanden aus F durch Ersetzung von P mit $\top$.

Idee: “Markiere” die Atome, die den Wert 1 bekommen

Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln

Eingabe: $F = D_1 \wedge \cdots \wedge D_n$ eine Hornformel

(die Klausel D_i enthält höchstens ein positives Literal)

Ein Atom in F zu markieren, bedeutet, es an allen Stellen seines Auftretens in F zu markieren

Erfüllbarkeitstest für Horn-Formeln

0: IF keine Fakten (Klausel "$\to A$") vorhanden

THEN Ausgabe: erfüllbar

ELSE markiere alle Fakten in F (Atome A mit $\to A$ in F)

1: IF keine Klausel $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$ in F, so dass

alle Atome in $A_1, \ldots, A_n$ markiert aber B nicht

THEN Ausgabe: erfüllbar

ELSE wähle die erste solche Klausel

IF B leer

THEN Ausgabe: unerfüllbar

ELSE markiere überall B in F

GOTO 1

Beispiel 1

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Konjunktion von Implikationen:

$(P \rightarrow \bot)$	$\wedge$	$P \rightarrow$
$(\top \rightarrow Q)$	$\wedge$	$\rightarrow Q$
$(P \rightarrow R)$	$\wedge$	$P \rightarrow R$
$(Q \rightarrow S)$	$\wedge$	$Q \rightarrow S$
$(W \rightarrow T)$	$\wedge$	$W \rightarrow T$
$(S \rightarrow U)$	$\wedge$	$S \rightarrow U$
$((U \wedge T \wedge Z) \rightarrow P)$	$\wedge$	$U, T, Z \rightarrow P$
$((Q \wedge S \wedge U) \rightarrow W)$		$Q, S, U \rightarrow W$

Beispiel 1

$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$
$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$ Erfüllbar

$$\begin{aligned}
P &\rightarrow \\
&\rightarrow \underline{Q} \\
P &\rightarrow R \\
\underline{Q} &\rightarrow \underline{S} \\
\underline{W} &\rightarrow \underline{T} \\
\underline{S} &\rightarrow \underline{U} \\
\underline{U}, \underline{T}, Z &\rightarrow P \\
\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} &\rightarrow \underline{W}
\end{aligned}$$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$

$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$

$\{Q, S, U, W\}$ wegen $Q, S, U \rightarrow W$

$\{Q, S, U, W, T\}$ wegen $W \rightarrow T$

Keine weiteren Schritte möglich, da es keine Implikation gibt,deren linke Seite vollständig markiert ist und die rechte Seite nicht

Modell: $\mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(W) = \mathcal{A}(T) = 1, \ \mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(Z) = 0$

Markierte Atome: wahr; nicht markierte Atome: falsch.

Beispiel 2

$(\neg P) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$
$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$ Erfüllbar

Markierte Atome und Erklärung:

$$\begin{aligned} P &\to \\ P &\to R \\ Q &\to S \\ W &\to T \\ S &\to U \\ U, T, Z &\to P \\ Q, S, U &\to W \end{aligned}$$

Keine Schritte möglich, da es
keine Implikation gibt,deren linke Seite
vollständig markiert ist und die rechte Seite nicht

Modell: $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(T) = \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(W) = \mathcal{A}(Z) = 0$

Beispiel 3

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U)$$

$$\begin{aligned} P &\rightarrow \\ &\rightarrow \underline{Q} \\ P &\rightarrow R \\ \underline{Q} &\rightarrow \underline{S} \\ W &\rightarrow T \\ \underline{S} &\rightarrow \underline{U} \\ \underline{U}, T, Z &\rightarrow P \\ \underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} &\rightarrow \end{aligned}$$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$

$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$

Unerfüllbar

Q, S, U markiert, aber Kopf von

$Q, S, U \rightarrow$ leer

Erfüllbarkeitsproblem für Horn-Formeln

Theorem
Die Erfüllbarkeit von Horn-Formeln ist in quadratischer Zeit entscheidbar.

Beweis: (Idee)

Ziel: $\mathcal{A} : \Pi \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$.

Falls keine Fakten in F: F erfüllbar.

Sonst: Für alle Fakten $\rightarrow P$ in F: $\mathcal{A}(P) := 1$;

Wiederhole das Verfahren für F', entstanden aus F durch Ersetzung von P mit $\top$.

Komplexität: $|F| \times |F|$

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

   Resolution

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

   Resolution

2. Formelmengen

   Semantische Tableaux

Unser Ziel

Kalkül(e) zur systematischen Überprüfung von Erfüllbarkeit

(für Formeln und/oder Formelmengen)

1. Formeln in KNF (Mengen von Klauseln)

   Resolution

2. Formelmengen

   Semantische Tableaux

Motivation

$(\neg P) \land (Q) \land (\neg P \lor R) \land (\neg Q \lor S) \land (T \lor \neg W) \land (\neg S \lor U) \land$
$(\neg U \lor \neg T \lor P \lor \neg Z) \land (\neg Q \lor \neg S \lor \neg U \lor W)$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \lor R$
$\underline{Q} \rightarrow S$	$\neg Q \lor S$
$W \rightarrow T$	$\neg W \lor T$
$S \rightarrow U$	$\neg S \lor U$
$U, T, Z \rightarrow P$	$\neg U \lor \neg T \lor \neg Z \lor P$
$\underline{Q}, S, U \rightarrow W$	$\neg Q \lor \neg S \lor \neg U \lor W$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$ $Q \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	*Klauseln*
$P \to$	$\neg P$
$\to \underline{Q}$	Q
$P \to R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \to S$	S
$W \to T$	$\neg W \vee T$
$S \to U$	$\neg S \vee U$
$U, T, Z \to P$	$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$
$\underline{Q}, S, U \to W$	$\neg S \vee \neg U \vee W$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\to Q$ $\qquad Q \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	S
$W \rightarrow T$	$\neg W \vee T$
$\underline{S} \rightarrow U$	$\neg S \vee U$
$U, T, Z \rightarrow P$	$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$
$\underline{Q}, \underline{S}, U \rightarrow W$	$\neg S \vee \neg U \vee W$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\rightarrow Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \rightarrow S$	$S \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \land (Q) \land (\neg P \lor R) \land (\neg Q \lor S) \land (T \lor \neg W) \land (\neg S \lor U) \land$$
$$(\neg U \lor \neg T \lor P \lor \neg Z) \land (\neg Q \lor \neg S \lor \neg U \lor W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \to$	$\neg P$
$\to \underline{Q}$	Q
$P \to R$	$\neg P \lor R$
$\underline{Q} \to \underline{S}$	S
$W \to T$	$\neg W \lor T$
$\underline{S} \to U$	U
$U, T, Z \to P$	$\neg U \lor \neg T \lor \neg Z \lor P$
$\underline{Q}, \underline{S}, U \to W$	$\neg U \lor W$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\to Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \to S$	$S \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	S
$W \rightarrow T$	$\neg W \vee T$
$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$	U
$\underline{U}, T, Z \rightarrow P$	$\neg U \vee \neg T \vee \neg Z \vee P$
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow W$	$\neg U \vee W$

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \rightarrow S$	$S \mapsto \top$
$\{Q, S, U\}$	wegen $S \rightarrow U$	$U \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	S
$W \rightarrow T$	$\neg W \vee T$
$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$	U
$\underline{U}, T, Z \rightarrow P$	$\neg T \vee \neg Z \vee P$
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow W$	W

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \rightarrow S$	$S \mapsto \top$
$\{Q, S, U\}$	wegen $S \rightarrow U$	$U \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	S
$\underline{W} \rightarrow T$	T
$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$	U
$\underline{U}, T, Z \rightarrow P$	$\neg T \vee \neg Z \vee P$
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$	W

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \rightarrow S$	$S \mapsto \top$
$\{Q, S, U\}$	wegen $S \rightarrow U$	$U \mapsto \top$
$\{Q, S, U, W\}$	wegen $Q, S, U \rightarrow W$	$W \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	S
$\underline{W} \rightarrow \underline{T}$	T
$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$	U
$\underline{U}, \underline{T}, Z \rightarrow P$	$\neg Z \vee P$
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$	W

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$ initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$ $Q \mapsto \top$

$\{Q, S\}$ wegen $Q \rightarrow S$ $S \mapsto \top$

$\{Q, S, U\}$ wegen $S \rightarrow U$ $U \mapsto \top$

$\{Q, S, U, W\}$ wegen $Q, S, U \rightarrow W$ $W \mapsto \top$

$\{Q, S, U, W, T\}$ wegen $W \rightarrow T$ $T \mapsto \top$

Motivation

$$(\neg P) \wedge (Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee S) \wedge (T \vee \neg W) \wedge (\neg S \vee U) \wedge$$
$$(\neg U \vee \neg T \vee P \vee \neg Z) \wedge (\neg Q \vee \neg S \vee \neg U \vee W)$$

Implikationen	Klauseln
$P \rightarrow$	$\neg P$
$\rightarrow \underline{Q}$	Q
$P \rightarrow R$	$\neg P \vee R$
$\underline{Q} \rightarrow \underline{S}$	S
$\underline{W} \rightarrow \underline{T}$	T
$\underline{S} \rightarrow \underline{U}$	U
$\underline{U}, \underline{T}, Z \rightarrow P$	$\neg Z \vee P$
$\underline{Q}, \underline{S}, \underline{U} \rightarrow \underline{W}$	W

Markierte Atome und Erklärung:

$\{Q\}$	initialer Fakt wegen $\top \rightarrow Q$	$Q \mapsto \top$
$\{Q, S\}$	wegen $Q \rightarrow S$	$S \mapsto \top$
$\{Q, S, U\}$	wegen $S \rightarrow U$	$U \mapsto \top$
$\{Q, S, U, W\}$	wegen $Q, S, U \rightarrow W$	$W \mapsto \top$
$\{Q, S, U, W, T\}$	wegen $W \rightarrow T$	$T \mapsto \top$

Modell:

$\mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(W) = \mathcal{A}(T) = 1$

$\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(Z) = 0$

Markierte Atome: wahr; nicht markierte Atome: falsch.

Bemerkung

Horn Klauseln:

$$\frac{P \qquad P, P_1 \ldots P_n \to Q}{P_1 \ldots P_n \to Q}$$

Klauselschreibweise:

$$\frac{P \qquad \neg P \vee \neg P_1 \ldots \neg P_n \vee Q}{\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n \vee Q}$$

Mengenschreibweise:

$$\frac{\{P\} \qquad \{\neg P, \neg P_1, \neg P_n, Q\}}{\{\neg P_1, \ldots, \neg P_n, Q\}}$$

Verallgemeinerung?

Syllogismus (in der ersten Vorlesung erwähnt):

$$\frac{P \qquad P \rightarrow C}{C}$$

Mengenschreibweise: 1-Resolution (unit resolution)

$$\frac{\{P\} \qquad \{\neg P\} \cup C}{C} \qquad\qquad \frac{\{\neg P\} \qquad \{P\} \cup C}{C}$$

Verallgemeinerung?

Nicht geeignet für Erfüllbarkeitsüberprüfung beliebiger Klauselmengen:

Die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

ist nicht erfüllbar, aber mit 1-Resolution ist aus M nichts ableitbar, also auch nicht $\perp$.

Verallgemeinerung?

Nicht geeignet für Erfüllbarkeitsüberprüfung beliebiger Klauselmengen:

Die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

ist nicht erfüllbar, aber mit 1-Resolution ist aus M nichts ableitbar, also auch nicht $\perp$.

Ziel: Kalkül mit der Eigenschaft dass:
(1) falls M unerfüllbar $\perp$ ist aus M ableitbar
(2) falls $\perp$ aus M ableitbar, M unerfüllbar.

$\mapsto$ Der Resolutionkalkül

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform
- Eine einzige Regel

Der aussagenlogische Resolutionkalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit
- Voraussetzung: Alle Formeln in konjunktiver Normalform
- Eine einzige Regel
- Operiert auf Klauseln (in Mengenschreibweise)

Resolutionskalkül

Definition: Resolutionsregel (einzige Regel des Kalküls)

$$\frac{C_1 \cup \{P\} \qquad \{\neg P\} \cup C_2}{C_1 \cup C_2}$$

wobei

- P eine aussagenlogische Variable
- C_1, C_2 Klauseln (können leer sein)

Definition:

$C_1 \cup C_2$ heißt Resolvente von $C_1 \cup \{P\}$, $C_2 \cup \{\neg P\}$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\} \quad \{\neg P_1\}}{\bot}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\} \quad \{\neg P_1\}}{\bot}$$

Insgesamt: $M \vdash_{\mathsf{Res}} \bot$

also: M unerfüllbar

Resolution: Weiteres Beispiel

Zu zeigen:

$$(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$$

ist allgemeingültig

Resolution: Weiteres Beispiel

Zu zeigen:

$$(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$$

ist allgemeingültig

Dazu zeigen wir, dass

$$\neg[(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))]$$

unerfüllbar ist.

Resolution: Weiteres Beispiel

Zu zeigen:

$$(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$$

ist allgemeingültig

Dazu zeigen wir, dass

$$\neg[(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))]$$

unerfüllbar ist.

Klauselnormalform:

$$\{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M:

(1)	$\{\neg P, Q\}$	gegeben
(2)	$\{\neg Q, R\}$	gegeben
(3)	$\{P\}$	gegeben
(4)	$\{\neg R\}$	gegeben

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M:

(1)	$\{\neg P, Q\}$	gegeben
(2)	$\{\neg Q, R\}$	gegeben
(3)	$\{P\}$	gegeben
(4)	$\{\neg R\}$	gegeben
(5)	$\{Q\}$	aus (1) und (3)

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M:

(1)	$\{\neg P, Q\}$	gegeben
(2)	$\{\neg Q, R\}$	gegeben
(3)	$\{P\}$	gegeben
(4)	$\{\neg R\}$	gegeben
(5)	$\{Q\}$	aus (1) und (3)
(6)	$\{R\}$	aus (2) und (5)

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus M:

(1)	$\{\neg P, Q\}$	gegeben
(2)	$\{\neg Q, R\}$	gegeben
(3)	$\{P\}$	gegeben
(4)	$\{\neg R\}$	gegeben
(5)	$\{Q\}$	aus (1) und (3)
(6)	$\{R\}$	aus (2) und (5)
(7)	$\perp$	aus (4) und (6)

Resolution: Bemerkungen

Vorsicht bei Klauseln mit mehreren Resolutionsmöglichkeiten

- Zwei Klauseln können mehr als eine Resolvente haben
  z.B.: $\{A, B\}$ und $\{\neg A, \neg B\}$
- $\{A, B, C\}$ und $\{\neg A, \neg B, D\}$ haben NICHT $\{C, D\}$ als Resolvente

Resolution: Bemerkungen

Vorsicht bei Klauseln mit mehreren Resolutionsmöglichkeiten

- Zwei Klauseln können mehr als eine Resolvente haben
  z.B.: $\{A, B\}$ und $\{\neg A, \neg B\}$
- $\{A, B, C\}$ und $\{\neg A, \neg B, D\}$ haben NICHT $\{C, D\}$ als Resolvente

Heuristik: Immer möglichst kleine Klauseln ableiten

Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Es gibt folgende Resolutionsmöglichkeiten (ohne Mengenschreibweise)

$$\frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_2 \vee \neg P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_1 \vee P_1}$$

$$\frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_2 \vee P_2} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2}$$

Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Es gibt folgende Resolutionsmöglichkeiten (ohne Mengenschreibweise)

$$\frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_2 \vee \neg P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_1 \vee P_1}$$

$$\frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_2 \vee P_2} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2}$$

Auf diese Weise ist $\perp$ nicht herleitbar

Ohne Mengenschreibweise

Resolutionsregel:

$$\frac{C_1 \vee P \qquad \neg P \vee C_2}{C_1 \vee C_2}$$

Faktorisieren:

$$\frac{C \vee L \vee L}{C \vee L}$$

Resolution mit Faktorisierung

Die Menge

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist unerfüllbar.

Es gibt folgende Resolutionsmöglichkeiten (mit Faktorisieren)

$$\frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_2 \vee \neg P_2} \quad \frac{P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_1 \vee P_1}$$

$$\frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad \neg P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee P_2 \quad P_1 \vee P_2}{P_2 \vee P_2} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_2 \quad P_1 \vee P_2}{\neg P_2 \vee P_2}$$

$$\frac{P_1 \vee P_1}{P_1} \quad \frac{\neg P_1 \vee \neg P_1}{\neg P_1} \quad \frac{P_2 \vee P_2}{P_2} \quad \frac{\neg P_2 \vee \neg P_2}{\neg P_2}$$

$$\frac{P_1 \quad \neg P_1}{\perp}$$

Resolution: Beispiel

Gegeben die Klauselmenge:

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

Resolution:

$$\frac{\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\} \quad \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\} \quad \{\neg P_1\}}{\perp}$$

Insgesamt: $M \vdash_{\mathsf{Res}} \perp$

also: M unerfüllbar

Resolution

Ziele:

- Formalisieren, was $M \vdash_{\mathrm{Res}} \perp$ bedeutet
- Zeigen, dass $M \vdash_{\mathrm{Res}} \perp$ gdw. M unerfüllbar.

Resolution

Sei F eine Klauselmenge und

$$\text{Res}(F) = F \cup \{R \mid R \text{ ist eine Resolvente zweier Klauseln aus } F\}$$

Resolution

Sei F eine Klauselmenge und

$$\text{Res}(F) = F \cup \{R \mid R \text{ ist eine Resolvente zweier Klauseln aus } F\}$$

$\text{Res}^0(F) = F$

$\text{Res}^{n+1}(F) = \text{Res}(\text{Res}^n(F))$

$\text{Res}^\star(F) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \text{Res}^n(F)$

(bezeichnet die Vereinigung der Resolventen aus aller möglichen Resolutionsschritte auf F)

Resolution

Sei F eine Klauselmenge und

$$\text{Res}(F) = F \cup \{R \mid R \text{ ist eine Resolvente zweier Klauseln aus } F\}$$

$\text{Res}^0(F) = F$

$\text{Res}^{n+1}(F) = \text{Res}(\text{Res}^n(F))$

$\text{Res}^\star(F) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \text{Res}^n(F)$

(bezeichnet die Vereinigung der Resolventen aus aller möglichen Resolutionsschritte auf F)

Notation: Falls $C \in \text{Res}^\star(F)$, so schreiben wir $F \vdash_{\text{Res}} C$.

Resolution

Sei F eine Klauselmenge und

$$\text{Res}(F) = F \cup \{R \mid R \text{ ist eine Resolvente zweier Klauseln aus } F\}$$

$\text{Res}^0(F) = F$

$\text{Res}^{n+1}(F) = \text{Res}(\text{Res}^n(F))$

$\text{Res}^\star(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Res}^n(F)$

(bezeichnet die Vereinigung der Resolventen aus aller möglichen Resolutionsschritte auf F)

Notation: Falls $C \in \text{Res}^\star(F)$, so schreiben wir $F \vdash_{\text{Res}} C$.

Definition: Beweis für C (aus F): $C_1, \ldots C_n$, wobei:
$C_n = C$ und für alle $1 \leq i \leq n$: ($C_i \in F$ oder C_i Resolvente für $\frac{C_{j_1} \quad C_{j_2}}{C_i}$ mit $j_1, j_2 < i$).

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

(1)	$\{\neg P, Q\}$	gegeben
(2)	$\{\neg Q, R\}$	gegeben
(3)	$\{P\}$	gegeben
(4)	$\{\neg R\}$	gegeben
(5)	$\{Q\}$	aus (1) und (3)
(6)	$\{R\}$	aus (2) und (5)

Beweis für $\{R\}$ aus M

Resolution: Weiteres Beispiel

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg P, Q\}, \{\neg Q, R\}, \{P\}, \{\neg R\}\}$$

(1)	$\{\neg P, Q\}$	gegeben
(2)	$\{\neg Q, R\}$	gegeben
(3)	$\{P\}$	gegeben
(4)	$\{\neg R\}$	gegeben
(5)	$\{Q\}$	aus (1) und (3)
(6)	$\{R\}$	aus (2) und (5)
(7)	$\perp$	aus (4) und (6)

Beweis für $\perp$ aus M (Widerspruch)

Resolution: Korrektheit und Vollständigkeit

Theorem (Korrektheit)
Für eine Menge M von Klauseln gilt: Falls $M \vdash_{\mathsf{Res}} \bot$, so M unerfüllbar.

Falls aus M die leere Klausel durch Resolution herleitbar ist, ist M unerfüllbar (es gibt keine Wertebelegung $\mathcal{A}$ in der alle Klauseln in M wahr sind).

Äquivalent:

Falls M erfüllbar ist, ist die leere Klausel durch Resolution nicht herleitbar.

Theorem (Vollständigkeit)
Für eine Menge M von Klauseln gilt: Falls M unerfüllbar, so $M \vdash_{\mathsf{Res}} \bot$.

Falls M unerfüllbar ist (d.h. es gibt keine Wertebelegung $\mathcal{A}$ in der alle Klauseln in M wahr sind), ist die leere Klausel aus M durch Resolution herleitbar.

Äquivalent:

Falls aus M die leere Klausel durch Resolution nicht herleitbar ist, ist M erfüllbar.

Zusammenfassung

- Erfüllbarkeitstest für Hornformeln

  1-Resolution (unit resolution)

  (nicht geeignet für Erfüllbarkeitsüberprüfung beliebiger Klauselmengen)

- Der aussagenlogische Resolutionkalkül

  Resolutionsregel (für Klauseln in Mengennotation)

  Resolutionsregel + Faktorisierung (für Klauseln)

  Korrektheit und Vollständigkeit: nächste Vorlesung